MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

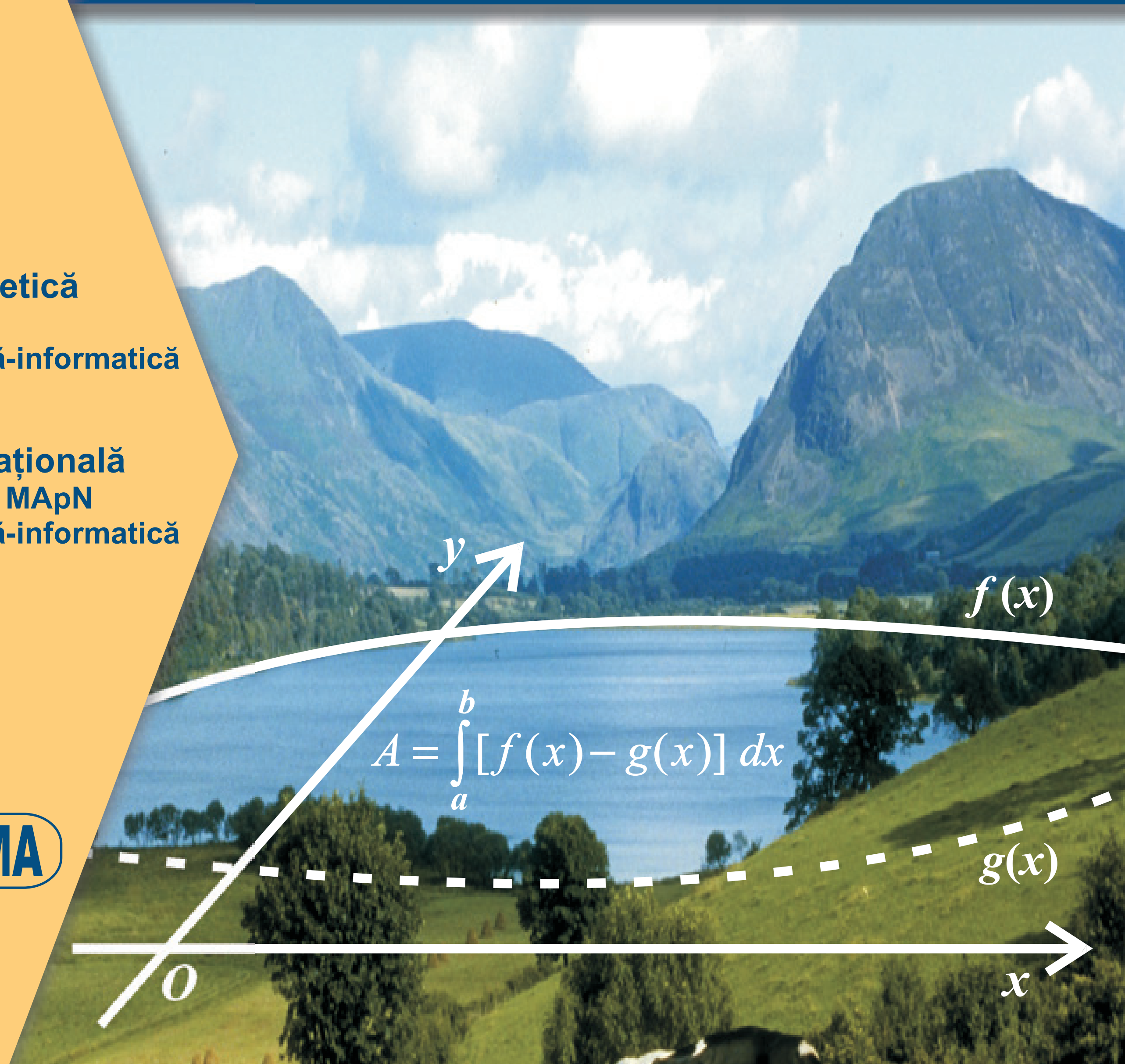
Ion D. Ion
Gabriela Streinu-Cercel
Adrian P. Ghioca
Neculai I. Nediță

Eugen Câmpu
Nicolae Angelescu
Romeo Ilie
Boris Singer

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M1



Filiera teoretică
Profil real
- **matematică-informatică**

Filiera vocațională
Profil militar MApN
- **matematică-informatică**

SIGMA

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Ion D. Ion
Gabriela Streinu-Cercel
Adrian P. Ghioca
Neculai I. Nediță

Eugen Câmpu
Nicolae Angelescu
Boris Singer
Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M1

Filiera teoretică
Profil real
Specializare: matematică-informatică

Filiera vocațională
Profil militar MApN
Specializare: matematică-informatică

SIGMA

Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Cercetării și Tineretului nr. 1561-37 din 23.07.2007, în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al Ministrului Educației și Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006.

Referenți: prof. dr. *Manuela Prajea*
prof. grad I *Gabriela Oprea*

Redactare: Corina Cîrtoaje, Marius Ciocîrlan

Tehnoredactare: Camelia Cristea

Coperta: Camelia Cristea

ISBN 978-973-649-364-5

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică : M1 : clasa a XII-a / Ion D. Ion, Neculai I. Nediță, Adrian P. Ghioca, ... - București : Sigma, 2007
ISBN 978-973-649-364-5

I. Ion, Ion D.
II. Nediță, Neculai I.
III. Ghioca, Adrian P.

51(075.35)

Editura SIGMA

Sediul central:
Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@edituraSigma.ro; web: www.edituraSigma.ro

Distribuție:
Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
e-mail: comenzi@edituraSigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Cuprins

I. Elemente de algebră

Grupuri 5
Legi de compoziție 5
Proprietăți ale legilor de compoziție 9
Clase de resturi modulo n 16
Grupuri 23
Grupuri de permutări 31
Morfisme de grupuri 35
Subgrup. Ordinul unui element 39
*Izometrii într-un plan 46
Teste de evaluare 50

Inele și corpuri 52
Inele 52
Reguli de calcul într-un inel 57
Corpuri 63
Teste de evaluare 68

Polinoame 69
Polinoame având coeficienți într-un corp comutativ 69
Împărțirea cu rest a polinoamelor 77
Calculul valorilor unui polinom. Schema lui Horner 82
Relația de divizibilitate pentru polinoame 88
Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viète 99
Ecuații algebrice având coeficienți numerici (în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 111
Teste de evaluare 119

II. Elemente de analiză matematică

Primitive 121
Probleme care conduc la noțiunea de integrală 121
Primitive și integrala nedefinită a unei funcții. Primitive uzuale 126
Teste de evaluare 134

Integrala definită 135
Integrale definite 135
Proprietăți ale integralei definite. Integrarea funcțiilor continue 142
Proprietatea de medie a integralei. Existența primitivelor unei funcții continue 148
Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea funcțiilor raționale 155
Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea prin părți și schimbarea de variabilă 160
Teste de evaluare 169

Aplicații ale integralei definite 170
Aria unei suprafețe plane 170
Volumul unui corp de rotație 174
Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită 177
Teste de evaluare 181

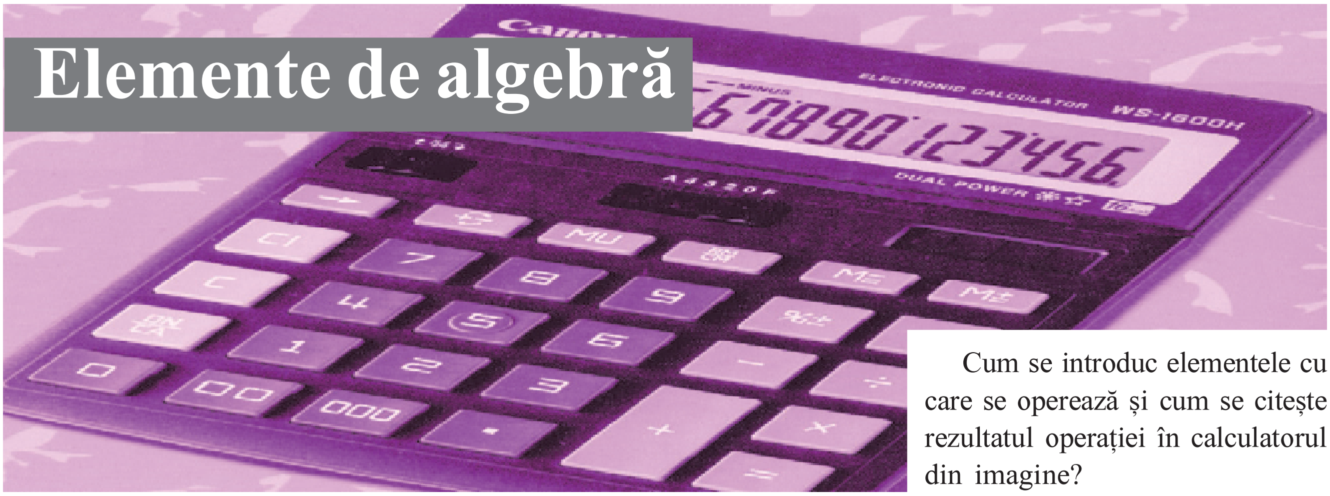
Probleme recapitulative 182

Probleme de tip bacalaureat 191

Teme de sinteză pentru pregătirea examenului de bacalaureat 202

Indicații și răspunsuri 217

Elemente de algebră



Cum se introduc elementele cu care se operează și cum se citește rezultatul operației în calculatorul din imagine?

Grupuri

Legi de compoziție

Pasul decisiv care a marcat trecerea de la aritmetică la algebră a fost înlocuirea operațiilor cu numere, prin operații cu litere (simboluri) reprezentând numere. Ulterior, o treaptă superioară de abstractizare s-a realizat prin folosirea unor simboluri care reprezentau și alte obiecte matematice: mulțimi, funcții, matrice, polinoame...

Definiția unei legi de compoziție

O operație algebrică (binară) pe o mulțime nevidă M combină componentele oricărui cuplu (x, y) de elemente din M și are ca rezultat un element tot din M, notat, de exemplu, cu $x * y$.

Un model pentru acțiunea unei operații este cutia neagră (black box) cu două intrări și o singură ieșire. La cele două intrări pot fi introduse, într-o ordine precizată, două elemente arbitrare $x, y \in M$ și, de fiecare dată, la ieșire se obține un element $x * y \in M$, unic determinat de cuplul (x, y). Se realizează astfel o *corespondență funcțională* $\varphi : M \times M \to M$, prin care la orice pereche ordonată $(x, y) \in M \times M$ se asociază un element unic determinat $\varphi(x, y) \in M$, notat eventual $x * y$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. O aplicație

$$\varphi : M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto \varphi(x, y),$$

se numește *lege de compoziție* (*internă*) sau *operație algebrică binară* pe *mulțimea* M. Elementul $\varphi(x, y) \in M$ se numește *compusul lui* x *cu* y *prin* φ (în această ordine!).

M se numește *mulțimea suport* a operației φ.

Mulțimea M înzestrată cu operația φ se notează (M, φ).

În locul notației funcționale incomode $\varphi(x, y)$, de obicei se folosește fie notația aditivă $x + y$, fie notația multiplicativă $x \cdot y$ sau xy.

În *notația aditivă*, elementul $x + y$ se numește *suma* lui x cu y, iar legea de compoziție se numește *adunare*. Elementele x, y se numesc *termenii* sumei $x + y$.

Cum acționează o operație?

1) Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $a \vee b$ c.m.m.d.c. al lui a și b. Pe $\mathbb{N}^*$ definim operația $(a, b) \to a \vee b$.

a) Calculați $18 \vee 12$, $(18 \vee 12) \vee 15$ și $18 \vee (12 \vee 15)$.

b) Arătați că $1 \vee a = 1$ și $a \vee a = a, \forall\, a \in \mathbb{N}^*$.

2) Fie $M = \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in M$, notăm cu $a \wedge b$ c.m.m.m.c. al lui a și b. Pe M se obține legea de compoziție (internă) $M \times M \to M$, $(a, b) \to a \wedge b$.

a) Calculați $18 \wedge 12$, $(18 \wedge 12) \wedge 15$, $18 \wedge (12 \wedge 15)$.

b) Arătați că $1 \wedge a = a$ și $a \wedge a = a, \forall a \in M$.

c) Verificați că $(18 \vee 12) \cdot (18 \wedge 12) = 18 \cdot 12$.

3) Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ definim

$$a * b = \frac{a + b + |a - b|}{2},\quad a \circ b = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

a) Calculați $4 \circ 5$; $5 \circ 4$; $3 * 4$; $4 * 3$.

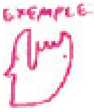
b) Arătați că $a * b = \max\{a, b\}$ și $a \circ b = \min\{a, b\}$.

c) Arătați că $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.

În *notația multiplicativă*, elementul xy se numește *produsul* lui x cu y, iar legea de compoziție φ se numește *înmulțire*. Elementele x, y se numesc *factorii* produsului xy.

Uneori, obligați de tradiție sau din necesitatea de a folosi simultan mai multe legi de compoziție, utilizăm notații ca: $x \circ y, x * y, x \wedge y, x \vee y, x \perp y, x \top y, x \oplus y$ etc.

Expresia $x * y$ se citește „x compus cu y“ (sau „x stea y“) și reprezintă rezultatul acțiunii operației „$*$“ asupra cuplului (x, y).



... de legi de compoziție.

1) *Adunarea și înmulțirea numerelor naturale* asociază fiecărei perechi ordonate de numere naturale (x, y) suma lor $x + y$, respectiv produsul lor xy.

2) *Adunarea și înmulțirea matricelor pătratice* de ordin n asociază fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suma $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, respectiv produsul $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) *Compunerea funcțiilor*

Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f : A \to A,\ f \text{ funcție}\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(A)$, funcția $f \circ g : A \to A$, definită prin $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, se numește *compusa lui f cu g* (în această ordine).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Fie $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente. Acțiunea unei legi de compoziție φ pe M poate fi descrisă prin *tabla Cayley* a operației φ. Când n este suficient de mic, tabla operației constituie un instrument eficace de studiu.

Cayley Arthur (1821-1895), matematician englez, profesor la Cambridge, cercetător în domeniul teoriei matricelor și determinanților; a introdus calculul simbolic, teoria grupurilor, ecuații diferențiale, astronomia sferică ....

Tabla operației φ (*tabla lui Cayley*) pe mulțimea M este un tabel cu linii și coloane corespunzătoare elementelor mulțimii M. La intersecția liniei a_i cu coloana a_j din *tabla lui Cayley* se află compusul lui a_i cu a_j prin operația φ.

φ	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1				$\vdots$		
a_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
a_i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\varphi(a_i, a_j)$		
$\vdots$						
a_n						

În notație multiplicativă avem:

$\bullet$	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_1a_1	$\cdots$	a_1a_j	$\cdots$	a_1a_n
$\vdots$					
a_i	a_ia_1	$\cdots$	a_ia_j	$\cdots$	a_ia_n
$\vdots$					
a_n	a_na_1	$\cdots$	a_na_j	$\cdots$	a_na_n

4) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Notăm cu M mulțimea tuturor submulțimilor lui A (inclusiv cea vidă) $M = \{X \mid X \subseteq A\}$

a) Câte elemente are mulțimea M?

b) Considerând pe M legile de compoziție $M \times M \to M, (X, Y) \to X \cup Y$ și $M \times M \to M, (X, Y) \to X \cap Y$, calculați $X \cup Y, X \cap Y, X \cap (Y \cup Z)$ și $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ dacă $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$ și $Z = \{5, 3\}$.

c) Arătați că $\varnothing \cup X = X, A \cap X = X, \forall X \in M$.

5) Fie $\mathcal{M} = \{X \mid X \subset A\}$ mulțimea submulțimilor lui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dacă $X, Y \in M$, fie $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ (*diferența simetrică* a lui X și Y). Considerăm pe M legea de compoziție $M \times M \to M, (X, Y) \to X \Delta Y$

a) Calculați $X \Delta Y$ și $X \Delta X$, dacă $X = \{1, 2, 3, 5\}$ și $Y = \{2, 3, 4\}$.

b) Pentru mulțimile X și Y definite la punctul a) calculați $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

c) Demonstrați că $\forall X \in M,\ \varnothing \Delta X = X$ și $X \Delta X = \varnothing$.

d) Arătați că $\forall X, Y \in M$. $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

6) Construiți tabla legii de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, unde $M = \{a, b, c\}$, $\varphi((a, a)) = a$; $\varphi((a, b)) = b$, $\varphi((a, c)) = c$; $\varphi((b, a)) = b$; $\varphi((b, b)) = c$; $\varphi((b, c)) = a$; $\varphi((c, a)) = c$; $\varphi((c, b)) = a$; $\varphi((c, c)) = b$.

7) Construiți tabla legii de compoziție $\varphi : M \times M \to M,\ \varphi(x, y) = |x - y|$, unde $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

8) Fie $M = \{\varnothing, X, Z, Y\}$ mulțimea părților lui $A = \{1, 2\}$, unde $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$, $Z = \{1, 2\}$.

Completați tablele legilor de compoziție „$\cup$“, „$\cap$“ și „Δ“ (reuniunea, intersecția și diferența simetrică).

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție $f : A \to A$ poate fi descrisă în acest caz printr-un tabel cu două linii:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(i) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Evident, f este funcție bijectivă dacă și numai dacă în a doua linie apare o singură dată fiecare dintre numerele 1, 2, ..., n.

Pentru $A = \{1, 2\}$, mulțimea $\mathcal{F}(A) = \{\varphi \mid \varphi : A \to A\}$ este formată din elementele:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tabla operației de compunere a funcțiilor din $\mathcal{F}(A)$ este prezentată alăturat.

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

De exemplu, $f \circ h = g$, pentru că $(f \circ h)(1) = 1 = g(1)$ și $(f \circ h)(2) = 1 = g(2)$. În tablă, la intersecția liniei lui f cu coloana lui h apare funcția g.

Parte stabilă. Lege de compoziție indusă.

Definiție. Fie M o mulțime și „$*$“ o lege de compoziție pe M. O submulțime nevidă H a lui M se numește *parte stabilă* în raport cu legea de compoziție „$*$“ dacă:

$$\forall\, x, y \in H \Rightarrow x * y \in H.$$

Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție „$*$“, atunci restricția lui „$*$“ la $H \times H$ ia valori în H. Putem defini pe H o lege de compoziție pe care o vom nota tot cu „$*$“, deși este numai restricția operației „$*$“ de pe G. Este de dorit să nu facem confuzia între operația „$*$“ de pe G și cea de pe H, deși folosim aceeași notație.

Recunoașterea (identificarea) unor părți stabile în raport cu o lege de compoziție.

9) Fie $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{R}, ab = 1 \right\}$.

Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

10) Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}(A) = \{f \text{ funcție} \mid f : A \to A\}$ și $H = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f(3) = 3\}$.

Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{F}(A)$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor. Câte elemente are H ?

11) Arătați că intervalul $H = [0, 1]$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor reale.

12) Determinați submulțimile finite H ale lui $\mathbb{R}$ stabile în raport cu înmulțirea numerelor reale.

13) Arătați că $H = \{1, i, -1, -i\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.

1) Mulțimea $2\mathbb{Z} = \{2q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ a numerelor întregi pare este stabilă în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

2) Fie $A = \{1, 2, ..., n\}$ și $\mathcal{F}_A = \{f \mid f : A \to A\}$. Fie $H = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f(n) = n\}$. Altfel spus, H este mulțimea funcțiilor $f : A \to A$ care fixează pe n. Atunci H este o parte stabilă a lui $\mathcal{F}(A)$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

Într-adevăr, dacă $f, g \in H$, atunci $f(n) = n$ și $g(n) = n$. Rezultă că $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = n$, deci $f \circ g \in H$.

3) Mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ față de adunarea și înmulțirea matricelor.

Într-adevăr, fie $A, A' \in H$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$; atunci $A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} \in H$, $AA' = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in H$.

4) Intervalele reale $(0, \infty)$ și $[0, \infty)$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ înzestrate cu operațiile de adunare și înmulțire. Intervalul $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ este stabil la adunare dar nu este stabil la înmulțire pentru că $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \notin \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

1. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție
$\varphi : M \times M \to M,\ \varphi(x, y) = |x - y|$.
Alcătuiți tabla operației φ.

2. Fie pe $\mathbb{R}$ operația „$*$“, $x * y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + xy$.
Arătați că intervalul $H = [-1, \infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$ “.

3. Pe $\mathbb{N}$ se definesc legile „$\vee$“ și „$\wedge$“ prin $a \vee b = \text{c.m.m.d.c.}\{a, b\}$ și $a \wedge b = \text{c.m.m.m.c.}\{a, b\}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$.
Arătați că $H = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divide } 12\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{N}$ în raport cu legile „$\vee$“ și „$\wedge$“ și alcătuiți tablele operațiilor induse pe H.

4. Arătați că mulțimea $2\mathbb{Z} + 1 = \{2q + 1 \mid q \in \mathbb{Z}\}$ a numerelor impare este stabilă în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

5. Fie $\mathcal{M}_2(3\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.
Arătați că $\mathcal{M}_2(3\mathbb{Z})$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

6. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, unde λ este un parametru real.
Determinați λ astfel încât intervalul $H = (2, \infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$*$“.

7. Fie $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \right\}$, $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f : A \to A\}$ și $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(A)$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}$, $f_3(x) = \dfrac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Arătați că $H = \{f_1, f_2, f_3\}$ este parte stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor. Alcătuiți tabla operației induse pe H.

8. Arătați că $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

9. Fie H o mulțime cu trei numere complexe distincte și nenule.
Determinați elementele lui H știind că aceasta este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe. Generalizare.

10. Fie $H = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{există } a, b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x = a^2 + b^2\}$. Este H o parte stabilă a lui $\mathbb{N}$ în raport cu înmulțirea?

11. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle|\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.
Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

12. Fie mulțimea cu trei elemente $M = \{a, b, c\}$.
a) Câte legi de compoziție se pot defini pe M ?
b) Câte dintre acestea admit ca parte stabilă pe $H = \{a, b\}$? Generalizare.

13. Fie A o mulțime și $\mathcal{F}(A) = \{ f \mid f : A \to A\}$.
Arătați că următoarele submulțimi ale lui $\mathcal{F}(A)$ sunt stabile în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
a) $H_1 = \{ f \in \mathcal{F}(A) \mid f \text{ injectivă}\}$;
b) $H_2 = \{ f \in \mathcal{F}(A) \mid f \text{ surjectivă}\}$;
c) $H_3 = \{ f \in \mathcal{F}(A) \mid f \text{ bijectivă}\}$.
Când $A = \{1, 2, 3\}$, enumerați elementele lui H_3 și alcătuiți tabla operației induse.

14. Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\}$.
Arătați că H este o parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

15. Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.
Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

16. Fie $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
a) Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.
b) Reprezentați într-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy numerele din H.

17. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție definită astfel $x * y = e^{\ln x \ln y}$.
Arătați că M este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”.

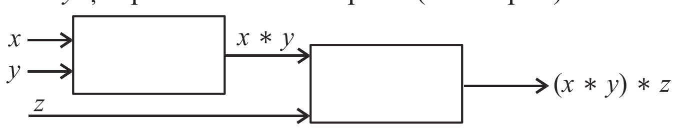
Proprietăți ale legilor de compoziție

Noțiunea de lege de compoziție, așa cum a fost introdusă în paragraful precedent, prezintă un mare grad de generalitate. În definiția unei legi de compoziție se ignoră atât natura elementelor mulțimii suport, cât și modul efectiv în care acționează operația. Singura restricție care s-a pus a fost ca la orice pereche ordonată (x, y) de elemente să se asocieze un element și numai unul. Din acest motiv, pe o mulțime suport se pot defini foarte multe legi de compoziție, în majoritatea lor neinteresante. Astfel, dacă mulțimea suport are doar 3 elemente, atunci se pot defini $3^9 = 19\ 683$ legi de compoziție. Din această cauză, studiul legilor de compoziție bazat doar pe definiția lor este foarte sărac în rezultate. S-a dovedit utilă ideea de a studia legi de compoziție cu anumite proprietăți care, în multe cazuri concrete (operații cu numere, operații cu matrice etc.), s-au folosit în efectuarea calculului algebric și în stabilirea unor rezultate remarcabile, importante din punct de vedere teoretic și practic.

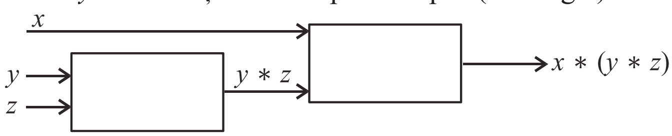
♦ *Asociativitate.*

Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „$*$”. Pentru a compune trei elemente x, y și z, în această ordine, trebuie să mai precizăm (prin paranteze) ordinea în care se efectuează compunerea: $(x*y)*z$ sau $x*(y*z)$.

Prezența parantezelor în expresia $(x*y)*z$ indică următoarea succesiune de calcule: se află mai întâi compusul lui x cu y și apoi acesta se compune (la dreapta!) cu z.



Prezența parantezelor în expresia $x*(y*z)$ impune să aflăm mai întâi $y*z \in M$ și să-l compunem apoi (la stânga!) cu x.



Vom studia în continuare doar legi de compoziție cu proprietatea că $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x, y, z \in M$.

În acest sens, introducem următoarea noțiune:

Definiție. O *lege de compoziție* „$*$“ se numește *asociativă* dacă:
$$(x*y)*z = x*(y*z), \forall x, y, z \in M.$$

EXEMPLE

1) Adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt legi de compoziție asociative, pentru că $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ și } (xy)z = x(yz).$$

2) Adunarea și înmulțirea matricelor pătratice cu elemente reale sunt asociative, pentru că $\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$(A + B) + C = A + (B + C),\ (AB)C = A(BC).$$

3) Compunerea pe mulțimea $\mathcal{F}(A)$ a funcțiilor $f: A \to A$ este asociativă, pentru că $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(A)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

4) Operația de scădere pe mulțimea $\mathbb{Z}$ nu este asociativă. Exemplu, $(3 - 7) - 1 \neq 3 - (7 - 1)$.

Identificarea unor proprietăți ale legilor de compoziție.

1) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Calculați $(x * y) * z$ și $x * (y * z)$ și deduceți că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

2) Pe $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $u * v = uv + i(u + v) - 1 - i$, $\forall u, v \in \mathbb{C}$.

Calculați $(u*v)*w$ și $u*(v*w)$. Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

3) Pe intervalul $M = (0, \infty)$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$, $\forall\ x, y \in M$, unde e este baza logaritmilor naturali. Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

4) Fie legile de compoziție asociative „$\top$“ și „$\perp$“ definite pe mulțimile M, respectiv N. Pe $M \times N$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $(x, y)*(x', y') \overset{\text{def}}{=} (x \top x', y \perp y')$. Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

5) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ definim operația „$*$“, $(x, y)*(x', y') \overset{\text{def}}{=} (x + x', yy')$.

Arătați că „$*$“ este asociativă.

6) Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definim operația „$*$“ prin $A*B \overset{\text{def}}{=} AB - BA, \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că „$*$“ nu este asociativă.

b) Arătați că $A * A = O_2$ și $(A*B)*C + (B*C)*A + (C*A)*B = O_2$, $\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Aplicație. *Produse și sume iterate. Puteri și multipli.*

Să considerăm o mulțime M înzestrată cu o lege de compoziție în notație multiplicativă. Vom da o semnificație pentru produsul $x_1x_2...x_n$ al elementelor $x_1, x_2, ..., x_n$ din M.

Când $n = 2$, x_1x_2 este compusul lui x_1 cu x_2 ; când $n = 3$ definim $x_1x_2x_3 = (x_1x_2)x_3$; când $n = 4$, definim $x_1x_2x_3x_4 = (x_1x_2x_3)x_4 = ((x_1x_2)x_3)x_4$ ș.a.m.d.

Așadar, $x_1x_2...x_n$ se definește recurent prin $x_1x_2...x_n = \begin{cases} x_1, & \text{dacă } n=1 \\ (x_1x_2...x_{n-1})x_n & \text{dacă } n>1 \end{cases}$.

Pentru $n \geqslant 2$, *produsul iterat* $x_1x_2...x_n$ se obține în $n - 1$ pași, adică prin $n - 1$ înmulțiri.

Se folosește și notația $x_1x_2...x_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ (se citește „produs de x_i pentru i de la 1 la n“).

Cu această notație avem: $\boxed{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} x_1 & \text{dacă } n=1 \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n-1} x_i\right)x_n & \text{dacă } n>1 \end{cases}.}$

Teoremă. Dacă legea de compoziție (notată multiplicativ) este asociativă, atunci $(x_1x_2...x_m)(x_{m+1}...\ x_{m+n}) = x_1x_2...x_{m+n}$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, ..., x_{m+n} \in M$. Cu alte notații, $\left(\prod\limits_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\prod\limits_{i=m+1}^{m+n} x_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{m+n} x_i$.

Demonstrație. Fixăm pe m și demonstrăm prin inducție matematică după n.

Pentru $n = 1$, $(x_1x_2...x_m)x_{m+1} = x_1x_2...x_mx_{m+1}$, conform definiției produsului iterat.

Presupunem că $n > 1$ și că afirmația din enunț este adevărată pentru $n - 1$. Avem

$$\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\prod_{i=m+1}^{m+n} x_i\right) = \left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\left(\prod_{i=m+1}^{m+n-1} x_i\right)x_{m+n}\right) = \left(\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\prod_{i=m+1}^{m+n-1} x_i\right)\right)x_{m+n} = \left(\prod_{i=1}^{m+n-1} x_i\right)x_{m+n} = \prod_{i=1}^{m+n} x_i \ . \blacksquare$$

În particular, dacă $x_1 = x_2 = ... = x_n = a \in M$, atunci produsul $\underbrace{aa...a}_{n \text{ factori}}$ se notează cu a^n (putere a lui a cu exponent natural $n > 0$). Conform teoremei predecente, avem: $\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*$.

Cei familiarizați cu descrierea algoritmilor în *pseudocod* pot constata că produsul iterat $p = a_1a_2...a_n$ se calculează conform organigramei următoare, care folosește structura *while–do*.

În limbaj aditiv: dacă legea de compoziție este notată aditiv, suma

$x_1 + x_2 + ... + x_n \overset{\text{not}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ (se citește „sumă de x_i pentru i de la 1 la n“)

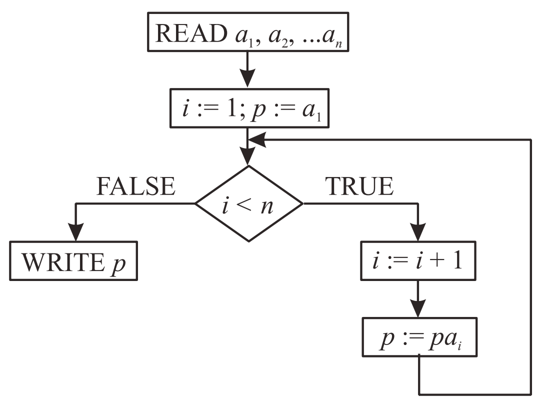
se definește recurent prin $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} x_1, & \text{dacă } n=1 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_n, & \text{dacă } n>1 \end{cases}$.

Dacă operația este asociativă, atunci

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i = \sum_{i=1}^{m+n} x_i} \ , \forall m, n \in \mathbb{N}^* .$$

În particular, dacă $x_1 = x_2 = ... = x_n = a \in M$, suma $\underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ termeni}}$ se notează cu na (*multiplu* de a) și avem:

$$\boxed{ma + na = (m + n)a} \ , \forall\ m, n \in \mathbb{N}^*.$$



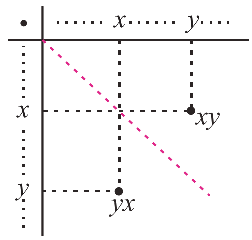
♦ *Comutativitate.*

Așa cum s-a observat, proprietatea de asociativitate simplifică calculul algebric. Un plus de suplețe este oferit de operații care au proprietatea că rezultatul compunerii oricăror două elemente nu depinde de ordinea în care sunt considerate.

Definiție. O *lege de compoziție* $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$ se numește *comutativă* dacă $x * y = y * x$, $\forall x, y \in M$.

EXEMPLU Adunarea și înmulțirea numerelor reale (sau complexe) sunt legi de compoziție comutative:
$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$; $\forall\, x, y \in \mathbb{C}, x + y = y + x$.
$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x$; $\forall\, x, y \in \mathbb{C}, x \cdot y = y \cdot x$.

Dacă o operație este comutativă, atunci tabla operației este simetrică în raport cu diagonala principală; adică elementul xy de la intersecția liniei lui x cu coloana lui y trebuie să fie egal cu elementul yx de la intersecția liniei lui y cu coloana lui x, oricare ar fi $x, y \in M$.



Numeroase legi de compoziție se introduc cu ajutorul altora deja cunoscute. Aceste operații pot prelua unele proprietăți de la cele de plecare prin „mecanismul“ dat chiar de definiția lor. Astfel, comutativitatea adunării matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este o consecință a proprietății de comutativitate a adunării numerelor reale.

Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

atunci $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B + A$.

Să observăm că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este comutativă, cu toate că înmulțirea numerelor reale este comutativă. Pentru a susține această afirmație, trebuie să arătăm că avem cel puțin un (contra)exemplu.

EXEMPLU $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

și $B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$, deci $AB \neq BA$.

Proprietate. Fie „$*$“ operație pe M și H parte stabilă a lui M în raport cu „$*$“. Operația „$*$“ induce o operație pe H. Dacă „$*$“ este asociativă (respectiv comutativă) pe M, atunci „$*$“ este asociativă (respectiv comutativă) pe H.

Demonstrație. Dacă $x, y, z \in H$ și $H \subset M$, atunci $x, y, z \in M$ și, ca urmare, $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Dacă „$*$“ este comutativă pe M, atunci „$*$“ este comutativă și pe H. ■

7) Verificați dacă operația de compunere a funcțiilor de tipul $f:\{1, 2\} \to \{1, 2\}$, este comutativă. Folosiți tabla operației.

Indicație.

Funcțiile de tipul din enunț sunt

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla operației este

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

8) Fie matricele $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Arătați că $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Deduceți că mulțimea $M = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Arătați că operația indusă pe M de înmulțirea matricelor este comutativă.

9) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin

$x * y \overset{\text{def}}{=} xy + 2ax + by$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, unde a, b sunt parametrii reali.

Arătați că legea de compoziție „$*$“ este comutativă dacă și numai dacă $b = 2a$.

10) Pe mulțimea M este definită o lege de compoziție asociativă și comutativă.

Arătați că oricare ar fi $x_1, x_2, x_3 \in M$ și oricare ar fi funcția bijectivă $\sigma:\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ avem $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} = x_1 x_2 x_3$.

11) Fie legile de compoziție comutative „$\top$“ și „$\perp$“ definite pe mulțimile M, respectiv N. Pe $M \times N$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x \top x', y \perp y')$.

Arătați că legea de compoziție „$*$“ este comutativă.

12) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (xx', y + y')$.

Arătați că legea de compoziție „$*$“ este comutativă.

♦ *Element neutru. Elemente simetrizabile.*

Numărul 0 are proprietatea $0 + x = x + 0 = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Numărul 1 are proprietatea $1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ au proprietățile:

$$O_2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{pmatrix} = A = A + O_2 \quad \text{și}$$

$$I_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A = AI_2,\ \forall\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Așadar, pentru operațiile prezentate mai sus, am reușit să precizăm câte un element în mulțimea suport a operației care are efect nul la compunere cu oricare element din mulțimea suport.

Definiție. Un element $e \in M$ se numește *element neutru* pentru legea de compoziție „$*$“, dacă $\forall x \in M \ \ e * x = x * e = x$.

Teoremă. Dacă o lege de compoziție admite element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstrație.

Fie e și e' două elemente neutre pentru o lege de compoziție $M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x * y$. Avem $e * e' = e'$ pentru că e este element neutru. De asemenea, $e * e' = e$ pentru că și e' este element neutru. Rezultă că $e = e'$. ■

Dacă o operație pe M este notată aditiv și admite element neutru, acesta se numește *elementul zero* și se notează de regulă cu 0. Avem $0 + x = x + 0 = x,\ \forall\, x \in M$.

Când operația se notează multiplicativ, elementul neutru, dacă există, se notează de regulă cu 1 și se numește *elementul unitate*. Vom avea $1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\ \forall\, x \in M$.

În unele situații se folosesc notații specifice pentru elementul neutru: I_n pentru înmulțirea matricelor pătratice de ordin n, 1_A pentru operația de compunere a funcțiilor $f : A \to A$ etc.

1) Fie A o mulțime nevidă. Funcția identică a lui A, $1_A : A \to A,\ 1_A(x) = x$ este elementul neutru al operației de compunere pe mulțimea $\mathcal{F}(A) = \{ f \mid f : A \to A\}$ pentru că $1_A \circ f = f \circ 1_A = f,\ \forall\, f \in \mathcal{F}(A)$.

2) Matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este elementul neutru al operației de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru că $I_2A = AI_2 = A, \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Operația indusă de înmulțirea numerelor întregi pe submulțimea $2\mathbb{Z} = \{2q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ nu admite element neutru.

13) Fie următoarele legi de compoziție:

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	p	q
p	p	q	n	m
q	q	p	m	n

$\circ$	α	β	γ	δ	ε
α	ε	α	δ	β	γ
β	α	β	γ	δ	ε
γ	δ	γ	α	ε	β
δ	β	δ	ε	γ	α
ε	γ	ε	β	α	δ

Pentru fiecare lege de compoziție specificați care este elementul neutru.

14) Precizați dacă următoarele legi de compoziție sunt bine definite pe mulțimile indicate și, în acest caz, determinați elementul neutru (dacă există):

a) $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0, 1)$;

b) $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ pe $(4, \infty)$;

c) $x * y = \dfrac{4xy + 3}{4x + 4y + 4}$ pe $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$;

d) $x * y = x^2y$ pe $\mathbb{R}$.

Indicație.

a) Arătăm că operația este bine definită:
Fie $x, y \in (0, 1)$.

$$\frac{xy}{2xy - x - y + 1} = \frac{xy}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}.$$

Avem: $\left|2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\right| < 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

și $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} > 0$.

Ca urmare, $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1} > 0$.

În plus, $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1} < 1$ pentru că $xy - x - y + 1 > 0$.

Determinarea elementului neutru:
$\forall x \in (0, 1)$, avem:

$x * e = x,\ \ \dfrac{xe}{2xe - x - e + 1} = x,$

$2e - 1 = x(2e - 1)$. Rezultă $e = \dfrac{1}{2} \in (0, 1)$.

Analog, dacă $\forall x \in (0, 1)$, $e * x = x$, atunci obținem $e = \dfrac{1}{2}$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „$*$“ asociativă și cu element neutru e.

Spunem că un *element* $x \in M$ este *simetrizabil* în raport cu legea de compoziție „$*$“ (asociativă și cu element neutru), dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$. Elementul x' cu această proprietate se numește simetricul (inversul sau opusul) lui x.

Proprietate. Dacă un element este simetrizabil, atunci admite un unic element simetric.

Demonstrație. Fie $x',\ x'' \in M$ care verifică aceeași proprietate: $x' * x = x * x' = e$ și $x'' * x = x * x'' = e$. Avem
$x'' = x'' * e = x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$. ■

În notație multiplicativă simetricul lui x, dacă există, se notează x^{-1} și se numește *inversul lui* x, $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$; în notație aditivă se notează $-x$ și se numește *opusul lui* x, $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

Observație. Dacă operația „$*$“ pe mulțimea M *nu* este asociativă atunci este posibil ca să existe un element $x \in M$, care are un element simetrizabil la stânga x' și alt element simetrizabil x''.

În acest caz: $(x' * x) * x'' = e * x'' = x''$, $x' * (x * x'') = x' * e = x'$, dar $(x' * x) * x'' \neq x' * (x * x'')$ operația „$*$“ nefiind asociativă.

Observație. Elementul neutru e are simetricul tot e, $e * e = e$.

În notație multiplicativă avem $1^{-1} = 1$.

În notație aditivă avem $-0 = 0$.

EXEMPLU

Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este simetrizabilă (inversabilă) în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Într-adevăr, $\det(A) = 2 \neq 0$. Atunci există $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Avem $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^{-1}A$

Teoremă. Dacă $x,\ y \in M$ sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție „$*$“ (asociativă și cu element neutru), atunci $x * y$ și x' sunt simetrizabile. În plus avem:

(1) $\boxed{(x * y)' = y' * x'}$;   (2) $\boxed{(x')' = x\,.}$

În scriere multiplicativă (1) și (2) devin $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $(x^{-1})^{-1} = x$, iar în cea aditivă $-(x + y) = (-y) + (-x)$, $-(-x) = x$.

Demonstrație. Avem: $(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * (x * y)) =$
$= y' * ((x' * x) * y) = y' * (e * y) = y' * y = e$ și analog $(x * y) * (y' * x') = e$. Rezultă că $x * y$ este simetrizabil și deci $(x * y)' = y' * x'$. Din $x' * x = x * x' = e$, rezultă că x' este simetrizabil și $(x')' = x$. ■

15) Fie următoarele legi de compoziție definite cu ajutorul tabelelor:

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	p	q
p	p	q	n	m
q	q	p	m	n

$\circ$	α	β	γ	δ	ε
α	ε	α	δ	β	γ
β	α	β	γ	δ	ε
γ	δ	γ	α	ε	β
δ	β	δ	ε	γ	α
ε	γ	ε	β	α	δ

Pentru fiecare dintre aceste legi de compoziție, scrieți care este elementul neutru și apoi scrieți care este simetricul fiecărui element.

16) Folosiți tabla compunerii funcțiilor
$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
pentru a arăta că funcțiile e și f sunt simetrizabile.

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

17) Studiați existența elementelor simetrizabile pentru următoarele legi de compoziție:

a) $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0,\ 1)$;

b) $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ pe $(4, \infty)$;

c) $x * y = \dfrac{4xy + 3}{4x + 4y + 4}$ pe $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$;

d) $x * y = x^2y$ pe $\mathbb{R}$;

e) $x * y = x^{\ln y}$ pe $(0; \infty)$;

f) $x * y = e^{\ln x \ln y}$ pe $(0; \infty)$.

Indicație.

a) $\forall x \in (0, 1)$, avem: $x * x' = e$,
$\dfrac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \dfrac{1}{2}$, $x' = 1 - x \in (0,\ 1)$.
Analog, $x' * x = e$, $x' = 1 - x \in (0,\ 1)$.

Exerciţii rezolvate.

1) Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie „$\circ$“ prin $x \circ y \overset{\text{def}}{=} x + y - xy$, numită *compunerea circulară*. Să verificăm că legea de compoziţie „$\circ$“ este asociativă, comutativă, are element neutru şi să determinăm elementele simetrizabile.

Soluţie. Pentru $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $(x \circ y) \circ z = (x + y - xy) \circ z = x + y - xy + z - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$ şi $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - yz) = x + y + z - yz - x(y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$, de unde $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. De asemenea, $x \circ y = x + y - xy = y + x - yx = y \circ x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$. În concluzie, operaţia „$\circ$” este asociativă şi comutativă. Dacă $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru pentru „$\circ$”, atunci $x = e \circ x = e + x - ex$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, de unde $e = ex$. Luând $x = 0$, obţinem $e = 0$. Cum $0 \circ x = 0 + x - 0 \cdot x = x = x \circ 0$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $e = 0$ este elementul neutru. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ este simetrizabil, atunci există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ x = 0$, ceea ce revine la $(a - 1)x = a$. Această ecuaţie admite soluţie în $\mathbb{Z}$ numai pentru $a = 0$ sau $a = 2$ şi găsim $x = 0$, respectiv $x = 2$. Conchidem că elementele simetrizabile în raport cu „$\circ$” sunt 0 şi 2 şi avem $0' = 0$, $2' = 2$.

2) Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să verificăm că:

a) mulţimea K este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor ;

b) operaţiile induse pe K de adunarea şi înmulţirea matricelor sunt asociative şi comutative.

Soluţie. a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ din K. Avem $A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}$, $AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix}$. În concluzie, $A + A'$ şi AA' sunt elemente din K.

b) Cum adunarea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este asociativă şi comutativă, atunci şi adunarea indusă pe K este asociativă şi comutativă. De asemenea, înmulţirea matricelor din K este asociativă pentru că înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este asociativă. Cu toate că înmulţirea din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este comutativă, operaţia indusă de aceasta pe K este comutativă pentru că $AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a - b'b & -a'b - b'a \\ a'b + b'a & a'a - b'b \end{pmatrix} = A'A$.

3) Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 2b^2 \neq 0 \right\}$. Să arătăm că G este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor şi că orice matrice $A \in G$ este inversabilă în raport cu operaţia indusă.

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix}$ din G. Avem $AB = \begin{pmatrix} ac + 2bd & 2(bc + ad) \\ bc + ad & ac + 2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}$, unde $u = ac + 2bd \in \mathbb{Q}$, $v = bc + ad \in \mathbb{Q}$; $u^2 - 2v^2 = \det(AB) = \det A \cdot \det B = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2)$ şi $a^2 - 2b^2 \neq 0$, $c^2 - 2d^2 \neq 0$; rezultă că $u^2 - 2v^2 \neq 0$, deci $AB \in G$. Să observăm că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, deci operaţia indusă pe G admite pe I_2 ca element neutru. Mai rămâne să arătăm că $\forall\ A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, $\exists\ A' = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \in G$ cu $A'A = AA' = I_2$.

Cum $AA' = \begin{pmatrix} ax + 2by & 2(bx + ay) \\ bx + ay & ax + 2by \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că x şi y verifică sistemul $\begin{cases} ax + 2by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$. Matricea sistemului este A şi $\det(A) = a^2 - 2b^2 \neq 0$. Aplicând regula lui Cramer, găsim $x = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$, $y = \dfrac{-b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$; cum $x^2 - 2y^2 = \dfrac{a^2 - 2b^2}{(a^2 - 2b^2)^2} = \dfrac{1}{a^2 - 2b^2} \neq 0$, avem $A' \in G$. Se constată că matricea A' astfel determinată verifică şi egalitatea $A'A = I_2$, deci A' este inversa lui A (în G).

Remarcă. Se putea proceda şi astfel: din $\det A \neq 0$ rezultă că A este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Calculând A^{-1} se constată că $A^{-1} \in G$ şi atunci $A' = A^{-1}$.

1. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“ $(x, y) \mapsto x * y = xy + ax + by$.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât operația „$*$“ să fie comutativă și asociativă.

2. Fie $M = (0, \infty)$. Studiați proprietățile legii de compoziție „$*$“ definită pe M prin: $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y = x^{\ln y}$.

3. Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $A * B = AB + BA$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Studiați proprietățile acestei legi de compoziție.

4. Pe $\mathbb{R}$ se definește operația „$*$“ $(x, y) \mapsto x * y = xy - x - y - 2$.

Cercetați existența elementului neutru.

5. Fie $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

i) Dacă $x, y \in M$, arătați că $\dfrac{x+y}{1+xy} \in M$.

ii) Studiați proprietățile legii de compoziție „$*$“ definită pe M prin $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

6. Fie $M = (0, \infty)$ și $a, b \in M$. Stabiliți condițiile pentru ca operația „$*$“, $(x, y) \mapsto x * y = e^{a\ln x - b\ln y}$, să fie comutativă și asociativă.

7. Fie $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, fie funcția $f_a \in \mathcal{F}(A)$ definită prin

$$f_a(x, y) = \left(x + ay + \frac{a^2}{2},\ y + a\right),\ \forall (x, y) \in A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Fie $M = \{ f_a \mid a \in \mathbb{R} \}$.

i) Arătați că $f_a \circ f_b = f_{a+b}$ și demonstrați că M este o parte stabilă a lui $\mathcal{F}(A)$ în raport cu compunerea funcțiilor.

ii) Arătați că f_{-a} este inversa lui f_a.

iii) Determinați $a \in \mathbb{R}$ dacă $f_a \circ f_3 = f_7$.

8. Fie M mulțimea matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că:

i) $\forall A, B \in M \Rightarrow AB \in M$;

ii) nu există $E \in M$ astfel încât $EA = A$, $\forall A \in M$;

iii) există o infinitate de matrice $F \in M$ cu $AF = A$, $\forall A \in M$.

9. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție „$*$” definită prin $x * y = xy - 7x - 7y + 56$

a) Să se verifice că $x * y = (x-7)(y-7) + 7$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuația $7^x * 49^x = 7$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că mulțimea $G = (7, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

e) Să se rezolve inecuația $x * (x-1) * (x-2) < 7$, $x \in \mathbb{R}$.

f) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze egalitatea $x_1 * x_2 * \ldots * x_n = (x_1 - 7)(x_2 - 7)\ldots(x_n - 7) + 7$, $\forall x_1, x_2 \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \ldots * 2007$.

10. Se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y - 4$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

c) Să se determine simetricul elementului 5 în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

d) Să se arate că $(-a) \circ a = -4$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = nx - 4(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2007 \text{ ori}} = 4$.

g) Să se calculeze

$(-2007) \circ (-2006) \circ \ldots \circ 0 \circ \ldots \circ 2006 \circ 2007$

11. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $x * y = axy + b(x+y) + c$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă dacă și numai dacă $b^2 - b - ac = 0$.

b) Când $b^2 - b - ac = 0$, legea de compoziție „$*$“ admite element neutru dacă și numai dacă $b \mid c$.

12. Pe mulțimea M se definește legea de compoziție asociativă $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto xy$. Arătați:

a) $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall a \in M$ și $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $(ab)^n = a^n b^n$, $\forall a, b \in M$ cu $ab = ba$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

13. Pe mulțimea M avem o lege de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto xy$ asociativă cu proprietatea că există $a \in M$ astfel încât $M = \{axa \mid x \in M\}$.

Arătați că o asemenea lege de compoziție admite element neutru.

14. Fie M o mulțime cu trei elemente.

i) Câte legi de compoziție se pot defini pe M ?

ii) Câte dintre acestea sunt comutative ?

iii) Câte admit element neutru ?

Generalizare.

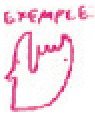
Temă de sinteză

Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi și $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$.

Conform *teoremei împărțirii cu rest*, pentru orice număr $a \in \mathbb{Z}$ există numerele $q, r \in \mathbb{Z}$, unic determinate, astfel încât:

$$a = nq + r,\ 0 \leqslant r < n.$$

Numerele q și r din egalitatea precedentă se numesc *câtul*, respectiv *restul* împărțirii lui a prin n. Se mai spune că r este *redusul* modulo n al numărului $a \in \mathbb{Z}$ și se folosește notația $r = a \bmod n$.



Presupunem că $n = 7$

1) Dacă $a = 33$, atunci $33 = 7 \cdot 4 + 5$, deci $q = 4$ și $r = 5$. Putem scrie $5 = 33 \bmod 7$.

2) Dacă $a = -38$, atunci $-38 = 7 \cdot (-6) + 4$, deci $q = -6$ și $r = 4 = (-38) \bmod 7$.

Resturile posibile la împărțirea prin $n > 0$ sunt $0, 1, 2, ..., n - 1$. *Teoria congruențelor* elaborată de Gauss, cunoscută în zilele noastre și sub numele de *Aritmetică modulară*, reduce calculul cu numere întregi la calculul cu resturile $0, 1, 2, ..., n - 1$ ale împărțirii printr-un număr întreg $n > 0$ potrivit ales. Preocupări recente de Aritmetică modulară au ca obiectiv elaborarea unor algoritmi eficienți de calcul. În această perspectivă, Aritmetica modulară este partea unui domeniu modern de matematici aplicate, cunoscut sub numele de *Computer Algebra*.

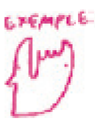
Mulțimea $\mathbb{Z}_n$ a claselor de resturi modulo *n*

Fie n un număr întreg pozitiv. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ folosim notația $\hat{a}$ pentru mulțimea tuturor numerelor întregi de forma $ns + a$, cu $s \in \mathbb{Z}$ („*multiplu de n plus a*”) numită *clasă de resturi* modulo n de *reprezentant* a. Așadar

$$\hat{a} \overset{\text{def}}{=} \{ns + a \mid s \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$$

În mod explicit, dând lui s succesiv valorile ... –2, –1, 0, 1, 2, ... putem scrie

$$\hat{a} = \{..., -2n + a, -n + a, a, n + a, 2n + a, ...\}.$$



1) Presupunem că $n = 2$. Dacă $a = 0$, atunci clasa de resturi modulo 2 este

$\hat{a} = \hat{0} = \{2s \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$, adică mulțimea numerelor întregi pare.

Dacă $a = 1$, atunci clasa de resturi modulo 2 este

$\hat{a} = \hat{1} = \{2s + 1 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$, adică mulțimea numerelor întregi impare.

2) Presupunem că $n = 5$. Avem:

$$\hat{3} = \{5s + 3 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -7, -2, 3, 8, 13, ...\}$$

$$\hat{4} = \{5s + 4 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -1, 4, 9, 14, ...\}$$

$$-\hat{7} = \{5s - 7 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -17, -12, -7, -2, 3, ...\}$$

1) Presupunem că $n = 6$. Scrieți teorema împărțirii cu rest pentru următoarele numere întregi:

a) $a = 33$; d) $a = -4$;
b) $a = 38$; e) $a = -11$;
c) $a = 17$; f) $a = -26$.

2) Presupunem că $n = 4$. Scrieți teorema împărțirii cu rest pentru următoarele numere întregi:

a) $a = 33$; d) $a = -4$;
b) $a = 38$; e) $a = -11$;
c) $a = 17$; f) $a = -26$.

3) Presupunem că $n = 3$. Determinați $\hat{a}$, clasa de resturi modulo 3, dacă:

a) $a = 0$; d) $a = -1$;
b) $a = 1$; e) $a = -2$;
c) $a = 2$. f) $a = -3$.

4) Presupunem că $n = 4$. Determinați $\hat{a}$, clasa de resturi modulo 4, dacă:

a) $a = 0$; e) $a = -1$;
b) $a = 1$; f) $a = -2$;
c) $a = 2$; g) $a = -3$;
d) $a = 3$; h) $a = -4$.

5) Presupunem că $n = 5$. Determinați $\hat{a}$, clasa de resturi modulo 5, dacă:

a) $a = 0$; e) $a = 4$;
b) $a = 1$; f) $a = -1$;
c) $a = 2$; g) $a = -7$;
d) $a = 3$; h) $a = -3$.

6) Arătați că pentru $n = 4$:

a) $\widehat{20} = \widehat{36}$;
b) $\hat{5} = \hat{9}$;
c) $\widehat{-2} = \widehat{18}$.

Teorema 1. Fie $n > 0$ un număr întreg fixat și $a, b \in \mathbb{Z}$. Avem:

(1) $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a \in \hat{b} \Leftrightarrow n$ divide pe $a - b$.

(2) Dacă $r = a \bmod n$, atunci $\hat{a} = \hat{r}$.

(3) Clasele de resturi $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}$ sunt distincte.

Demonstrație.

(1) Cum $a \in \hat{a}$, din $\hat{a} = \hat{b}$ rezultă $a \in \hat{b}$.

Reciproc, dacă $a \in \hat{b}$, atunci $a = nt + b$ cu $t \in \mathbb{Z}$. Pentru $x \in \hat{a}$, $x = ns + a$ avem $x = n(s+t) + b \in \hat{b}$, deci $\hat{a} \subseteq \hat{b}$. Cum $b = n(-t) + a \in \hat{a}$, avem și $\hat{b} \subseteq \hat{a}$, deci $\hat{a} = \hat{b}$.

În fine avem:

$a \in \hat{b} \Leftrightarrow a = nt + b$ cu $t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b = nt \Leftrightarrow n \mid (a - b)$.

(2) Fie $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = nq + r$, $0 \le r < n$.

Rezultă că $a \in \hat{r}$, deci $\hat{a} = \hat{r}$ conform punctului (1)

(3) Dacă $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$ cu $r_1, r_2 \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$ rezultă că $n \mid (r_1 - r_2)$ și cum $|r_1 - r_2| < n$, avem $r_1 = r_2$. ■

EXEMPLE

Presupunem că $n = 5$.

1) Avem $\widehat{27} = \widehat{12}$ pentru că $27 - 12 = 15$ se divide prin $n = 5$. De asemenea $\widehat{-13} = \hat{7}$ pentru că $-13 - 7 = -20$ se divide prin $n = 5$.

2) $\widehat{27} = \hat{2}$ și $\widehat{-32} = \hat{3}$ pentru că $2 = 27 \bmod 5$ și $3 = (-32) \bmod 5$.

3) Avem $\hat{1} \ne \hat{3}$ pentru că $1, 3 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și $1 \ne 3$.

Observație. Dacă $\hat{a} \ne \hat{b}$, atunci $\hat{a} \cap \hat{b} = \varnothing$.

Într-adevăr dacă $\hat{a} \cap \hat{b} \ne \varnothing$ și $c \in \hat{a} \cap \hat{b}$, atunci conform Teoremei 1, punctul (1) avem $\hat{a} = \hat{c} = \hat{b}$.

Dacă n este un număr întreg pozitiv, notăm cu $\mathbb{Z}_n$ mulțimea claselor de resturi modulo n,

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Cum resturile posibile la împărțirea prin n ale numerelor $a \in \mathbb{Z}$ sunt $0, 1, 2, ..., n - 1$ și cum pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ avem $\hat{a} = \hat{r}$, unde $r = a \bmod n$, rezultă că

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}.$$

Numerele $0, 1, 2, ..., n - 1$ sunt numite reprezentanții *canonici* ai claselor de resturi modulo n. Conform Teoremei 1, punctul (3), clasele de resturi $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}$ sunt distincte, deci mulțimea $\mathbb{Z}_n$ are n elemente.

EXEMPLE

1) Când $n = 5$ avem $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și $\widehat{13} = \hat{3}$, $-\widehat{27} = \hat{3}$ pentru că $3 = 13 \bmod 5$ și $3 = (-27) \bmod 5$.

2) Când $n = 9$ avem $\mathbb{Z}_9 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}\}$ și $-\hat{5} = \hat{4}$, $\widehat{23} = \hat{5}$, $-\widehat{29} = \hat{7}$ pentru că $4 = (-5) \bmod 9$, $5 = 23 \bmod 9$ și $7 = (-29) \bmod 9$.

Aplicație. *Problema determinării datei Duminicii Paștelui* a preocupat și pe Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

La primul Sinod ecumenic de la Niceea (în anul 325) s-a convenit că la determinarea datei primei zile de Paște se va ține seama de mai mulți factori astronomici: să fie prima duminică după Luna plină (fazele Lunii se repetă la 19 ani), să fie prima duminică după echinocțiul de primăvară (situație ce se repetă la 28 de ani) și să îndeplinească și alte condiții suplimentare.

Pentru a determina data x a primei zile de Paște într-un anumit an N după procedeul lui C. Gauss, se calculează resturile unor împărțiri astfel:

$a \equiv N \pmod{19}$, $b \equiv N \pmod 4$,

$c \equiv N \pmod 7$, $d \equiv (19a + 15) \bmod 30$,

$e \equiv (2b + 4c + 6d + 6) \bmod 7$. Data căutată este suma: $x = d + e + 4$. Dacă $x \leqslant 30$, această dată se referă la o duminică din aprilie, iar dacă $x > 30$ cifra unităților sumei obținute reprezintă o duminică din mai.

De exemplu, pentru anul 2007:

$a \equiv 2007 \pmod{19} = 12$;

$b \equiv 2007 \pmod 4 = 3$;

$c \equiv 2007 \pmod 7 = 5$;

$d \equiv (19 \cdot 12 + 15) \bmod 30 = 3$;

$e \equiv (6 + 20 + 18 + 6) \bmod 7 = 50 \pmod 7 = 1$.

Obținem $x = 3 + 1 + 4 = 8$. Cum $x \leqslant 30$, Duminica Paștelui în anul 2007 a fost pe data de 8 aprilie.

Determinați data primei zile de Paște prin procedeul lui Gauss pentru:

a) anul 2008; b) anul 2009;

c) anul 2010; d) anul 2020.

7) Enumerați elementele fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

a) $\mathbb{Z}_3$; d) $\mathbb{Z}_6$;

b) $\mathbb{Z}_4$; e) $\mathbb{Z}_7$;

c) $\mathbb{Z}_5$; f) $\mathbb{Z}_8$.

Operații cu clase de resturi modulo *n*

Definiție. Fie $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n și $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$. Definim *suma* $\hat{a}+\hat{b}$ și *produsul* $\hat{a}\hat{b}$ astfel $\hat{a}+\hat{b} \overset{\text{def}}{=} \widehat{a+b}$ și $\hat{a}\hat{b} \overset{\text{def}}{=} \widehat{ab}$.

Așadar clasa sumă $\hat{a}+\hat{b}$ (respectiv clasa produs $\hat{a}\hat{b}$) este egală cu clasa modulo n a sumei uzuale $a + b$ (respectiv clasa modulo n a produsului uzual ab).

Reprezentantul canonic pentru clasa sumei $\widehat{n+b}$ (clasa produs $\widehat{ab}$) se află înlocuind pe $a + b$ cu $(a + b)$ mod n (respectiv pe ab cu (ab) mod n)

Se obțin astfel două legi de compoziție pe $\mathbb{Z}_n$,

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ (\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a}+\hat{b} = \widehat{a+b}$$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ (\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a}\hat{b} = \widehat{ab}$$

numite *adunarea*, respectiv *înmulțirea* claselor de resturi modulo n.

EXEMPLE

1) Dacă $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_5$, $\hat{a} = \hat{3}$, $b = \hat{4}$, atunci

$\hat{a}+\hat{b} = \hat{3}+\hat{4} = \widehat{3+4} = \hat{7} = \hat{2}$ pentru că $2 = 12$ mod 5 și

$\hat{a}\hat{b} = \hat{3}\cdot\hat{4} = \widehat{12} = \hat{2}$ pentru că $2 = 12$ mod 5.

2) În $\mathbb{Z}_8$ avem $\hat{4}+\hat{6} = \widehat{10} = \hat{2}$ și $\hat{4}\cdot\hat{6} = \widehat{24} = \hat{0}$ pentru că $2 = 10$ mod 8 și $0 = 24$ mod 8.

Observație. Fie $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, $a' \in \hat{a}$ și $b' \in \hat{b}$.

Avem $a' = ns + a$, $b' = nt + b$ cu $s, t \in \mathbb{Z}$. Cum

$$a' + b' = n(s+t) + a + b \in \widehat{a+b} \text{ și}$$

$$a'b' = n(nst + sb + ta) + ab \in \widehat{ab}$$

rezultă că $\widehat{a'+b'} = \widehat{a+b}$ și $\widehat{a'b'} = \widehat{ab}$ (vezi Teorema 1).

Pe de altă parte $\hat{a}' = \hat{a}$ și $\hat{b}' = \hat{b}$. Așadar, clasa sumă (respectiv produs) pentru $\hat{a} = \hat{a}'$ și $\hat{b} = \hat{b}'$ nu depinde de reprezentanții a, b sau a', b' folosiți în construcția acesteia. Astfel în $\mathbb{Z}_7$ avem $-18 \in \hat{3}$ și $27 \in \hat{6}$, deci $\widehat{-18} = \hat{3}$ și $\widehat{27} = \hat{6}$. Calculăm

$$\hat{3}+\hat{6} = \widehat{3+6} = \hat{9} = \hat{2}$$

$$\hat{3}\cdot\hat{6} = \widehat{3\cdot 6} = \widehat{18} = \hat{4}$$

Pe de altă parte,

$$\hat{3}+\hat{6} = \widehat{-18}+\widehat{27} = \widehat{(-18)+27} = \hat{9} = \hat{2} \text{ și}$$

$$\hat{3}\cdot\hat{6} = \widehat{-18}\cdot\widehat{27} = \widehat{(-18)\cdot 27} = \widehat{-486} = \hat{4}$$

Cum $\mathbb{Z}_n$ este mulțime finită, adunarea (respectiv înmulțirea) claselor de resturi modulo n poate fi descrisă cu ajutorul tablei Cayley.

8) Completați tablele adunării și înmulțirii claselor de resturi modulo 4.

9) Verificați dacă tablele următoare reprezintă tablele adunării și înmulțirii modulo 6.

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

$\bullet$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

10) Fie $n = 7$, $a = -16$, $b = 32$ calculați suma și produsul claselor de resturi $\hat{a} = \widehat{-16}$ și $\hat{b} = \widehat{32}$ din $\mathbb{Z}_7$, prin două metode.

Metoda 1.

Vom folosi reprezentanți canonici pentru clase.

$-16 = 7 \cdot (-3) + 5$ și $32 = 7 \cdot 4 + 4$.

Resturile împărțirii prin 7 ale lui -16 și 32 sunt 5, respectiv 4. Avem:

$\widehat{-16}+\widehat{32} = \hat{5}+\hat{4} = \widehat{5+4} = \hat{2}$ și

$\widehat{-16}\cdot\widehat{32} = \hat{5}\cdot\hat{4} = \widehat{5\cdot 4} = \hat{6}$ pentru că $9 = 7 \cdot 1 + 2$ și $20 = 7 \cdot 2 + 6$.

Metoda 2.

$\widehat{-16}+\widehat{32} = \widehat{-(16)+32} = \widehat{16} = \hat{2}$, pentru că $16 = 7 \cdot 2 + 2$ și

$\widehat{-16}\cdot\widehat{32} = \widehat{(-16)\cdot 32} = \widehat{-512} = \hat{6}$, pentru că $-512 = 7 \cdot (-74) + 6$.

Pentru $n = 7$, $a = 16$ și $b = -32$ calculați produsul claselor de resturi $\hat{a} = \widehat{16}$ și $\hat{b} = \widehat{-32}$ din $\mathbb{Z}_7$.

EXEMPLU Tablele Cayley pentru adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo 5 sunt:

$+$	$\hat 0$	$\hat 1$	$\hat 2$	$\hat 3$	$\hat 4$
$\hat 0$	$\hat 0$	$\hat 1$	$\hat 2$	$\hat 3$	$\hat 4$
$\hat 1$	$\hat 1$	$\hat 2$	$\hat 3$	$\hat 4$	$\hat 0$
$\hat 2$	$\hat 2$	$\hat 3$	$\hat 4$	$\hat 0$	$\hat 1$
$\hat 3$	$\hat 3$	$\hat 4$	$\hat 0$	$\hat 1$	$\hat 2$
$\hat 4$	$\hat 4$	$\hat 0$	$\hat 1$	$\hat 2$	$\hat 3$

$\cdot$	$\hat 0$	$\hat 1$	$\hat 2$	$\hat 3$	$\hat 4$
$\hat 0$	$\hat 0$	$\hat 0$	$\hat 0$	$\hat 0$	$\hat 0$
$\hat 1$	$\hat 0$	$\hat 1$	$\hat 2$	$\hat 3$	$\hat 4$
$\hat 2$	$\hat 0$	$\hat 2$	$\hat 4$	$\hat 1$	$\hat 3$
$\hat 3$	$\hat 0$	$\hat 3$	$\hat 1$	$\hat 4$	$\hat 2$
$\hat 4$	$\hat 0$	$\hat 4$	$\hat 3$	$\hat 2$	$\hat 1$

În continuare prezentăm principalele proprietăți ale operațiilor cu clase de resturi modulo n.

Ele sunt consecințe ale proprietăților similare ale adunării și înmulțirii numerelor întregi.

Teorema 2. Adunarea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite ca element pentru $\hat 0$ și orice clasă $\hat a \in \mathbb{Z}_n$ are ca opusă pe $-\hat a$. Așadar:

(1) $\forall \hat a, \hat b, \hat c \in \mathbb{Z}_n$, $(\hat a+\hat b)+\hat c=\hat a+(\hat b+\hat c)$

(2) $\forall \hat a, \hat b \in \mathbb{Z}_n$, $\hat a+\hat b=\hat b+\hat a$

(3) $\forall \hat a \in \mathbb{Z}_n$, $\hat a+\hat 0=\hat 0+\hat a=\hat a$

(4) $\forall \hat a \in \mathbb{Z}_n$, $\hat a+\widehat{-a}=\widehat{-a}+\hat a=\hat 0$, adică $-\hat a=\widehat{-a}$.

Demonstrație.

(1) Folosind definiția adunării claselor de resturi modulo n, avem:

$$(\hat a+\hat b)+\hat c=\widehat{a+b}+\hat c=\widehat{(a+b)+c}=\hat a+\widehat{b+c}=\hat a+(\hat b+\hat c)$$

(3) Avem $\hat a+\hat 0=\widehat{a+0}=\hat a$ și analog $\hat 0+\hat a=\hat a$.

(4) Avem $\hat a+\widehat{-a}=\widehat{a+(-a)}=\hat 0$ și analog $\widehat{-a}+\hat a=\hat 0$.

Așadar $\hat a$ are opusă și $-\hat a=\widehat{-a}$. ■

EXEMPLU Folosind tabla adunării claselor de resturi modulo 5 se observă că $\hat 0+\hat 0=\hat 0, \hat 1+\hat 4=\hat 0$ și $\hat 2+\hat 3=\hat 0$. Rezultă: $-\hat 0=\hat 0$, $-\hat 1=\hat 4=\widehat{-1}$, $-\hat 4=\hat 1=\widehat{-4}$, $-\hat 2=\hat 3=\widehat{-2}$ și $-\hat 3=\hat 2=\widehat{-3}$.

Teorema 3. Înmulțirea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite pe $\hat 1$ ca element neutru și este distributivă față de adunare.
Așadar:

(1) $\forall \hat a, \hat b, \hat c \in \mathbb{Z}_n$, $(\hat a\hat b)\hat c=\hat a(\hat b\hat c)$

(2) $\forall \hat a, \hat b \in \mathbb{Z}_n$, $\hat a\hat b=\hat b\hat a$

(3) $\forall \hat a \in \mathbb{Z}_n$, $\hat 1\hat a=\hat a\hat 1=\hat a$

(4) $\forall \hat a, \hat b, \hat c \in \mathbb{Z}_n$, $\hat a(\hat b+\hat c)=\hat a\hat b+\hat a\hat c$.

11) Pentru $n=6$, $a=-15$, $b=-16$ calculați suma și produsul claselor de resturi $\hat a=\widehat{-15}$ și $\hat b=\widehat{-16}$ din $\mathbb{Z}_6$.

12) Pentru $n=6$, $a=4$, $b=20$, $c=23$ calculați:

a) $\hat a+\hat b$ și $\hat b+\hat a$; ce observați?

b) $(\hat a+\hat b)+\hat c$ și $\hat a+(\hat b+\hat c)$; ce observați?

c) $\hat a\cdot\hat b$ și $\hat b\cdot\hat a$; ce observați?

d) $(\hat a\hat b)\hat c$ și $\hat a(\hat b\hat c)$; ce observați?

e) $\hat a(\hat b+\hat c)$ și $\hat a\hat b+\hat a\hat c$; ce observați?

13) Pentru $n=5$, $a=-12$, $b=7$, $c=-36$ calculați:

a) $\hat a+\hat b$ și $\hat b+\hat a$; ce observați?

b) $(\hat a+\hat b)+\hat c$ și $\hat a+(\hat b+\hat c)$; ce observați?

c) $\hat a\cdot\hat b$ și $\hat b\cdot\hat a$; ce observați?

d) $(\hat a\hat b)\hat c$ și $\hat a(\hat b\hat c)$; ce observați?

e) $\hat a(\hat b+\hat c)$ și $\hat a\hat b+\hat a\hat c$; ce observați?

14) Calculați următorii determinanți:

a) $\begin{vmatrix} \hat 3 & \hat 2 & \hat 1 \\ \hat 2 & \hat 1 & \hat 3 \\ \hat 1 & \hat 2 & \hat 3 \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_5$;

b) $\begin{vmatrix} \hat 2 & \hat 1 & \hat 0 \\ \hat 1 & \hat 2 & \hat 3 \\ \hat 4 & \hat 8 & \hat 1 \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_{17}$.

15) Calculați A^3 dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$,

$$A=\begin{pmatrix} \hat 4 & \hat 1 & \hat 2 \\ \hat 1 & \hat 2 & \hat 1 \\ \hat 5 & \hat 1 & \hat 0 \end{pmatrix}.$$

16) Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$,

$$A=\begin{pmatrix} \hat 1 & \hat 2 \\ \hat 0 & \hat 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculați $\det A$ în $\mathbb{Z}_3$.

b) Calculați A^2 în $\mathbb{Z}_3$.

c) Arătați că $A^2-I_2=\begin{pmatrix} \hat 0 & \hat 1 \\ \hat 0 & \hat 0 \end{pmatrix}$, în $\mathbb{Z}_3$.

Demonstrație.

(2) $\hat{a}\hat{b} = \widehat{ab} = \widehat{ba} = \hat{b}\hat{a}$

(4) $\hat{a}(\hat{b}+\hat{c}) = \hat{a}\widehat{b+c} = \widehat{a(b+c)} = \widehat{ab+ac} = \widehat{ab}+\widehat{ac} = \hat{a}\hat{b}+\hat{a}\hat{c}$.

Demonstrați afirmațiile (1) și (3) din teoremă. ■

Clase de resturi inversabile

Definiție. Fie a și b două numere întregi. Un număr $d \in \mathbb{Z}$, $d \geqslant 0$ se numește *cel mai mare divizor comun* (pe scurt, c.m.m.d.c.) al lui a și b dacă verifică condițiile:

(1) $d \mid a$ și $d \mid b$

(2) dacă $c \mid a$ și $c \mid b$, atunci $c \mid d$.

Dacă $d' \in \mathbb{Z}$, $d' \geqslant 0$ verifică de asemenea (1) și (2) atunci $d' \mid d$ și $d \mid d'$, de unde $d = d'$.

Așadar c.m.m.d.c. al lui a și b, în caz că există, este unic și folosim notația $d = (a, b)$.

Observație. Dacă renunțăm la condiția $d \geqslant 0$, atunci c.m.m.d.c. este unic determinat, mai puțin semnul. Astfel, 2 și –2 servesc ca c.m.m.d.c. pentru 6 și 10.

Evident, dacă $a \mid b$, atunci $a = (a, b)$. În particular, cum $a \mid 0$, avem $a = (a, 0)$. De asemenea, $0 = (0, 0)$.

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ și

$$M \overset{\text{def}}{=} \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Cum $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$ și $b = a \cdot 0 + b \cdot 1$, avem $a, b \in M$ și în particular M conține numere întregi nenule. Dacă $z = ax + by \in M$, $z \neq 0$, atunci $-z = a(-x) + b(-y) \in M$ și deci M conține numere întregi strict pozitive. Fie $M^+ = \{z \in M \mid z > 0\}$

și $d \in M^+$, cel mai mic număr din M^+ astfel încât $d = au + bv$ cu $u, v \in \mathbb{Z}$. Evident d verifică condiția (2) din definiția c.m.m.d.c. Arătăm că d verifică și condiția (1). Dacă $d \nmid a$, atunci $a = dq + r$ cu $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 < r < d$. Cum $r = a - dq = a - (au + bv)q = a(1 - uq) + b(-vq) \in M^+$ se contrazice minimalitatea lui d în M^+. Rămâne adevărat că $d \mid a$ și analog se arată că $d \mid b$.

Am demonstrat astfel teorema următoare.

Teorema 4. Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$ există c.m.m.d.c. al lui a și b. Mai mult, dacă $d = (a, b)$, atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = au + bv$.

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Spunem că a este *prim* cu b sau că a și b sunt *relativ prime* dacă c.m.m.d.c. al lui a și b este egal cu 1, adică $(a, b) = 1$. ■

Acum putem demonstra următoarea teoremă.

Teorema 5. Fie $n > 1$ și $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$. Atunci $\hat{a}$ este inversabilă în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo n dacă și numai dacă a este prim cu n.

17) a) Arătați, utilizând tabla operației, că $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}$ sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea modulo 7.

b) Arătați că nu toate elementele $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea modulo 8.

Indicație.

a) Elementul neutru al înmulțirii modulo 7 pe $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ este 1.

$\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{2}^{-1} = \hat{4}, \ldots$

b) În $\mathbb{Z}_8$ elementele $\hat{2}$, $\hat{4}$ și $\hat{6}$ nu sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea.

18) Determinați prin încercări soluțiile din $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ ale fiecăreia din ecuațiile următoare:

a) $x + \hat{3} = \hat{2}$,

b) $x \cdot x = \hat{4}$.

19) Folosind tabla înmulțirii claselor de resturi modulo 6, determinați soluțiile din $\mathbb{Z}_6$ ale fiecăreia dintre ecuațiile:

a) $\hat{5}x = \hat{2}$; b) $\hat{4}x = \hat{2}$; c) $\hat{2}x = \hat{3}$.

20) Rezolvați în $\mathbb{Z}_7$ fiecare dintre ecuațiile:

a) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{0}$; b) $\hat{3}x + \hat{5} = \hat{0}$.

21) Arătați că $\hat{a}(\hat{a}+\hat{1})(\hat{a}+\hat{2}) = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.

22) Determinați $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât $x = \hat{2}$ să fie soluție din $\mathbb{Z}_5$ a ecuației $\hat{3}x^2 + \hat{2}x + \hat{a} = \hat{0}$.

23) Determinați $m \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât ecuația $\hat{2}x^2 + x + \hat{m} = \hat{0}$ să aibă soluții.

24) Rezolvați sistemele următoare:

a) $\begin{cases} x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{4}x - y = \hat{2} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_5$;

b) $\begin{cases} \hat{3}x - \hat{4}y = \hat{2} \\ \hat{4}x - \hat{3}y = \hat{3} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_7$.

Demonstrație. Presupunem că există $\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$. Avem $\widehat{ab} = \hat{1}$, deci n divide pe $1 - ab$. Există deci $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 - ab = nq$. Cum $1 = ab + nq$, orice divizor comun al lui a și n este divizor al lui 1. Rezultă că $(a, n) = 1$.

Reciproc, presupunem că $(a, n) = 1$. Există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = au + nv$. Cum $\hat{n} = \hat{0}$ și $\hat{1} = \widehat{au + nv} = \widehat{au} + \widehat{nv} = \hat{a}\hat{u} + \hat{n}\hat{v} = \hat{a}\hat{u}$, rezultă că $\hat{a}$ este inversabilă și $\hat{a}^{-1} = \hat{u}$. ■

EXEMPLE

1) Numerele $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ prime cu $n = 5$ sunt 1, 2, 3, 4. Rezultă că $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ și $\hat{4}$ din $\mathbb{Z}_5$ sunt inversabile în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo 5. Din tabla înmulțirii pentru clasele de resturi din $\mathbb{Z}_5$, se constată că: $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{2}^{-1} = \hat{3}, \hat{3}^{-1} = \hat{2}$ și $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$ pentru că $\hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}, \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$ și $\hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{1}$.

2) Numerele $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ prime cu $n = 9$ sunt 1, 2, 4, 5, 7 și 8. Rezultă că în $\mathbb{Z}_9$, clasele de resturi inversabile sunt: $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}$ și $\hat{8}$. Din tabla înmulțirii pentru clasele de resturi din $\mathbb{Z}_9$ se constată că: $\hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}, \hat{2} \cdot \hat{5} = \hat{1}, \hat{4} \cdot \hat{7} = \hat{1}$ și $\hat{8} \cdot \hat{8} = \hat{1}$ de unde $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{2}^{-1} = \hat{5}, \hat{5}^{-1} = \hat{2}, \hat{4}^{-1} = \hat{7}, \hat{7}^{-1} = \hat{4}$ și $\hat{8}^{-1} = \hat{8}$.

25) a) Arătați că ecuația $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ nu admite soluții în $\mathbb{Z}_3$.
b) Determinați soluțiile din $\mathbb{Z}_5$ ale ecuației $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$.

26) a) Determinați elementele inversabile ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.
b) Determinați elementele inversabile ale lui $\mathbb{Z}_8$ în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo 8.
c) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8$ considerăm legea de compoziție „∗“ prin $(x, \hat{a}) * (y, \hat{b}) \stackrel{\text{def}}{=} (xy, \hat{a}\hat{b})$.
i) Arătați că legea de compoziție „∗“ este asociativă, comutativă și admite ca element neutru pe $(1, \hat{1})$.
ii)Enumerați elementele lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8$ simetrizabile în raport cu legea de compoziție „∗“.

Aplicații în Aritmetică: calculul restului

a) Dacă $\hat{a} = \hat{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $\widehat{a^k} = \widehat{b^k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
b) Aflați restul împărțirii prin 7 al numărului $a = 23^{52}$.
c) În $\mathbb{Z}_7$ calculați $\hat{2}^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ și dați o altă rezolvare pentru b).

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Soluții. a) Proprietatea este evidentă pentru $k = 1$. Presupunem $k > 1$ și $\widehat{a^{k-1}} = \widehat{b^{k-1}}$. Înmulțind termen cu termen ultima relație cu $\hat{a} = \hat{b}$ se obține $\widehat{a^k} = \widehat{b^k}$.

b) Avem $\widehat{23} = \hat{2}$ în $\mathbb{Z}_7$ și aplicând punctul a) rezultă că $\widehat{23^{52}} = \widehat{2^{52}}$, deci numărul $b = 2^{52}$ dă același rest prin împărțirea cu 7 ca numărul $a = 23^{52}$. Dar $2^3 = 8$ și $\hat{8} = \hat{1}$. Avem $52 = 3 \cdot 17 + 1$, de unde $2^{52} = (2^3)^{17} \cdot 2 = 8^{17} \cdot 2$. Din $\hat{8} = \hat{1}$, rezultă $\widehat{8^{17}} = \hat{1}$, $\widehat{8^{17}} \cdot \hat{2} = \hat{2}$. Așadar $\widehat{2^{52}} = \hat{2}$ și numărul $a = 23^{52}$ dă restul 2 la împărțirea prin 7.

c) Avem $\hat{2}^2 = \widehat{2 \cdot 2} = \hat{4}$, $\hat{2}^3 = \hat{2}^2\hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{8} = \hat{1}$, $\hat{2}^4 = \hat{2}^3\hat{2} = \hat{1} \cdot \hat{2} = \hat{2}$ etc. Observăm că $\widehat{23} = \hat{2}$ și deci $\hat{a} = \widehat{23^{52}} = \widehat{23}^{52} = \hat{2}^{52} = \hat{2}^{3 \cdot 17 + 1} = \left(\hat{2}^3\right)^{17} \cdot \hat{2}^1 = \hat{1}^{17} \cdot \hat{2} = \hat{2}$. Restul împărțirii lui a prin 7 este egal cu 2.

Exerciții rezolvate.

1) *Adunarea și înmulțirea modulo n.*

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ și $T_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$, $a, b \in T_n$; $a + b$ și ab sunt suma, respectiv produsul lor ca numere naturale. *Suma modulo n* a lui a cu b, notată $a \oplus b$ și *produsul modulo n* al lui a cu b, notat $a \otimes b$, sunt prin definiție restul împărțirii prin n al lui $a + b$, respectiv ab. Cum restul împărțirii prin n aparține lui T_n, obținem două legi de compoziție pe T_n, $\oplus$ și $\otimes$ numite *adunarea modulo n*, respectiv *înmulțirea modulo n*.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

De exemplu, pentru $n = 5$, $T_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Restul împărțirii prin 5 al lui $3 + 4 = 7$ este 2, iar cel al lui $3 \times 4 = 12$ este 2. Așadar, $3 \oplus 4 = 2$, $3 \otimes 4 = 2$; deci suma modulo 5 a lui 3 cu 4 este egală cu 2 și produsul modulo 5 al lui 3 cu 4 este egal cu 2.

Calculați elementele simetrizabile din $(T_5, \oplus)$ și din $(T_5, \otimes)$.

Soluție. Căutăm în tablele operațiilor de adunare și înmulțire ale lui T_5 acele elemente din care, prin compunere, putem obține elementul neutru. Elementele simetrizabile din $(T_5, \oplus)$ sunt 0, 1, 2, 3, 4 iar din $(T_5, \otimes)$ sunt 1, 2, 3, 4.

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

2) Pe tablele operațiilor de înmulțire ale claselor de resturi modulo 5 și modulo 6, identificați clasele de resturi inversabile și precizați care sunt inversele lor.

Soluție. Din modul cum se completează tabla unei legi de compoziție, rezultă că o clasă de resturi $\hat{a}$ este inversabilă dacă și numai dacă pe linia lui $\hat{a}$ se află $\hat{1}$ și atunci $\hat{a}^{-1}$ este clasa care servește de etichetă pentru coloana în care se găsește $\hat{1}$.

Din tablele operațiilor deducem că:

(i) $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}_5$ și $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{2}^{-1} = \hat{3}$, $\hat{3}^{-1} = \hat{2}$, $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$.

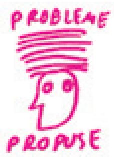
(ii) $\hat{1}$ și $\hat{5}$ sunt inversabile în raport cu înmulțirea din $\mathbb{Z}_6$ și $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$.

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

3) Precizați clasele inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$ și inversele lor.

Soluție. Folosind reprezentanții canonici, elementele lui $\mathbb{Z}_{12}$ sunt clasele $\hat{a}$ cu $0 \leqslant a < 12$.

Avem $(a, 12) = 1 \Leftrightarrow a \in \{1, 5, 7, 11\}$. În tabla înmulțirii din $\mathbb{Z}_{12}$, găsim $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$, $\hat{7}^{-1} = \hat{7}$ și $\widehat{11}^{-1} = \widehat{11}$.



● **1.** Arătați că
$4\hat{a} = \hat{a} + \hat{a} + \hat{a} + \hat{a} = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_4$.
Mai general, $n\hat{a} = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_n$.

● **2.** Determinați clasele inversabile față de înmulțirea din $\mathbb{Z}_8$ și aflați inversele lor.

● **3.** Rezolvați în $\mathbb{Z}_8$ ecuația $\hat{4}x^4 + \hat{4}x = \hat{0}$.

● **4.** a) Calculați suma tuturor claselor de resturi din $\mathbb{Z}_4$, apoi din $\mathbb{Z}_5$.
b) Dacă n este impar, atunci în $\mathbb{Z}_n$ avem
$\hat{1} + \hat{2} + ... + \widehat{n-1} = \hat{0}$.

● **5.** Arătați că $10^k - 1$ se divide prin 9, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Deduceți că un număr natural $n \neq 0$ se divide prin 3 (respectiv 9) dacă și numai dacă suma cifrelor sale se divide prin 3 (respectiv 9).

● **6.** Aflați restul împărțirii prin 5 al lui $a = 373^{62}$.

● **7.** Fie $\hat{2} \in \mathbb{Z}_{10}$. Calculați succesiv puterile $\hat{2}^2, \hat{2}^3, ...$ și arătați că există $s, t \in \mathbb{N}^*$, $s < t$ astfel încât $\hat{2}^s = \hat{2}^t$. Calculați apoi $\hat{2}^{37}$.
Arătați că oricare ar fi $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$, există $s, t \in \mathbb{N}^*$, $s < t$ astfel încât $\hat{a}^s = \hat{a}^t$.

●●● **8.** Fie $a \in \mathbb{N}$ care în reprezentarea zecimală are cifrele c_0, c_1, c_2.
Arătați că a se divide prin 11 dacă și numai dacă $c_0 - c_1 + c_2$ se divide prin 11. Generalizare.

●● **9.** Fie $\hat{7} \in \mathbb{Z}_{10}$. Calculați succesiv puterile $\hat{7}^2, \hat{7}^3, ...$ și arătați că există $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\hat{7}^m = \hat{1}$. Calculați apoi $\hat{7}^{82}$.
Arătați că dacă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ și $\hat{a}$ este inversabilă, există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\hat{a}^m = \hat{1}$.

●● **10.** Fie $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$. Spunem că $\hat{a}$ este nilpotentă dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ cu $\hat{a}^m = \hat{0}$.
Determinați clasele nilpotente din $\mathbb{Z}_8$ și $\mathbb{Z}_{12}$.
Arătați că $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este nilpotentă dacă și numai dacă a se divide cu toți divizorii primi ai lui n.

●● **11.** Un număr natural $p > 1$ este prim dacă și numai dacă înmulțirea din $\mathbb{Z}_p$ are proprietatea:
$\widehat{ab} = \hat{0} \Rightarrow \hat{a} = \hat{0}$ sau $\hat{b} = \hat{0}$.

●● **12.** Arătați că $\hat{a}^2 \neq \hat{2}$, $\forall\ \hat{a} \in \mathbb{Z}_3$. Demonstrați că ecuația $3x^2 + 2 = y^2$ nu are soluții întregi.

●● **13.** Determinați valorile posibile pentru $\hat{a}^3$ când $\hat{a} \in \mathbb{Z}_7$. Arătați că $7x^3 + 2 = y^3$ nu are soluții întregi.

Grupuri

Algebra modernă are ca obiect studiul structurilor algebrice. O *structură algebrică* este formată din una sau mai multe mulțimi nevide înzestrate cu legi de compoziție care verifică o listă specifică de proprietăți, numite *axiomele structurii*. În acest capitol ne vom ocupa de structuri algebrice formate dintr-o mulțime nevidă G și o lege de compoziție (internă) „$*$“ definită pe G, care este asociativă, are element neutru și toate elementele din G sunt simetrizabile. O astfel de structură algebrică se numește *grup*. Renunțând la cerința ca toate elementele lui G să fie simetrizabile, se obține o structură algebrică mai generală, anume structura de *monoid*.

Definiția grupului

Noțiunea de *grup* ocupă un loc central printre structurile algebrice. Teoria grupurilor a apărut ca urmare a studiului compunerii *funcțiilor bijective (permutări) ale unei mulțimi în ea însăși*.

Definiția explicită a structurii de grup este următoarea:

Definiție.

Un cuplu $(G, *)$, format cu o mulțime nevidă G și cu o lege de compoziție „$*$“ pe G, se numește *grup* dacă sunt verificate următoarele condiții:

G_1. $\forall\, x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

G_2. $\exists\, e \in G$, astfel încât $e * x = x * e = x, \forall\, x \in G$.

G_3. $\forall\, x \in G, \exists\, x' \in G$ cu $x' * x = x * x' = e$.

Dacă, în plus, este verificată și axioma

G_4. $\forall\, x, y \in G, x * y = y * x$,

atunci G se numește *grup comutativ* sau *grup abelian*.

Elementul e din axioma G_2 se numește *element neutru*.

Elementul x' din G_3 depinde de x și se numește *simetricul lui x*.

Denumirea de grup abelian s-a dat în onoarea matematicianului norvegian N.H. Abel (1802-1829) care a studiat grupurile comutative în legătură cu rezolvarea ecuațiilor algebrice.

Ansamblul de condiții G_1, G_2, G_3 se numesc *axiomele grupului*.

Observații.

♦ Elementul neutru al unui grup este unic.

♦ Elementul x', a cărui existență este asigurată de axioma G_3, este unic determinat de x.

Dacă operația grupului este notată aditiv, atunci elementul neutru se notează cu 0 și se numește *zero*; în terminologie multiplicativă, elementul neutru se numește *unitate* și se notează cu 1.

În notație multiplicativă simetricul elementului x se notează x^{-1} și este numit *inversul lui x*, iar în notația aditivă simetricul unui element x se notează $-x$ și se numește *opusul lui x*.

Remarcă. Uneori cuplul $(G, *)$ se notează tot cu G, urmând ca cititorul să deducă din context la ce se face referire. Dacă pentru legea de compoziție a grupului G se folosește una dintre notațiile $+, \cdot, \circ$ etc., atunci în loc de $(G, *)$ scriem $(G, +)$, $(G, \cdot)$, $(G, \circ)$ etc.

Determinarea și verificarea proprietăților unor structuri algebrice.

1) Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „$*$“: $x * y = x + y - 2$.

Arătați că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

2) Pe intervalul $G = (5, \infty)$, definim $x * y = xy - 5x - 5y + 30, \forall\ x, y \in G$.

Arătați că:

a) dacă $x, y \in G$, atunci $x * y \in G$;

b) $(G, *)$ este grup abelian.

3) Fie G mulțimea matricelor $A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, unde $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 1 & -\frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Arătați că: a) $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

4) Precizați care este elementul neutru și care sunt elementele inversabile într-o structură algebrică cu următoarea tablă a operației:

$*$	a	b	c	d
a	c	a	a	b
b	c	b	b	c
c	a	b	c	d
d	c	c	d	d

5) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \alpha x + \alpha y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât „$\circ$“ să definească pe $\mathbb{R}$ o structură de grup abelian.

6) Fie $(M, *)$ un monoid și $U(M)$ mulțimea elementelor simetrizabile numite *unități* ale monoidului M.

Arătați că: a) $e \in U(M)$, unde e este elementul neutru al monoidului M.

O structură algebrică mai generală decât grupul este monoidul.

Definiție. Un cuplu $(M, *)$ format cu o mulțime nevidă M și o lege de compoziție „$*$“ pe M, se numește *monoid* dacă:
M_1: $\forall\, x, y, z \in M$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
M_2: $\exists\, e \in M$ astfel încât $e * x = x * e = x$, $\forall\, x \in M$.

Evident orice grup este monoid, iar un monoid cu toate elementele simetrizabile este grup.

b) Dacă $u, v \in U(M)$, atunci $u * v \in U(M)$ și $u' \in U(M)$, unde u' este simetricul lui u.
c) $(U(M), *)$ este grup numit *grupul unităților* monoidului M.
d) Determinați grupul unităților monoidului $(\mathbb{N}, \cdot)$ și al monoidului $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

7) Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
a) Arătați că $\mathbb{Z}[i]$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe și că $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$ este monoid.
b) Determinați grupul unităților monoidului $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$ și completați tabla înmulțirii acestui grup.

Exemple de grupuri – temă de sinteză

♦ *Grupul aditiv* $(\mathbb{Z}, +)$ *al numerelor întregi*

Adunarea numerelor întregi este asociativă, comutativă, admite pe 0 ca element neutru și orice număr întreg are opus. Rezultă că $(\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian și este cunoscut sub numele de *grupul aditiv al numerelor întregi*.

Analog se constată că $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sunt grupuri abeliene, cunoscute sub numele de *grupul aditiv al numerelor raționale,* respectiv *reale*, *complexe*.

♦ *Grupurile multiplicative* $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Folosim notațiile $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Produsul a două numere diferite de zero este diferit de zero și produsul a două numere raționale (respectiv reale, complexe) este un număr rațional (respectiv real, complex). Deducem că operația de înmulțire a numerelor acționează pe $\mathbb{Q}^*$ (respectiv $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$) ca legi interne de compoziție, evident asociative, comutative și admițând pe 1 ca element neutru. Cum inversul unui număr rațional (respectiv real, complex) diferit de zero există și este tot număr rațional (respectiv real, complex) diferit de zero, conchidem că $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ (respectiv $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$) este grup abelian, numit *grupul multiplicativ al numerelor raționale* (respectiv *reale*, *complexe*) *diferite de zero*.

♦ *Grupul aditiv* $(\mathbb{Z}_n, +)$ *al claselor de resturi modulo n*

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ a claselor de resturi modulo n s-a definit adunarea prin $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$. Adunarea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{0}$ ca element neutru și orice element are opus. Rezultă că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este un grup abelian, numit *grupul aditiv al claselor de resturi modulo n*.

Să observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există cel puțin un grup abelian cu n elemente, de exemplu grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$.

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Tabla adunării în $\mathbb{Z}_5$

♦ *Structura algebrică* $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ *este monoid dar nu este grup.* Vom vedea că $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ este grup dacă și numai dacă n este număr prim.

♦ *Grupul lui Klein*

Fie $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și $\mathscr{F}(A)$ mulțimea funcțiilor $f : A \to A$. Notăm $\mathscr{K} = \{1_A, u, v, w\} \subset \mathscr{F}(A)$, unde 1_A este funcția identică a mulțimii A, iar u, v, w sunt funcțiile din $\mathscr{F}(A)$ definite pentru $\forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin:

$$u(x) = (x_1, -x_2),\ v(x) = (-x_1, x_2),\ w(x) = (-x_1, -x_2).$$

Se verifică faptul că prin compunerea a două funcții din $\mathscr{K}$ se obține tot o funcție din $\mathscr{K}$. De exemplu, avem $u \circ v = w$. Tabla operației induse pe $\mathscr{K}$ de compunerea funcțiilor din $\mathscr{F}(A)$ este prezentată alăturat.

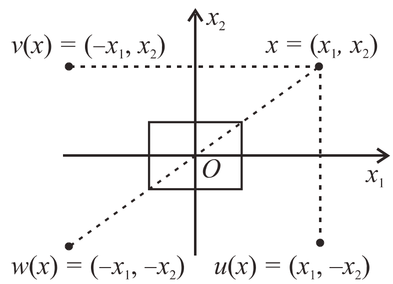
$\circ$	1_A	u	v	w
1_A	1_A	u	v	w
u	u	1_A	w	v
v	v	w	1_A	u
w	w	v	u	1_A

Tabla grupului Klein

Operația indusă pe $\mathscr{K}$ este asociativă (deoarece compunerea funcțiilor este asociativă) și admite pe $1_A \in \mathscr{K}$ ca element neutru. Din tabla operației induse se observă că orice element din $\mathscr{K}$ este simetrizabil în raport cu această operație și anume:

$$1_A^{-1} = 1_A,\ u^{-1} = u,\ v^{-1} = v,\ w^{-1} = w.$$

Așadar $\mathscr{K}$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor și este cunoscut sub numele de *grupul lui Klein*. Din tabla operației se deduce că grupul lui Klein este abelian.



Remarcă. Dacă identificăm punctele unui plan $\mathscr{P}$, raportat la un reper cartezian x_1Ox_2, cu elementele lui $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, atunci u este simetria față de axa absciselor, v este simetria față de axa ordonatelor, iar w este simetria față de origine. Funcțiile 1_A, u, v, w invariază (global) orice dreptunghi cu centrul de simetrie în O și cu laturile paralele cu axele de coordonate.

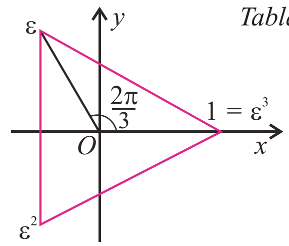
Exemplele ce urmează, sunt propuse cititorului a fi studiate după parcurgerea capitolului „Polinoame”.

♦ *Grupul rădăcinilor de ordin 3 ale unității*

Fie $1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon$ și $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2$ rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Notăm $U_3 = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. Tabla înmulțirii numerelor din U_3 este prezentată alăturat.

$\bullet$	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

Tabla grupului U_3



Rezultă că U_3 este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea. Operația indusă este evident asociativă, comutativă, admite pe $1 \in U_3$ ca element neutru și orice element din U_3 este simetrizabil în raport cu această operație, anume:

$$1^{-1} = 1,\ \varepsilon^{-1} = \varepsilon^2,\ (\varepsilon^2)^{-1} = \varepsilon.$$

Deci U_3 este grup în raport cu înmulțirea numerelor complexe, numit *grupul rădăcinilor de ordin 3 ale unității*.

Elementele lui U_3 se reprezintă în plan ca vârfurile unui triunghi echilateral.

Remarcă. Rădăcinile polinomului $f = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt:

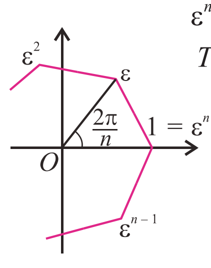
$$1,\ \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},\ \varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n},\ \ldots,$$

$$\varepsilon^{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

$\circ$	1	ε	ε^2	$\ldots$	ε^{n-1}
1	1	ε	ε^2	$\ldots$	ε^{n-1}
ε	ε	ε^2	ε^3	$\ldots$	1
ε^2	ε^2	ε^3	ε^4	$\ldots$	ε
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
ε^{n-1}	ε^{n-1}	1	ε	$\ldots$	ε^{n-2}

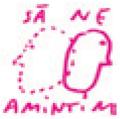
Tabla grupului U_n

Se constată că mulțimea de numere $U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, .., \varepsilon^{n-1}\}$ este stabilă în raport cu înmulțirea numerelor complexe și formează grup în raport cu operația indusă, numit *grupul rădăcinilor de ordin n ale unității*.



Elementele lui U_n se reprezintă în plan ca vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de rază 1.

Reguli de calcul într-un grup



Au fost stabilite deja câteva reguli de calcul pentru elementele unei mulțimi înzestrată cu o lege de compoziție asociativă. În particular, s-au stabilit reguli de calcul privind produsele (sau sumele) iterate. Cum operația unui grup este asociativă, aceste reguli sunt adevărate și pentru grupuri.

Calculul algebric într-un grup beneficiază de reguli noi care, în esență, sunt consecințe ale faptului că orice element este simetrizabil.

Teoremă (*Regulile de simplificare*).
Fie $(G, *)$ un grup. Pentru orice $a, b, c \in G$ avem:

$\boxed{a*b = a*c \Rightarrow b = c}$ și $\boxed{b*a = c*a \Rightarrow b = c}$

simplificarea la stânga *simplificarea la dreapta*

Demonstrație.
Fie a, b, $c \in G$ cu $a*b = a*c$ și a' simetricul lui a; avem:
$b = e*b = (a'*a)*b = a'*(a*b) = a'*(a*c) = (a'*a)*c = e*c = c.$
Analog se demonstrează regula de simplificare la dreapta. ■

Teoremă. Fie $(G, *)$ grup, $a, b \in G$ și a' simetricul lui a.
Ecuația $a*x = b$ are în G soluția unică $x = a'*b$ și ecuația $y*a = b$ are în G soluția unică $y = b*a'$.

Demonstrație. Dacă x_1, $x_2 \in G$ sunt soluții ale ecuației $a*x = b$, atunci $a*x_1 = b = a*x_2$ și, simplificând cu a, obținem $x_1 = x_2$. Așadar ecuația $a*x = b$ are cel mult o soluție în G.
Fie $x = a'*b$, unde a' este simetricul lui a. Avem:
$a*x = a*(a'*b) = (a*a')*b = e*b = b$, de unde rezultă că $x = a'*b$ este soluție unică (în G) a ecuației $a*x = b$.
Analog, ecuația $y*a = b$ admite soluția unică $y = b*a'$. ■

Dacă grupul G este dat în notație aditivă, atunci rezultatele din teoremele precedente se transcriu astfel:

$a + b = a + c \Rightarrow b = c$; $\quad b + a = c + a \Rightarrow b = c$;
$a + x = b \Rightarrow x = (-a) + b$; $\quad y + a = b \Rightarrow y = b + (-a)$.

Cu notație multiplicativă avem:
$ab = ac \Rightarrow b = c$; $\quad ba = ca \Rightarrow b = c$;
$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b$; $\quad ya = b \Rightarrow y = ba^{-1}$.

Dacă $(G, \cdot)$ este un grup dat în notație multiplicativă, $a \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci folosind faptul că operația grupului este asociativă definim:
$$a^n = \begin{cases} e, & \text{dacă } n = 0 \\ a, & \text{dacă } n = 1 \\ a^{n-1}a, & \text{dacă } n > 1 \\ (a^{-n})^{-1}, & \text{dacă } n < 0 \end{cases}.$$

Avem $\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}$ și $\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

8) Fie G o parte stabilă a lui $\mathbb{C}^*$, în raport cu înmulțirea. Mulțimea G este formată din patru numere complexe diferite.
Arătați că $z^4 = 1$, $\forall\ z \in G$.
Deduceți că $(G, \cdot)$ este grup și $G = \{1, i, -1, -i\}$.

9) Fie $G = \{e, a, b, c\}$ un grup cu patru elemente în care $a^2 = b$ și element neutru e.
Completați tabla operației grupului G.
Comparați rezultatul cu tabla operației grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$.

10) Fie $(G, \cdot)$ grup și a, b, $c \in G$ cu $abc = e$. Arătați că $bca = cab = e$.

11) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu n elemente și $S = \{(x, y, z) \in G \times G \times G \mid xyz = e\}$.
Arătați că mulțimea S are n^2 elemente.

12) Fie $(G, \cdot)$ un grup și a, $b \in G$ cu $ab^3 = b^3a$ și $ab^4 = b^4a$. Arătați că $ab = ba$.

13) Fie $(G, \cdot)$ un grup și a, $b \in G$ astfel încât $(ab)^2 = a^2b^2$. Arătați că $ab = ba$.

14) Fie $(G, \cdot)$ un grup și a, $b \in G$ astfel încât $aba^{-1} = b^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Arătați că $a^n b a^{-n} = b^{k^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

15) Fie a în grupul G. Arătați că în transcriere aditivă, $\forall\ h, k \in \mathbb{Z}$, avem:

$\boxed{ha + ka = (h + k)a,\ k(ha) = (kh)a,}$

De exemplu, în scrierea aditivă,
$5a + (-3)a = a + a + a + a + a + (-a) + (-a) + (-a) = a + a = 2a = (5 + (-3))a$.
Să indicăm exact ordinea operațiilor:

$5a + (-3)a =$

$= ((((a+a)+a)+a)+a)+(((-a)+(-a))+(-a)) =$

$= (((a+a)+a)+a)+(a+(((-a)+(-a))+(-a))) =$

$= (((a+a)+a)+a)+(a+(-a))+((-a))+(-a)) =$

$= \ldots\ldots$

Completați șirul egalităților până obțineți rezultatul.

Grupuri de matrice

Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătrate de ordinul al doilea având coeficienții reali. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm cu $|A|$ *determinantul* lui A și cu ${}^tA$ *transpusa* lui A, $|A| = ad - cb$, ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Observație. Pentru oricare două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avem:

$$\boxed{|AB| = |A|\cdot|B|, \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.}$$

Demonstrație. Pentru $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$,

$$AB=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix},$$

de unde $|AB| = (aa'+bc')(cb'+dd') - (ca'+dc')(ab'+bd') =$
$= (ad-cb)(a'd'-c'b') = |A|\cdot|B|$ și

$${}^t(AB)=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ca'+dc' \\ ab'+bd' & cb'+dd' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}={}^tB\,{}^tA. \blacksquare$$

Să mai observăm că ${}^t({}^tA) = A$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Notație. $\boxed{GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid |A| \neq 0\}}$

O matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă și numai dacă $|A| \neq 0$; rezultă că $GL_2(\mathbb{R})$ este mulțimea tuturor matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Teoremă. $GL_2(\mathbb{R})$ înzestrat cu înmulțirea formează un grup numit *grupul general liniar de gradul al 2-lea*.

Demonstrație. Verificăm axiomele grupului.

(i) $\forall\, A, B \in GL_2(\mathbb{R})$, $AB \in GL_2(\mathbb{R})$ adică, $GL_2(\mathbb{R})$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor

(ii) $I_2 \in GL_2(\mathbb{R})$, adică $GL_2(\mathbb{R})$ admite element neutru

(iii) $\forall\, A \in GL_2(\mathbb{R})$, $A^{-1} \in GL_2(\mathbb{R})$, adică toate elementele lui $GL_2(\mathbb{R})$ sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea matricelor.

Dacă $|A| \neq 0$ și $|B| \neq 0$, atunci $|AB| = |A|\cdot|B| \neq 0$ și (i) este astfel verificată. Proprietatea (ii) rezultă din $|I_2| = 1 \neq 0$, iar (iii) se obține din faptul că $1 = |I_2| = |AA^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}|$, de unde $|A^{-1}| \neq 0$.

Operația indusă pe $GL_2(\mathbb{R})$ este evident asociativă. În consecință, $GL_2(\mathbb{R})$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor. $GL_2(\mathbb{R})$ se numește *grupul general liniar* de gradul al 2-lea peste $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

Remarcă. Construcția precedentă poate fi reprodusă pentru matricele din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ și se obține *grupul general liniar* $GL_n(\mathbb{R})$ de gradul n peste $\mathbb{R}$. Analog, se introduc grupurile $GL_n(\mathbb{Q})$ și $GL_n(\mathbb{C})$ de gradul n peste $\mathbb{Q}$, respectiv $\mathbb{C}$.

Calcul algebric în grupuri de matrice.

16) Pentru $x \in \mathbb{R}$, notăm

$$A_x = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Arătați că $A_xA_y = A_{x+y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

17) Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ astfel încât $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ °i $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 și A^3.
b) Arătați că mulțimea $G = \{I_2, A, A^2\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

18) Fie

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ -7b & a-4b \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1\right\}$$

Arătați că G este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că formează grup în raport cu operația indusă.

19) Fie $I, J, K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

$$I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Arătați că $I^2 = J^2 = K^2 = -I_2$, $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$, $JI = -K$, $KJ = -I$, $IK = -J$.
b) Arătați că mulțimea $H = \{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$ formează grup în raport cu înmulțirea matricelor, numit *grupul cuaternionilor*.

20) Fie $A=\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Calculați A^2, A^3, A^4, A^5.
b) Completați tabla înmulțirii matricelor mulțimii $\mathcal{G} = \{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$.
c) Determinați, dacă există, inversa fiecăreia dintre matricele I_2, A, A^2, A^3, A^4.
d) Arătați că mulțimea $\mathcal{G} = \{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Definiție. O submulțime G a lui $GL_n(\mathbb{C})$ se numește *grup de matrice* dacă verifică următoarele condiții: (i) $\forall\, A, B \in G \Rightarrow AB \in G$. (ii) $\forall\, A \in G \Rightarrow A^{-1} \in G$. (iii) $I_n \in G$.

Evident, chiar $G = GL_2(\mathbb{R})$ este grup de matrice. Submulțimile

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid |A| = 1\},\quad O(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A^{-1}\},\quad SO(2) = \{A \in O(2) \mid |A| = 1\},$$

înzestrate cu înmulțirea matricelor formează grupuri de matrice, numite respectiv *grupul special liniar* de gradul al 2-lea peste $\mathbb{R}$, *grupul ortogonal* de gradul al 2-lea și *grupul ortogonal special* de gradul al 2-lea.

Remarcă. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ pot fi definite grupurile $SL_n(\mathbb{Q})$, $SL_n(\mathbb{R})$ și $SL_n(\mathbb{C})$, numite *grupul special liniar* de gradul n peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$. De asemenea, pot fi introduse grupurile $O(n)$ și $SO(n)$, numite respectiv *grupul ortogonal* de gradul n și *grupul ortogonal special* de gradul n.

Exerciții rezolvate. 1) Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Operația $x * y \overset{\text{def}}{=} x^{\ln y}$ definește pe G o structură de grup abelian.

Soluție. Pentru $x, y \in G$, avem $x \neq 1$ și $\ln y \neq 0$. Rezultă $x * y = x^{\ln y} \in G$. Așadar, „$*$“ este operație pe G.

Avem $(x * y) * z = x^{\ln y} * z = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x * y^{\ln z} = x * (y * z)$, deci operația „$*$“ este asociativă.

Avem $x * y = x^{\ln y} = (e^{\ln x})^{\ln y} = e^{\ln x \ln y} = y^{\ln x} = y * x$, deci legea de compoziție „$*$“ este comutativă.

Dacă e este baza logaritmilor naturali, avem $x * e = x^{\ln e} = x^1 = x$, deci e este elementul neutru.

Dacă $x \in G$, atunci simetricul său x', în caz că există, satisface $x * x' = e$, ceea ce revine la $x^{\ln x'} = e$. Logaritmând obținem $\ln x' \cdot \ln x = 1$, deci $\ln x' = \dfrac{1}{\ln x}$, de unde $x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G$, pentru că $x > 0$, $x \neq 1$.

Conchidem că $(G, *)$ este grup abelian.

2) a) Arătați că în orice linie (coloană) a tablei operației unui grup G cu un număr finit de elemente, fiecare element al lui G apare o dată și numai o singură dată.

b) Arătați că tabla operației unui grup $G = \{e, a, b\}$ cu trei elemente poate fi completată într-un singur mod.

Soluție. a) Presupunem că operația din G este notată multiplicativ. Fie $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, cu $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$.

Fie $a \in G$. În linia lui a din tabla operației apar elementele $aa_1, aa_2, ..., aa_i, ..., aa_n$.

Dacă $i \neq j$, atunci $aa_i \neq aa_j$. Rezultă că $aa_1, aa_2, ..., aa_n$ sunt distincte și, mai puțin ordinea, coincid cu $a_1, a_2, ..., a_n$.

Un raționament similar stabilește proprietatea menționată și pentru coloanele tablei.

b) Fie e element neutru în $G = \{e, a, b\}$. În tabla operației lui G vom completa pozițiile „?“ :

$\bullet$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	?	?
b	b	?	?

Nu putem avea $a^2 = a$, deoarece a s-ar repeta pe linia a doua. Nu putem avea nici $a^2 = e$, deoarece în ultima poziție a liniei lui a ar apărea b, ceea ce produce o repetiție pe coloana a treia. Rămâne adevărat că $a^2 = b$. În continuare, pentru a evita repetițiile pe linii și coloane, vom avea $ab = e$, $ba = e$, $b^2 = a$.

$\bullet$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

3) Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu n elemente. Arătați că $a^n = e$, $\forall\, a \in G$.

Soluție. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ elementele lui G și $b = a_1 a_2 ... a_n$. Dacă $a \in G$, atunci mulțimile $\{aa_1, aa_2, ..., aa_n\}$ și $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ coincid, mai puțin eventual ordinea. Cum G este comutativ avem:

$a_1 a_2 ... a_n = aa_1 aa_2 ... aa_n = \underbrace{aa...a}_{n \text{ ori}} a_1 a_2 ... a_n$. Așadar $b = a^n b$, adică $eb = a^n b$ și, prin simplificare cu b, obținem $e = a^n$.

Observație. Cu tehnici mai sofisticate se poate arăta că afirmația din enunțul exercițiului 3 rămâne adevărată și în grupuri necomutative.

4) Să stabilim că $O(2)$ este un grup de matrice.

Soluție. Dacă $A, B \in O(2)$, atunci ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ și ${}^t(A^{-1}) = {}^t({}^tA) = A = (A^{-1})^{-1}$, de unde $AB \in O(2)$ și $A^{-1} \in O(2)$. De asemenea ${}^tI_2 = I_2 = I_2^{-1}$, deci $I_2 \in O(2)$. Așadar, condițiile (i), (ii) și (iii) sunt verificate de $O(2)$, deci $O(2)$ este grup de matrice.

PROBLEME PROPUSE

1. Pe $\mathbb{Z}$ definim operația $x * y = x + y - 1$. Arătați că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

2. Fie $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1\}$. Arătați că G este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea și $(G, \cdot)$ este grup.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește operația $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Arătați că $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian.

4. Pe $\mathbb{R}$ se definește operația $x * y = ax + by - 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Aflați a și b dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian.

5. a) Dacă $x, y \in (-1, 1)$, atunci $\dfrac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$.
b) Dacă $G = (-1, 1)$, arătați că $(G, *)$ este grup abelian, unde $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

6. Fie $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și funcțiile $f_i : A \to A$, $1 \leqslant i \leqslant 4$:
$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Arătați că mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ este stabilă în raport cu operația de compunere și că $(G, \circ)$ este grup abelian.

7. Scrieți tabla operației grupului lui Klein. Dacă P este un punct pe perimetrul unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate și cu centrul de simetrie în origine, atunci imaginile lui P prin funcțiile 1_A, u, v, $w \in \mathcal{K}$ se găsesc tot pe perimetrul dreptunghiului.

8. Fie $G = \{e, a, b, c\}$ un grup cu elementul neutru e. Completați tabla operației lui G, știind că $a^2 = b^2 = e$ și comparați cu tabla grupului Klein.

9. Completați pătratele unui careu cu 5 linii și 5 coloane cu numere din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ astfel încât suma numerelor din fiecare linie și din fiecare coloană să fie 15.

Indicație. Folosiți tabla unui grup cu 5 elemente.

10. Determinați rădăcinile de ordinul al 4-lea ale unității și alcătuiți tabla înmulțirii grupului $(U_4, \cdot)$.

11. Fie $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ și funcțiile $f_i : A \to A$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_5(x) = 1 - x$ și $f_6(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Arătați că $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ este stabilă în raport cu operația de compunere și alcătuiți tabla operației induse.

Arătați că $(G, \circ)$ este grup necomutativ.

12. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall\, x, y \in G$. Arătați că $(G, \cdot)$ este abelian.

13. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea $x^2 = e$, $\forall\, x \in G$. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

14. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ și $a \in G$. Pe G se definește operația $x * y = xya$.
Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

15. Pe mulțimea G este definită o lege de compoziție asociativă „$*$" cu proprietățile:
a) $\exists\, e \in G$ astfel încât $e * x = x$, $\forall x \in G$;
b) $\forall\, x \in G$, $\exists\, x' \in G$ astfel încât $x' * x = e$.
Arătați că $(G, *)$ este grup.

16. Fie G o submulțime a lui $\mathbb{C}^*$ formată din 3 numere complexe. Dacă G este stabilă în raport cu înmulțirea, atunci $G = U_3 = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, unde $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și $(G, \cdot)$ este grup.

17. Fie G o submulțime a lui $\mathbb{C}^*$ formată cu n numere complexe. Dacă G este stabilă în raport cu înmulțirea, atunci $G = U_n$ și $(G, \cdot)$ este grup.

18. Fie mulțimea G cu o operație asociativă „$\cdot$" astfel încât, oricare ar fi $a, b \in G$, ecuațiile $ax = b$ și $ya = b$ au soluții în G. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup.

19. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ.
a) Dacă $a \in G$, atunci $a^h a^k = a^{h+k}$, $(a^h)^k = a^{hk}$, $\forall h, k \in \mathbb{Z}$.
b) Dacă $a, b \in G$ și $ab = ba$, atunci $(ab)^h = a^h b^h$, $h \in \mathbb{Z}$.

20. Determinați grupul unităților monoidului $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ și al monoidului $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$.

Completați tabla înmulțirii grupului $U(\mathbb{Z}_6)$ și a grupului $U(\mathbb{Z}_{12})$, unde $U(\mathbb{Z}_6)$ și $U(\mathbb{Z}_{12})$ reprezintă mulțimea elementelor simetrizabile (numite unități) ale lui $\mathbb{Z}_6$ respectiv $\mathbb{Z}_{12}$.

21. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$

Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

22. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$.

Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

23. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$.

Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

24. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, fie $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $G = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

25. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C},\ u\overline{u} + v\overline{v} \neq 0 \right\}$.

Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

26. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$, definim $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{v} \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ și $A^* = {}^t\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{w} \\ \overline{v} & \overline{z} \end{pmatrix}$.

Arătați că $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ și $(AB)^* = B^*A^*, \forall\, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

27. Fie $A = \begin{pmatrix} 1+i & 3i \\ 2-i & 2i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 2+i & 1+i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Calculați: A^*, B^*, AB, $(AB)^*$ și B^*A^*.

28. Fie $U(2) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}\}$ și $SU(2) = \{A \in U(2) \mid |A| = 1\}$.

Arătați că $U(2)$ și $SU(2)$ sunt grupuri de matrice. ($U(2)$ se numește *grupul unitar* de gradul al 2-lea iar $SU(2)$ *grupul unitar special* de gradul al 2-lea).

29. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) ${}^tA = A^{-1}$;

(2) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$;

(3) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$.

30. Verificați dacă $SL_2(\mathbb{R})$ este grup de matrice.

31. Verificați dacă $SO(2)$ este grup de matrice.

32. Fie $A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $A^* = A^{-1}$;

(ii) $u\overline{u} + v\overline{v} = w\overline{w} + z\overline{z} = 1$, $u\overline{w} + v\overline{z} = 0$;

(iii) $u\overline{u} + w\overline{w} = v\overline{v} + z\overline{z} = 1$, $u\overline{v} + w\overline{z} = 0$

33. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $A \in SO(2)$;

(ii) $\exists \alpha \in [0, 2\pi)$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

34. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) $A \in O(2) \setminus SO(2)$;

(2) $\exists \alpha \in [0, 2\pi)$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Grupuri de permutări

Grupurile finite, adică cele cu un număr finit de elemente, au aplicații spectaculoase în aritmetică și în combinatorică. Ele sunt de asemenea folosite în studiul simetriilor unor configurații geometrice, în clasificarea grafurilor etc. Într-un sens care va fi precizat mai târziu, studiul grupurilor finite este strâns legat de studiul permutărilor unei mulțimi finite.

Grupul permutărilor unei mulțimi

Fie A o mulțime nevidă. O funcție bijectivă $\sigma : A \to A$ se numește *permutare* a mulțimii A. Vom nota cu S_A mulțimea tuturor permutărilor mulțimii A. Cum *funcția identică* a mulțimii A,

$$1_A : A \to A, \quad 1_A(x) = x$$

este bijectivă, avem $1_A \in S_A$.

Funcția 1_A este numită încă *permutarea identică* a mulțimii A. Dacă $\sigma, \pi \in S_A$, atunci $\sigma \circ \pi \in S_A$, deoarece compusa a două funcții bijective este, de asemenea, funcție bijectivă,

$$(\sigma \circ \pi)(x) = \sigma(\pi(x)), \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right] & A \arrow[r, "\sigma"] & A \end{tikzcd}$$

Rezultă că operația de compunere a permutărilor mulțimii A este o lege de compoziție pe S_A, evident asociativă și de element neutru 1_A.

Teoremă. Dacă A este o mulțime nevidă, atunci $(S_A, \circ)$ este grup, numit *grupul permutărilor* mulțimii A.

Demonstrație. Cum legea de compoziție „$\circ$“ este asociativă, de element neutru 1_A, rămâne să arătăm că orice permutare $\sigma \in S_A$ admite inversă în raport cu operația de compunere.

După cum este cunoscut, dacă $\sigma : A \to A$ este bijectivă, atunci funcția $\sigma^{-1} : A \to A, \sigma^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sigma(x) = y$ este bijectivă și $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1_A$. ■

Grupul S_n

În continuare presupunem că A este o mulțime finită cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum natura elementelor mulțimii A nu este importantă pentru studiul nostru, putem presupune că $A = \{1, 2, ..., n\}$. Cu această convenție, S_A va fi notată cu S_n și elementele lui S_n vor fi numite *permutări de gradul n*.

Vom spune că S_n este *grupul permutărilor de gradul n* sau *grupul permutărilor de n obiecte*.

O permutare $\sigma \in S_n$, $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ este complet determinată dacă pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n\}$ este cunoscută imaginea sa $\sigma(i) \in \{1, 2, ..., n\}$. Din acest motiv o permutare $\sigma \in S_n$ se descrie cu un tabel cu două linii,

1) Scrieți permutările grupurilor S_1, S_2 și S_3.

2) Scrieți toate permutările mulțimii $A = \{23, 81, 121\}$.

3) Scrieți permutările din S_3 care nu sunt menționate în lista următoare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Scrieți toate permutările mulțimii $\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(2) = 3, \sigma(4) = 1\}$.

5) Care dintre următoarele tabele reprezintă permutări din S_5 ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Considerăm permutările

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calculați $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\tau \circ \tau$, $\sigma \circ \sigma$, σ^3, τ^{20}.

b) Determinați σ^{-1} și să se verifice dacă $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = 1_5$.

7) Determinați permutarea π dacă:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\pi \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\pi \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Indicație. c) Se poate face prin încercări.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

în prima linie fiind trecute, în ordine naturală, numerele 1, 2, ..., i, ..., n, iar în a doua linie fiind inserate imaginile lor $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(n)$ prin σ. Cum σ este funcție bijectivă, în a doua linie apar, într-o ordine care depinde de σ, tot numerele 1, 2, ..., i, ..., n, fiecare o singură dată.

Se notează cu e permutarea identică a mulțimii $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

Avem $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & .. & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ și $e \circ \sigma = \sigma \circ e = \sigma$, oricare ar fi $\sigma \in S_n$.

1) Funcția bijectivă $\sigma : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 2, \sigma(4) = 4$ și $\sigma(5) = 1$ poate fi descrisă astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Cum $(\sigma \circ \pi)(i) = \sigma(\pi(i))$ și $(\pi \circ \sigma)(i) = \pi(\sigma(i))$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, avem $\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\pi(1)) & \sigma(\pi(2)) & \sigma(\pi(3)) & \sigma(\pi(4)) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(3) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(\sigma(1)) & \pi(\sigma(2)) & \pi(\sigma(3)) & \pi(\sigma(4)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(4) & \pi(1) & \pi(3) & \pi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma \circ \pi \neq \pi \circ \sigma$

3) Dacă $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 5, \sigma(4) = 4$ și $\sigma(5) = 2$. Cum pentru orice $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avem $\sigma^{-1}(j) = i \Leftrightarrow \sigma(i) = j$ rezultă că $\sigma^{-1}(1) = 2, \sigma^{-1}(2) = 5$, $\sigma^{-1}(3) = 1, \sigma^{-1}(4) = 4$ și $\sigma^{-1}(5) = 3$, deci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

Avem $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$.

8) Scrieți toate permutările mulțimilor:

a) $\{\sigma \in S_3 \mid \sigma(3) = 3\}$

b) $\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(2) = 3 \text{ și } \sigma(4) = 1\}$

c) $\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\}$.

9) Câte elemente au fiecare dintre următoarele mulțimi:

a) $A = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma(2) = 5\}$;

b) $A = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma(2) = 5\}$;

c) $A = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma(2) = 5, \sigma(4) = 1\}$;

d) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \right\}$

10) Fie permutările $\sigma, \pi \in S_5$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ și } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculați $\sigma \circ \pi, \pi \circ \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^{21}, \pi^{17}$.

b) Determinați σ^{-1} și π^{-1} și verificați dacă $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = e, \pi^{-1} \circ \pi = \pi \circ \pi^{-1} = e$.

11) Determinați $\sigma \in S_5$ dacă

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

12) Determinați $\sigma \in S_4$, dacă

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

13) Determinați $\sigma \in S_3$ dacă

$$\sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

14) Câte elemente are fiecare dintre următoarele mulțimi?

a) S_2;
b) S_3;
c) S_5;
d) S_7.

Teoremă. Grupul $(S_n, \circ)$ are $n!$ elemente.

Demonstrație. Pentru a construi o permutare $\sigma \in S_n$ precizăm succesiv valorile $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$. Cum în linia a doua a lui σ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(i) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$ nu putem avea numere care

să se repete, rezultă că avem n posibilități de alegere pentru $\sigma(1)$, $n-1$ posibilități de alegere pentru $\sigma(2)$ ș.a.m.d. Concluzionăm că numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ este

$n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$ ■

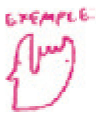
15) Arătați că mulțimea permutărilor unei mulțimi cu n elemente, $n \geqslant 4$, este mai numeroasă decât mulțimea părților unei mulțimi cu n elemente și mai puțin numeroasă decât mulțimea tuturor funcțiilor de la o mulțime cu n elemente în ea însăși.

Indicație. Mulțimea părților unei mulțimi cu n elemente are 2^n elemente.

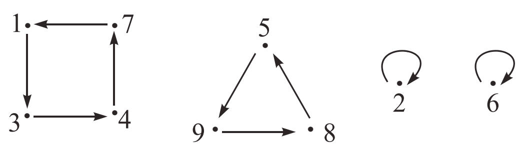
Mulțimea tuturor funcțiilor cu domeniul o mulțime A și codomeniul tot mulțimea A, când A are n elemente, are n^n elemente.

Diagrama unei permutări (facultativ)

Acțiunea unei permutări $\sigma \in S_n$ asupra numerelor 1, 2, ..., n poate fi ilustrată cu ajutorul unei *diagrame*. În acest scop se consideră n puncte distincte într-un plan, asociate numerelor 1, 2, ..., n. Dacă $\sigma(i) = j$, atunci se trasează o săgeată cu originea în punctul asociat lui i și cu extremitatea în punctul asociat lui j. Configurația geometrică astfel obținută se notează cu D_σ și se numește *diagrama* permutării $\sigma \in S_n$. Punctele asociate numerelor 1, 2, ..., n se numesc *vârfurile* diagramei D_σ. Cum σ este funcție bijectivă, din fiecare vârf al diagramei D_σ „pleacă“ o singură săgeată și „sosește“ o singură săgeată.



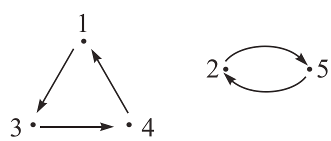
1) Fie $\sigma \in S_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 9 & 6 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. Diagrama D_σ este



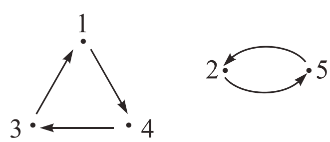
Cum $\sigma^{-1}(j) = i \Leftrightarrow \sigma(i) = j$, diagrama $D_{\sigma^{-1}}$ a permutării $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 8 & 6 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, se obține

schimbând sensul săgeților în diagrama D_σ a permutării σ.

2) Dacă $\pi \in S_5$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ atunci diagrama D_π este



iar diagrama $D_{\pi^{-1}}$ este



● **1.** Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculați $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^2 și π^2.

● **2.** Fie $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați σ^{-1} și verificați că $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$.

● **3.** Rezolvați în grupul $(S_3, \circ)$ ecuațiile $\sigma \circ x = \pi$ și $y \circ \sigma = \pi$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

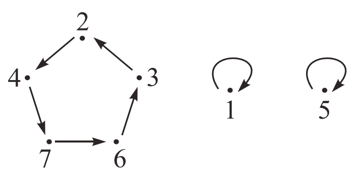
● **4.** Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculați σ^2, σ^3, σ^4 și σ^{32}.

● **5.** Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculați $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, $\sigma^{-1} \circ \pi$, $\sigma \circ \pi^{-1}$, $\sigma^{-1} \circ \pi \circ \sigma$.

●● **6.** Rezolvați în grupul $(S_5, \circ)$ ecuațiile $\sigma \circ x = \pi$, $y \circ \sigma = \pi$, $\sigma \circ x \circ \sigma^{-1} = \pi$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

●● **7.** Precizați permutarea $\sigma \in S_7$, dacă admite diagrama:



●● **8.** Fie $\sigma, \pi \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Arătați că $\sigma^3 = e$, $\pi^3 = e$.

●● **9.** Fie următoarele permutări:

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați suportul fiecărei permutări.
b) Care dintre aceste permutări sunt disjuncte?
c) Verificați dacă $\gamma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Verificați, de asemenea, dacă $\tau \circ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
d) Verificați dacă permutările e și ε sunt disjuncte.
e) Calculați $\tau^{-1}(4)$; $e^{-1}(2)$;
f) Calculați $(\tau \circ \pi) \circ \sigma$;
g) Verificați dacă $e \circ \varepsilon = \varepsilon \circ e$.

●● **10.** Arătați că grupurile $(S_1, \circ)$ și $(S_2, \circ)$ sunt comutative și că grupul $(S_3, \circ)$ nu este comutativ.

●● **11.** Pentru orice $n \geqslant 3$, grupul $(S_n, \circ)$ nu este comutativ.

●● **12.** Fie $\sigma \in S_n$ astfel încât $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$, oricare ar fi $\pi \in S_n$. Arătați că $\sigma = e$.

● **13.** Fie $\sigma \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

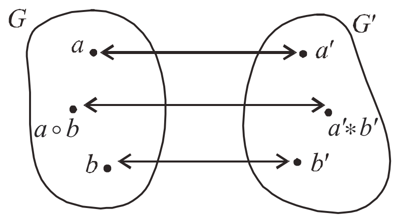
Figurați diagramele lui σ și σ^{-1}.

● **14.** Fie $\sigma, \pi \in S_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. Figurați diagramele lui σ, π și π^{-1}.

Morfisme de grupuri

Proprietățile algebrice ale elementelor unui grup sunt cele descrise în lista axiomelor grupului sau sunt consecințe ale axiomelor. Există grupuri ale căror elemente au proprietăți algebrice asemănătoare și putem identifica printr-o funcție acele elemente care se comportă la fel. Această funcție va fi numită morfism (izomorfism, automorfism etc.). Studiul unui grup poate să ne furnizeze informații și asupra unui alt grup dacă între aceste structuri a fost stabilit un morfism. Cu ajutorul morfismelor putem să realizăm o clasificare a grupurilor.

Pentru a studia în ce măsură proprietățile elementelor unui grup pot fi regăsite într-un alt grup, vom căuta o corespondență bijectivă *compatibilă* cu operațiile celor două grupuri.



Definiție. Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri. O funcție $f: G \to G'$ se numește *izomorfism de grupuri* dacă:

(1) $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G$;

(2) f este bijectivă.

Spunem că grupul G este *izomorf* cu grupul G' și scriem $G \simeq G'$, dacă există un izomorfism $f: G \to G'$. În caz contrar, spunem că grupul G *nu este izomorf* cu grupul G' și scriem $G \not\simeq G'$.

Remarcă. Condiția (1) din definiția izomorfismului arată că imaginea compusului a oricăror două elemente $x, y \in G$ este egală cu compusul imaginilor (în G'); vom spune că acțiunea bijecției f este *compatibilă* cu operațiile celor două grupuri.

Dacă operațiile celor două grupuri sunt notate aditiv, atunci (1) se scrie astfel: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in G$.

Dacă operația lui G este notată aditiv, iar cea a lui G' este notată multiplicativ, avem: $f(x + y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in G$.

Teoremă. Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri. Dacă $f: G \to G'$ este izomorfism, atunci $f^{-1}: G' \to G$ este izomorfism.

Demonstrație. Fie $x', y' \in G'$. Cum f este funcție bijectivă, există $x, y \in G$ unic determinați astfel încât $f(x) = x'$ și $f(y) = y'$.

Conform definiției funcției inverse f^{-1}, avem $f^{-1}(x') = x$ și $f^{-1}(y') = y$. Dar $x' * y' = f(x) * f(y) = f(x \circ y)$, de unde $f^{-1}(x' * y') = x \circ y = f^{-1}(x') * f^{-1}(y')$; cum $f^{-1}: G' \to G$ este funcție bijectivă, rezultă că f^{-1} este izomorfism. ■

Remarcă. Între două grupuri pot exista mai multe izomorfisme. Astfel, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ avem un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$ (vezi exemplul următor).

Identificarea unor grupuri izomorfe.

1) Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

a) Arătați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Funcția $f: \mathbb{R} \to G$, $f(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este izomorfism de grupuri.

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $G = \{I_2, A, A^2, A^3\}$.

a) Arătați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Comparați tabla înmulțirii grupului $(G, \cdot)$ cu cea a grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$ și conchideți că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$.

3) Fie $G = (3, \infty)$.

a) Dacă $x, y \in G$, atunci $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 3(x+y) + 12 \in G$.

b) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

c) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la $(G, *)$.

4) Pe $G_1 = (-1, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$, iar pe $G_2 = (1, \infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - x - y + 2$.

Arătați că G_1 și G_2 sunt grupuri izomorfe.

Indicație.

Se consideră $f: G_1 \to G_2$, $f(x) = x + 2$.

Exemple și comentarii legate de izomorfismele de grupuri – temă de sinteză

1) $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

Soluție. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ și $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Cum f este funcție bijectivă și $f(xy) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y)$, rezultă că f este izomorfism de grupuri. Observăm că f^{-1} în acest caz este funcția $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}(u) = a^u$ și avem $f^{-1}(u + v) = a^{u+v} = a^u a^v = f^{-1}(u) f^{-1}(v)$.

În legătură cu exemplul 1) să mai consemnăm faptul că putem, folosind *tablele de logaritmi*, să înlocuim calcule mai complicate ca înmulțiri, împărțiri, exponențieri prin unele mult mai simple în care intervin adunări, scăderi, înmulțiri. Acest fapt justifică încă o dată de ce este important să găsim izomorfisme între grupuri: chiar dacă două grupuri izomorfe sunt „identice“ din punct de vedere abstract, calculele pot fi mai simple sau unele proprietăți pot fi descoperite mai ușor într-unul dintre grupuri, iar rezultatele obținute pot fi transferate printr-un izomorfism în celălalt grup.

2) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Z} \right\}$ este grup de matrice și $(\mathbb{Z}, +) \simeq (G, \cdot)$.

Soluție. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ avem $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De asemenea, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $I_2 \in G$, deci $(G, \cdot)$ este grup de matrice. Funcția $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este evident bijectivă și cum $f(a+b) = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(a)f(b)$, rezultă că f este izomorfism, deci $(\mathbb{Z}, +) \simeq (G, \cdot)$.

3) $(\mathbb{Q}, +) \not\simeq (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$. *Grupul aditiv* $(\mathbb{Q}, +)$ *al numerelor raționale nu este izomorf cu grupul multiplicativ* $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ *al numerelor raționale strict pozitive.*

Soluție. Presupunem că există un izomorfism $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+^*$. Cum f este funcție bijectivă, există $r \in \mathbb{Q}$ cu $f(r) = 2$. Cum $f\left(\frac{r}{2}\right) \in \mathbb{Q}$ și $2 = f(r) = f\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{r}{2}\right) f\left(\frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{r}{2}\right)^2$, avem $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, contradicție.

4) $(\mathbb{Z}_4, +) \simeq (U_4, \cdot)$. *Grupul aditiv* $(\mathbb{Z}_4, +)$ *al claselor de resturi modulo 4 este izomorf cu grupul multiplicativ* $(U_4, \cdot)$ *al rădăcinilor de ordin 4 ale unității.*

Soluție. Grupul U_4 este format cu rădăcinile (din $\mathbb{C}$) ale polinomului $f = X^4 - 1$. Avem $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Corespondența $f : \mathbb{Z}_4 \to U_4$, $f(\hat{0}) = 1$, $f(\hat{1}) = i$, $f(\hat{2}) = -1$, $f(\hat{3}) = -i$ este bijectivă și tablele celor două grupuri sunt la fel structurate relativ la f. Rezultă că f este izomorfism, deci $(\mathbb{Z}_4, +) \simeq (U_4, \cdot)$.

Tabla grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$

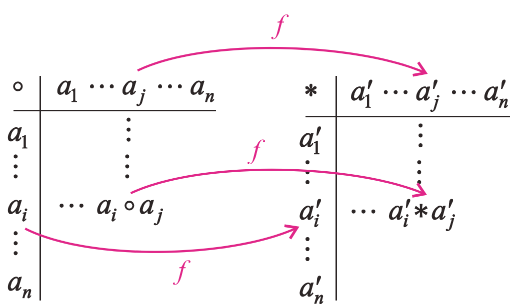
$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Tabla grupului $(U_4, \cdot)$

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Remarcă. Dacă două grupuri $(G, \circ)$ și $(G', *)$ sunt izomorfe și G are un număr finit de elemente, atunci G' are același număr de elemente.

Să presupunem deci, că $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $G' = \{a'_1, a'_2, \ldots a'_n\}$ sunt grupuri cu n elemente, iar $f : G \to G'$ este o funcție bijectivă cu $f(a_i) = a'_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Atunci f este izomorfism dacă și numai dacă, $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$, $f(a_i \circ a_j) = a'_i * a'_j$, adică în poziții corespunzătoare din tabelele celor două grupuri, se găsesc elementele care corespund prin bijecția f. Spunem că tablele acestor două grupuri sunt la fel structurate (relativ la f).



Renunțând la condiția de bijectivitate din definiția izomorfismului, obținem noțiunea mai generală de *morfism* (*omomorfism*) de grupuri:

> **Definiție.** Fie grupurile $(G, \circ)$ și $(G', *)$. Funcția $f: G \to G'$ (nu obligatoriu bijectivă) se numește *morfism* de grupuri dacă:
> $$f(x \circ y) = f(x) * f(y),\ \forall x, y \in G.$$

1) Funcția $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(z) = |z|$ este morfism de la grupul multiplicativ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ al numerelor complexe nenule la grupul multiplicativ $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ al numerelor reale pozitive nenule.

Soluție. Pentru orice număr complex $z = a + bi$, avem $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ și $|z| > 0$ dacă $z \neq 0$. Dacă $z, w \in \mathbb{C}$, atunci

$$f(zw) = |zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{zw\bar{z}\,\bar{w}} = \sqrt{(z\bar{z})(w\bar{w})} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}} =$$
$$= |z| \cdot |w| = f(z)f(w),$$ deci f este morfism de grupuri.

2) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $f(k) = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ la grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Soluție. Avem $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$
$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) =$
$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dacă $h, k \in \mathbb{R}$, atunci $f(h+k) = \cos\frac{2(h+k)\pi}{n} + i\sin\frac{2(h+k)\pi}{n} =$

$$= \left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = f(h)f(k).$$

Vom preciza acțiunea unui morfism de grupuri asupra elementului neutru, precum și faptul că imaginea unui element printr-un morfism comută cu operația de trecere la invers:

> **Teoremă.** Fie grupurile $(G, \circ)$ și $(G', *)$ având elementele neutre e și e'. Dacă $f: G \to G'$ este morfism de grupuri, atunci:
> (1) $f(e) = e'$ (2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1},\ \forall x \in G$

Demonstrație. Trebuie arătat că f aplică elementul neutru e al lui G peste elementul neutru e' al lui G' și că imaginea inversului, în G, al oricărui element $x \in G$, este inversul, în G', al imaginii $f(x)$ a lui x prin f. Se observă că

$e' * f(e) = f(e) = f(e \circ e) = f(e) * f(e)$.

Așadar, în grupul G' avem $e' * f(e) = f(e) * f(e)$ și, simplificând cu $f(e)$, se obține $f(e) = e'$.

Pentru orice $x \in G$, avem $e' = f(e) = f(x \circ x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$ și, analog, $e' = f(x^{-1}) * f(x)$. Rezultă că $f(x^{-1})$ este inversul lui $f(x)$, de unde $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. ■

Dacă G este grup, atunci un morfism (izomorfism) $f: G \to G$ se numește *endomorfism* (respectiv *automorfism*) al grupului G.

5) Pe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ definim legea de compoziție $(\hat{a}, \hat{b}) + (\hat{c}, \hat{d}) = (\hat{a} + \hat{c}, \hat{b} + \hat{d})$.
a) Câte elemente are mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?
b) Arătați că $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ este grup.
c) Comparați tabla operației grupului $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ cu cea a grupului lui Klein și deduceți că $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +) \simeq (\mathcal{K}, \circ)$.

6) Arătați că funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f(a) = \hat{a}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Indicație. $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$,
$f(a+b) = \widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b} = f(a) + f(b)$,

7) Arătați că funcția $f: GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $f(A) = |A|$ este morfism de la grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ la grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Indicație. $\forall\ A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ avem $f(AB) = |AB| = |A| \cdot |B| = f(A)f(B)$.

8) Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \middle|\ \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

a) Câte elemente are mulțimea G ?
b) Arătați că G este grup în raport cu operația: $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{a'} & \widehat{b'} \\ \widehat{c'} & \widehat{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} + \widehat{a'} & \hat{b} + \widehat{b'} \\ \hat{c} + \widehat{c'} & \hat{d} + \widehat{d'} \end{pmatrix}$
c) Arătați că funcția $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to G$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$ este morfism surjectiv de la grupul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ la grupul $(G, +)$.

9) Funcția $f: \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$, $f(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.
a) Determinați mulțimea de numere $K = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) = I_2\}$.
b) Arătați dacă $f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este element neutru în $GL_2(\mathbb{R})$
c) Verificați că $f(-\pi) = (f(\pi))^{-1}$;
d) Arătați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ -a & 1 & -\frac{1}{2}a^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Big| a\in\mathbb{R}\right\}$.

Arătați că $(G,\cdot)$ este grup de matrice și că $(\mathbb{R},+)\simeq(G,\cdot)$.

2. Fie $G=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-2b^2=1\}$ și $G'=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 2b & a\end{pmatrix} \Big| a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-2b^2=1\right\}$.

Arătați că G este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale, $(G',\ \cdot)$ este grup de matrice iar funcția $f: G\to G'$, $f(a+b\sqrt{2})=\begin{pmatrix}a & b\\ 2b & a\end{pmatrix}$ este izomorfism de la grupul $(G,\ \cdot)$ la grupul $(G',\ \cdot)$.

3. Fie $G=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \Big| a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq 0\right\}$.

Arătați că $(G,\ \cdot)$ este grup de matrice și funcția $f:\mathbb{C}^*\to G$, $f(a+bi)=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{C}^*,\ \cdot)$ la grupul $(G,\ \cdot)$.

4. Fie $G=(-1,\ 1)$. Pe G definim legea de compoziție „$*$“ prin $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$. Arătați că $(G,*)$ este grup și că funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

5. Pentru orice $a\in\mathbb{R}$ definim funcția $T_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T_a(x)=x+a$.
(i) Arătați că $T_a\circ T_b=T_{a+b}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$
(ii) Mulțimea $G=\{T_a\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
(iii) Funcția $f:\mathbb{R}\to G$, $f(a)=T_a$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R},+)$ la grupul $(G,\circ)$.

6. Fie $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pentru orice $a\in\mathbb{R}$ definim $F_a:A\to A$, $F_a(x,y)=\left(x+ay+\dfrac{a^2}{2},\ y+a\right)$.
(i) Arătați că $F_a\circ F_b=F_{a+b}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.
(ii) Mulțimea $G=\{F_a\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
(iii) Funcția $f:\mathbb{R}\to G$, $f(a)=F_a$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R},+)$ la grupul $(G,\circ)$.

7. Arătați că grupurile $(\mathbb{Z},+)$ și $(\mathbb{Q},+)$ nu sunt izomorfe.

8. Fie $G=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ și pentru orice $x,y\in G$ definim $x*y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x)+\mathrm{tg}(y))$.
Arătați că $(G,*)$ este grup și că $(G,*)\simeq(\mathbb{R},+)$.

9. Funcția $f:\mathbb{R}\to GL_2(\mathbb{R})$, $f(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},+)$ la grupul $(GL_2(\mathbb{R}),\ \cdot)$. Determinați mulțimea de numere $K=\{\alpha\in\mathbb{R}\,|\,f(\alpha)=I_2\}$.

10. Fie $f: G\to G'$ un morfism surjectiv de la grupul $(G,\ \cdot)$ la grupul $(G',\ \cdot)$. Atunci:
(i) dacă G este comutativ, atunci G' este comutativ;
(ii) dacă $x^3=e$, $\forall x\in G$, atunci $x'^3=e'$, $\forall x'\in G'$.

11. Fie $G=\{e,a\}$ un grup multiplicativ cu două elemente.
(i) Arătați că tabla lui G este următoarea:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

(ii) Arătați că orice grup G cu două elemente este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_2,+)$.

12. Fie $G=\{e,a,b\}$ un grup multiplicativ cu trei elemente.
(i) Arătați că tabla lui G este următoarea:

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(ii) Arătați că orice grup G cu trei elemente este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_3,+)$.

13. Fie $G=\{e,a,b,c\}$ un grup multiplicativ cu patru elemente astfel încât $x^2=e$, $\forall x\in G$.
(i) Completați tabla operației lui G.
(ii) Arătați că $G\simeq\mathscr{K}$, unde $\mathscr{K}$ este grupul lui Klein.
(iii) Arătați că $(G,\cdot)\not\simeq(\mathbb{Z}_4,+)$.

14. Arătați că orice grup cu patru elemente este izomorf cu grupul lui Klein sau cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$.

15. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup cu n elemente. Atunci:
(i) Numărul elementelor $a\in G$ cu $a^2\neq e$ este par (eventual zero).
(ii) Dacă n este par, atunci există $a\in G$, $a\neq e$, astfel încât $a^2=e$.

16. Fie $(U_n,\ \cdot)$ grupul rădăcinilor de ordin n ale unității și o funcție $f: U_n\to U_n$.
Arătați că f este endomorfism al lui $(U_n,\ \cdot)$, dacă și numai dacă există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x)=x^m$, $\forall x\in U_n$; f este automorfism dacă și numai dacă m este prim cu n. Câte automorfisme are grupul U_{10}?

17. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup și $a\in G$.
(i) Funcția $f: G\to G$, $f(x)=axa^{-1}$ este bijectivă.
(ii) Arătați că f este automorfism al grupului G.
(iii) Examinați cazul când G este grup abelian.

Definiția subgrupului. Exemple

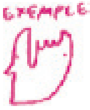
Fie $(G, \cdot)$ un grup de element neutru e. Suntem interesați să caracterizăm părțile stabile H ale lui G care au structură de grup în raport cu operația indusă pe H de operația grupului G. Legat de această problemă introducem noțiunea de *subgrup*.

Definiție. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup, atunci o parte nevidă H a lui G se numește *subgrup* al grupului G dacă verifică condițiile:
(1) $\forall x, y \in H \Rightarrow xy \in H$
(2) $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Observație. *Dacă H este subgrup al grupului $(G, \cdot)$, atunci H este grup în raport cu operația indusă pe H de operația grupului G*. Într-adevăr, operația indusă pe H este asociativă, pentru că operația grupului G are această proprietate. Cum $H \neq \emptyset$, alegem $a \in H$. Cum și $a^{-1} \in H$, avem $e = aa^{-1} \in H$. Așadar *orice subgrup al lui G conține elementul neutru e al grupului G* și evident e este element neutru și pentru operația indusă pe H. În fine, proprietatea (2) din definiția subgrupului arată că orice element $x \in H$ are invers în raport cu operația indusă pe H de operația grupului G.

Dacă operația grupului G este dată în notație aditivă, atunci o submulțime nevidă H a lui G este subgrup dacă
(1) $\forall x, y \in H \Rightarrow x + y \in H$
(2) $\forall x \in H \Rightarrow -x \in H$.

EXEMPLE



1) Dacă $G = GL_2(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ iar $H = SL_2(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in G \mid \det A = 1\}$, atunci H este subgrup al lui G.

Într-adevăr, dacă A și $B \in H$, atunci $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$, deci $AB \in H$. De asemenea, dacă $A \in H$ atunci din $I_2 = AA^{-1}$ rezultă că $1 = \det I_2 = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \cdot \det A^{-1} = \det A^{-1}$, deci $A^{-1} \in H$.

2) Fie $n \in \mathbb{N}$ și $H = n\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$.

Dacă $x, y \in H$, $x = nq_1$, $y = nq_2$ cu $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, atunci $x + y = n(q_1 + q_2) \in n\mathbb{Z} = H$ și $-x = n(-q_1) \in n\mathbb{Z} = H$. Așadar $H = n\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ al numerelor întregi.

3) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$ este subgrup al grupului $(S_n, \circ)$. Într-adevăr, dacă $\sigma, \pi \in H$, atunci $\sigma(n) = n$ și $\pi(n) = n$. Avem $(\sigma \circ \pi)(n) = \sigma(\pi(n)) = \sigma(n) = n$ și $n = e(n) = (\sigma^{-1} \circ \sigma)(n) = \sigma^{-1}(\sigma(n)) = \sigma^{-1}(n)$, de unde $\sigma \circ \pi \in H$ și $\sigma^{-1} \in H$

1) Fie $(G, *)$ un grup de element neutru e și $E = \{e\}$. Arătați că E este subgrup al lui G. $E = \{e\}$ se numește *subgrupul unitate* al grupului G

Când G este dat în notație aditivă, atunci $O = \{0\}$ este subgrup al lui G, numit *subgrupul zero*.

2) Arătați că orice grup G este subgrup al lui G.

3) Fie $\mathbb{Z} = \{nq, q \in \mathbb{Z}\}$ subgrup în $(\mathbb{Z}, +)$.
a) Este $5\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z}$ subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$?
b) Arătați că $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z}$.
Este $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$ subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$?

4) Arătați că intersecția a două subgrupuri ale unui grup este subgrup.

5) Arătați că
$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \{2x + 3y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$
este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$.

6) Fie $H = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Arătați că H este subgrup al lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$.

7) Arătați că mulțimea

$$H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

înzestrată cu înmulțirea matricelor formează un subgrup al grupului $GL_2(\mathbb{R})$.

8) Arătați că mulțimea
$H = \{\cos\alpha + i\sin\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}$
înzestrată cu înmulțirea este un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Ce reprezintă în plan mulțimea H ?

Care este inversul elementului
$z(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$?

Reprezentați în plan $z\left(\frac{\pi}{3}\right)$ și $\left(z\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{-1}$.

4) Dacă $(G, \cdot)$ este un grup cu elementul unitate e, atunci $1 \overset{not}{=} \{e\}$ și G sunt subgrupuri ale lui G. Primul dintre acestea se numește *subgrupul unitate* al grupului G.

Dacă operația grupului G este notată aditiv, atunci subgrupul $O = \{0\}$ se numește *subgrupul zero* al grupului G.

Observație. Subgrupurile grupurilor S_n, $n \in \mathbb{N}^*$ se numesc *grupuri de permutări*.

Grupurile de matrice, definite anterior în acest manual, sunt de fapt subgrupuri ale grupului general liniar.

Ordinul unui element

Definiție. Fie $(G, \cdot)$ un grup, de element neutru e și $a \in G$. Spunem că a este element de *ordin finit* al grupului G dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^m = e$.

Dacă a este element de ordin finit atunci cel mai mic număr $m \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $a^m = e$ se numește *ordinul* lui a și notăm ord $a = m$.

Dacă grupul G este dat în notație aditivă, elementul $a \in G$ are ordinul finit dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $ma = 0$, unde 0 este elementul neutru al grupului G și $ma = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{m \text{ ori}}$.

Un grup $(G, \cdot)$ cu un număr finit de elemente se numește *grup finit*; numărul $n \in \mathbb{N}^*$ al elementelor lui G se numește *ordinul* grupului G și notăm ord$G = n$. Analog se definește noțiunea de subgrup finit și de ordin al unui subgrup.

1) Numărul complex $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este element de ordinul al 3-lea al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ pentru că:

$$\varepsilon^1 = \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

$$\varepsilon^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \cdot$$

Analog se arată că numărul complex $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$ este element de ordinul m al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2) În grupul aditiv $(\mathbb{Z}_8, +)$ clasa $\hat{6}$ este element de ordinul al 4-lea pentru că

$$1 \cdot \hat{6} = \hat{6} \neq \hat{0}$$

$$2 \cdot \hat{6} = \hat{6} + \hat{6} = \widehat{12} = \hat{4} \neq \hat{0}$$

$$3 \cdot \hat{6} = \hat{6} + \hat{6} + \hat{6} = \widehat{18} = \hat{2} \neq \hat{0}$$

$$4 \cdot \hat{6} = \hat{6} + \hat{6} + \hat{6} + \hat{6} = \widehat{24} = \hat{0} \cdot$$

9) Fie grupul abelian $(\mathbb{Z}_{40}, +)$. Determinați ordinele elementelor:

a) $\widehat{20}$; b) $\hat{1}$; c) $\widehat{39}$; d) $\widehat{25}$.

10) Calculați ordinul elementului $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ în $GL_2(\mathbb{R})$.

11) Fie grupul abelian $(\mathbb{Z}_{80}, +)$. Determinați ordinele elementelor:

a) $\widehat{20}$; b) $\hat{1}$; c) $\widehat{39}$; d) $\widehat{25}$.

12) a) Arătați că $(\mathbb{Z}_{11}, \cdot)$ nu este grup și că $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$ este grup.

b) Determinați ordinele elementelor $\hat{2}$, $\hat{5}$ și $\hat{7}$ din grupul $(\mathbb{Z}_{11}, \cdot)$.

13) Elementul $\hat{3}$ al grupului $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ are ordinul al 4-lea pentru că:

$1 \cdot \hat{3} = \hat{3} \neq \hat{0}$, $2 \cdot \hat{3} = \hat{3} + \hat{3} = \hat{6} \neq \hat{0}$,

$3 \cdot \hat{3} = \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} = \hat{9} \neq \hat{0}$ și

$4 \cdot \hat{3} = \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} = \widehat{12} = \hat{0}$. î

Ce alte elemente din grupul $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ mai au ordinul al 4-lea? Ce alte ordine mai pot avea elementele din $(\mathbb{Z}_{12}, +)$?

14) Într-un grup $(G, \cdot)$ avem $e^1 = e$, deci ord$e = 1$, unde e este elementul neutru. În grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ singurul element de ordin finit este 1 pentru că din $\alpha^m = 1$, cu $\alpha > 0$ și $m > 0$, rezultă $\alpha = 1$. În grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ singurele elemente de ordin finit sunt 1 și -1 și avem ord$1 = 1$, ord$(-1) = 2$.

15) Scrieți toate subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

16) Arătați că $7\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 21\mathbb{Z}$.

17) Arătați că $12\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$.

Teoremă. Dacă a este element de ordin $m \in \mathbb{N}^*$ al grupului $(G, \cdot)$, atunci $H = \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$ este un subgrup de ordin m al lui G.

Demonstrație. Dacă $a^i = a^j$, unde $0 \leqslant i < j < m$, atunci $a^{j-i} = e$ cu $0 < j - i < m$, ceea ce contrazice minimalitatea lui m. Așadar $e, a, a^2, ..., a^{m-1}$ sunt m elemente distincte ale lui G, deci H are m elemente.

Cum $a^m = e = aa^{m-1} = a^2a^{m-2} = ...$, rezultă că $a^{-1} = a^{m-1} \in H$, $(a^2)^{-1} = a^{m-2} \in H$, ... $(a^{m-1})^{-1} = a \in H$. Cum și $e^{-1} = e \in H$, rezultă că oricare ar fi $x \in H$, avem $x^{-1} \in H$.

Fie $x, y \in H$, $x = a^i$, $y = a^j$ cu $0 \leqslant i, j < m$. Există $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$i + j = mq + r, \text{ cu } 0 \leqslant r < m.$$

Avem $xy = a^ia^j = a^{i+j} = (a^m)^qa^r = e^qa^r = a^r \in H$.

Rezultă că H este subgrup de ordinul m al grupului G. ■

Observații.

♦ Dacă ord$a = m$ și $a^k = e$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci m divide pe k.

Într-adevăr, scriem $k = mq + r$ cu $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < m$ și atunci $e = a^k = a^{mq+r} = (a^m)^qa^r = e^qa^r = a^r$.

Din $e = a^r$ și ord$a = m$ rezultă că $r = 0$, deci $m \mid k$.

Reciproc, dacă $a^m = e$ și din $a^k = e$, $k \in \mathbb{Z}$ rezultă $m \mid k$, atunci ord$a = m$.

♦ Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit atunci toate elementele sale sunt de ordin finit. Într-adevăr, pentru $a \in G$, toți termenii șirului $a, a^2, a^3, ..., a^i, ...$ sunt în G. Cum G este mulțime finită, termenii șirului precedent nu sunt distincți. Există $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i < j$ astfel încât $a^i = a^j$. Rezultă că $a^{j-i} = e$, unde $0 < j - i$, deci a este de ordin finit.

♦ Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ și $|z| > 1$, atunci z nu este element de ordin finit al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Într-adevăr, dacă pentru $m \in \mathbb{N}^*$ avem $z^m = 1$, atunci:

$1 = |1| = |z^m| = |z|^m$, cu $|z| > 1$. Contradicție.

18) Considerăm grupul de permutări $(S_4, \circ)$. Câte elemente are S_4? Scrieți toate subgrupurile lui. Verificați că ordinul fiecărui subgrup divide ordinul grupului.

19) Fie grupul multiplicativ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

a) Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ este element de ordin finit, atunci $|z| = 1$.

b) Dacă $z = \cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, atunci $|z| = 1$ și $z^k \neq 1$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Pentru $z \in \mathbb{C}^*$, ord $z < \infty$ dacă și numai dacă $z = \cos(r\pi) + i\sin(r\pi)$, cu $r \in \mathbb{Q}$.

20) Fie p un număr prim, $p > 2$ și

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

a) Arătați că G este grup de ordin p^3 în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Arătați că ord $A = p$ oricare ar fi $A \in G$, $A \neq I_3$.

21) Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$ astfel încât ord $a = m$. Avem:

a) ord $a^{-1} = m$.

b) $\text{ord}(bab^{-1}) = m, \forall b \in G$.

Teorema lui Lagrange (facultativ)

Principala proprietate de natură aritmetică a grupurilor finite este:

Teoremă (Lagrange). Ordinul oricărui subgrup H al unui grup finit G este divizor al ordinului grupului G.

Demonstrație

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și H un subgrup al său. Fie $n = \text{ord}G$ și $m = \text{ord}H$. Dacă $a \in G$, fie $aH = \{ax \mid x \in H\}$.

Aplicația $f : H \to aH$, $f(x) = ax$ este evident surjectivă. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$ cu $x_1, x_2 \in H$, atunci $ax_1 = ax_2$ și înmulțind la stânga cu a^{-1}, obținem $x_1 = x_2$. Rezultă că f este și aplicație injectivă. În definitiv f este aplicație bijectivă, deci aH conține m elemente.

Avem proprietatea:

$$(*)\ b \notin aH \Rightarrow aH \cap bH = \varnothing.$$

În caz contrar există $x, y \in H$ astfel încât $ax = by$, de unde $b = axy^{-1}$. Cum H este subgrup, avem $xy^{-1} \in H$, deci $b = axy^{-1} \in aH$. Absurd.

Fie $q, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = mq + r$, cu $0 \leqslant r < m$.

Trebuie să arătăm că $r = 0$. Cum $mq \leqslant n$ și cum aH are m elemente, oricare ar fi $a \in G$, se pot alege elementele $a_1, a_2, ..., a_q \in G$ astfel încât:

$a_2 \notin a_1H$

$a_3 \notin a_1H \cup a_2H$

...

$a_q \notin a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_{q-1}H$

Conform lui (*), $a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_qH$ conține mq elemente ale lui G, iar submulțimea

$$M = G \setminus (a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_qH)$$

are r elemente. Dacă $r > 0$ și $a \in M$, atunci $a_1H \cup ... \cup a_qH \cup aH$ este o submulțime a lui G cu $m(q + 1)$ elemente. Așadar $n \geqslant m(q + 1) = mq + m > mq + r = n$.

Contradicție. Rămâne adevărat că $r = 0$, deci $m \mid n$.

Corolar. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și $n = \text{ord}G$. Avem:

(1) $\forall a \in G$, $\text{ord}a \mid n$

(2) $\forall a \in G$, $a^n = e$.

Demonstrație

(1) Cum G este grup finit, toate elementele sale au ordinul finit. Fie $a \in G$ și $m = \text{ord}a$. Atunci $H = \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$ este subgrup de ordin m al lui G. Aplicând teorema lui Lagrange, rezultă că $m \mid n$.

(2) Fie $m = \text{ord}a$ și $n = mq$, $q \in \mathbb{N}^*$. Avem

$a^n = (a^m)^q = (e)^q = e$.

Ordinul unei permutări (facultativ)

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci notăm cu $A = \{1, 2, ..., n\}$.

Definiție. Fie $\sigma \in S_n$ și $A_\sigma \overset{\text{def}}{=} \{i \in A \mid \sigma(i) \neq i\}$.

Mulțimea A_σ se numește *suportul* permutării σ. Spunem că permutările $\sigma, \pi \in S_n$ sunt *disjuncte* dacă $A_\sigma \cap A_\pi = \varnothing$.

EXEMPLU

Dacă $\sigma, \pi \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, atunci $A_\sigma = \{1, 3, 6\}$, $A_\pi = \{2, 4, 5, 7\}$ și $A_\sigma \cap A_\pi = \varnothing$, deci permutările σ și π sunt disjuncte.

Observații

♦ Dacă $i \in A_\sigma$, atunci $\sigma(i) \in A_\sigma$. Într-adevăr fie $j = \sigma(i)$. Avem $i \neq j$, deci $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, de unde $\sigma(j) \neq j$, adică $j \in A_\sigma$.

♦ Pentru $\sigma \in S_n$ avem $A_\sigma = \varnothing$ dacă și numai dacă $\sigma = e$.

Teoremă. Dacă $\sigma, \pi \in S_n$ sunt permutări disjuncte, atunci $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că $(\sigma \circ \pi)(k) = (\pi \circ \sigma)(k)$, oricare ar fi $k \in A = \{1, 2, ..., n\}$.

Caz: ($k \in A_\sigma$). Avem $\sigma(k) \in A_\sigma$, deci $(\pi \circ \sigma)(k) = \pi(\sigma(k)) = \sigma(k)$ și $(\sigma \circ \pi)(k) = \sigma(\pi(k)) = \sigma(k)$.

Analog, când ($k \in A_\pi$) avem $(\pi \circ \sigma)(k) = \pi(k) = \sigma(\pi(k)) = (\sigma \circ \pi)(k)$.

Cazul ($k \notin A_\sigma \cup A_\pi$)

Avem $(\sigma \circ \pi)(k) = \sigma(\pi(k)) = \sigma(k) = k$ și analog $(\pi \circ \sigma)(k) = k$,

Așadar $(\sigma \circ \pi)(k) = (\pi \circ \sigma)(k)$, $\forall k \in A$, de unde $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$. ■

Definiție. Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. O permutare $\alpha \in S_n$ se numește *ciclu* de lungime m sau *m-ciclu*, dacă există m numere distincte $i_1, i_2, ..., i_m \in A = \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât:

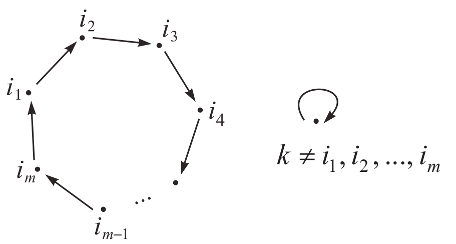
$$\alpha(i_1) = i_2,\ \alpha(i_2) = i_3,\ ...,\ \alpha(i_{m-1}) = i_m,\ \alpha(i_m) = i_1 \text{ și } \alpha(k) = k$$

oricare ar fi $k \in A$, $k \neq i_1, i_2, ..., i_m$.

Un 2-ciclu se numește *transpoziție*.

Un m-ciclu $\alpha \in S_n$ cu acțiunea din definiția precedentă, se notează $\alpha = (i_1, i_2, ..., i_m)$. Suportul lui α este $A_\alpha = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$, iar diagrama lui α este reprezentată în figura alăturată.

Evident ciclurile $(i_2, i_3, ..., i_m, i_1)$, $(i_3, i_4, ..., i_m, i_1, i_2)$, ... , $(i_m, i_1, ..., i_{m-2}, i_{m-1})$ sunt toate egale cu ciclul $\alpha = (i_1, i_2, ..., i_m)$ pentru că acționează la fel asupra numerelor $1, 2, 3, ..., n$.



Teoremă.

(1) Dacă $\alpha \in S_n$ este un m-ciclu, atunci $\text{ord}\alpha = m$.

(2) Dacă $\alpha, \beta \in S_n$ sunt două cicluri disjuncte de lungimi p, respectiv q, atunci ordinul permutării $\alpha \circ \beta$ este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor p și q.

Demonstrație. (1) Presupunem că $\alpha = (i_1, i_2, ..., i_m)$. Avem $\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha^2(i_1) = \alpha(\alpha(i_1)) = \alpha(i_2) = i_3$, ..., $\alpha^{m-1}(i_1) = i_m$ și $\alpha^m(i_1) = \alpha(i_m) = i_1$.

Analog se arată că $\alpha^m(i_2) = i_2$, ..., $\alpha^m(i_m) = i_m$.

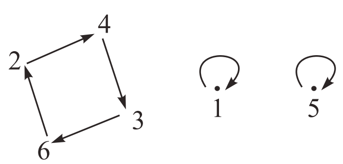
Cum $\alpha^m(k) = k$, oricare ar fi $k \neq i_1, i_2, ..., i_m$, reuzultă că $\alpha^m = e$. Evident $\alpha \neq e$, $\alpha^2 \neq e$, ..., $\alpha^{m-1} \neq e$, de unde $\text{ord}\alpha = m$.

(2) Cum α și β sunt cicluri disjuncte, avem $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ de unde $(\alpha \circ \beta)^k = \alpha^k \circ \beta^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $(\alpha \circ \beta)^k = e$ dacă și numai dacă $\alpha^k = e$ și $\beta^k = e$, adică $p \mid k$ și $q \mid k$. Acum este evident că $\text{ord}(\alpha \circ \beta) = [p, q] = \text{c.m.m.m.c. } (p, q)$. ■

Exerciții rezolvate

1) Fie $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Să se afle $\text{ord}\sigma$.

Soluție. Diagrama lui σ este reprezentată în figura alăturată.



Rezultă că σ este un ciclu de lungime 4, anume $\sigma = (2, 4, 3, 6)$ de unde $\text{ord}\sigma = 4$.

2) Fie $\sigma \in S_8$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Să se determine $\text{ord}\sigma$.

Soluție. Dacă avem în vedere definiția ordinului trebuie să găsim cel mai mic număr $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^m = e$. Se constată că $\sigma^k \neq e$ pentru $k = 1, 2, ..., 11$ și $\sigma^{12} = e$, de unde $\text{ord}\sigma = 12$.

La acest rezultat se ajunge mai rapid observând că diagrama lui σ este reprezentată în figura alăturată.

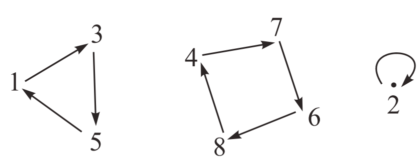


Diagrama lui σ pune în evidență ciclurile disjuncte $\alpha, \beta \in S_8$, $\alpha = (1, 3, 5)$ și $\beta = (4, 7, 6, 8)$ și se observă că $\sigma = \alpha \circ \beta$. Folosind teorema precedentă, avem

$$\operatorname{ord}\sigma = \operatorname{ord}(\alpha \circ \beta) = [\operatorname{ord}\alpha, \operatorname{ord}\beta] = [3, 4] = 12.$$

3) Fie $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$.

(1) Dacă $i_1 \in A_\sigma$, atunci în șirul $i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \ldots$ primul număr care se repetă este i_1.

(2) Dacă $i_1 \in A_\sigma$ și $\sigma^{m_1}(i_1) = i_1$ cu $m_1 \in \mathbb{N}^*$ minim, atunci $m_1 > 1$, $\alpha_1 = (i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \ldots, \sigma^{m_1-1}(i_1))$ este ciclu de lungime m_1 și $A_{\alpha_1} \subseteq A_\sigma$.

(3) Dacă $i_2 \in A_\sigma \setminus A_{\alpha_1}$ și $\sigma^{m_2}(i_2) = i_2$ cu $m_2 \in \mathbb{N}^*$ minim, atunci $m_2 > 1$, $\alpha_2 = (i_2, \alpha(i_2), \ldots \sigma^{m_2-1}(i_2))$ este ciclu de lungime m_2, $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$ și $A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \subseteq A_\sigma$.

(4) Există ciclurile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in S_n$ disjuncte două câte două astfel încât $A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \ldots \cup A_{\alpha_r} = A_\sigma$ și $\sigma = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_r$.

Soluții.

(1) și (2). Șirul $i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \ldots$ are toți termenii în A_σ; cum A_σ este mulțime finită, șirul considerat are repetiții. Fie $\sigma^{m_1}(i_1)$ cu $m_1 \in \mathbb{N}^*$, m_1 minim, primul număr care se repetă în șir. Cum $i_1 \neq \sigma(i_1)$, avem $m_1 > 1$. Cum în fiecare vârf al diagramei lui σ „sosește“ o singură săgeată, avem $\sigma^{m_1}(i_1) = i_1$. Evident $A_{\alpha_1} \subseteq A_\sigma$.

(3) Avem $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$ pentru că în fiecare vârf al diagramei lui σ „sosește” o singură săgeată.

(4) Dacă $A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \subsetneq A_\sigma$ se alege $i_3 \in A_\sigma \setminus (A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2})$ ș.a.m.d. După r pași se găsesc ciclurile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, disjuncte două câte două, astfel încât $A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \ldots \cup A_{\alpha_r} = A_\sigma$ pentru că A_σ este mulțime finită. Evident $\sigma = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_r$.

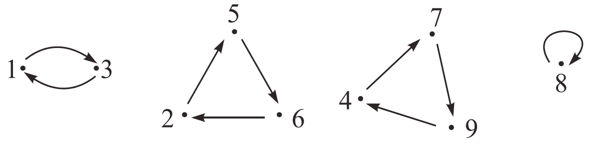
4) Fie $\sigma \in S_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 2 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Descompuneți σ în produs de cicluri disjuncte și să se afle $\operatorname{ord}\sigma$.

Soluție. Avem $A_\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Fie $i_1 \in A_\sigma$, $i_1 = 1$. Considerăm șirul: $1, \sigma(1) = 3, \sigma(3) = 1, \ldots$. Avem $\alpha_1 = (1, 3)$ și $A_{\alpha_1} = \{1, 3\}$. Fie $i_2 \in A_\sigma$, $i_2 \notin A_{\alpha_1}$. Putem lua $i_2 = 2$. Considerăm șirul:
$2, \sigma(2) = 5, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 2, \ldots$

Avem $\alpha_2 = (2, 5, 6)$ și $A_{\alpha_2} = \{2, 5, 6\}$. Fie $i_3 \in A_\sigma$, $i_3 \notin A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2}$. Putem lua $i_3 = 4$. Considerăm șirul:
$4, \sigma(4) = 7, \sigma(7) = 9, \sigma(9) = 4, \ldots$. Avem $\alpha_3 = (4, 7, 9)$ și $A_{\alpha_3} = \{4, 7, 9\}$. Deci $A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup A_{\alpha_3} = A_\sigma$. Rezultă că $\sigma = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3$ și $\operatorname{ord}\sigma$ este egal cu c.m.m.m.c. al numerelor 2, 3 și 3, deci $\operatorname{ord}\sigma = 6$.

La același rezultat se ajunge mai simplu considerând diagrama permutării σ



care pune în evidență ciclurile $\alpha_1 = (1, 3)$, $\alpha_2 = (2, 5, 6)$, $\alpha_3 = (4, 7, 9)$ și egalitatea $\sigma = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $U=\{z\in\mathbb{C}^* \mid |z|=1\}$. Arătați că U este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2. Fie $H=\{z\in\mathbb{C}^* \mid \exists\, k\in\mathbb{N}^*, z^k=1\}$. Arătați că H este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ și $H \underset{\neq}{\subset} U$, unde U este subgrupul de la exercițiul 1.

3. Fie $H=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA=A\}$ și $N=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA=-A\}$.

Arătați că H și N sunt subgrupuri ale grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ și că oricare ar fi $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, există $B\in H$ și $C\in N$ unic determinate astfel încât $A=B+C$.

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup și H un subgrup al lui G cu două elemente, $H=\{e, a\}$. Arătați că $a^2=e$. Reciproc, dacă $a\in G$, $a\neq e$ și $a^2=e$, atunci $H=\{e, a\}$ este subgrup al lui G. Determinați subgrupurile cu două elemente ale grupului $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și ale grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

5. Fie $(G, \cdot)$ un grup și H un subgrup al lui G cu trei elemente, $H=\{e, a, b\}$.

Arătați că $a^2=b$, $b^2=a$ și $a^3=b^3=e$. Determinați subgrupurile cu trei elemente ale grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

6. Fie G mulțimea tuturor șirurilor $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de numere reale. Arătați că G este grup abelian în raport cu operația $(x_n)_{n\geqslant 0}+(y_n)_{n\geqslant 0}=(x_n+y_n)_{n\geqslant 0}$ și că mulțimea H a șirurilor convergente este un subgrup al lui G.

7. Dacă H este un subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$, atunci există $n\in\mathbb{N}$ unic determinat astfel încât $H=n\mathbb{Z}$.

8. Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar H, N două subgrupuri ale sale. Arătați că $H\cap N$ este subgrup al lui G.

Arătați că în grupul $(\mathbb{Z}, +)$ avem $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}=6\mathbb{Z}$.

9. Fie $m, n, p, q\in\mathbb{N}$,
$H=\left\{\begin{pmatrix} ma & nb \\ pc & qd \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c, d\in\mathbb{Z}\right\}$. Arătați că H este subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$.

10. Fie G un grup, iar H și N două subgrupuri ale sale astfel încât $H\neq G$, $N\neq G$. Arătați că $H\cup N\neq G$.

11. Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o parte nevidă și finită a lui G, stabilă în raport cu operația grupului G.

Arătați că H este subgrup al lui G.

12. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a\in G$ și $C_G(a)=\{x\in G \mid xa=ax\}$.

Arătați că $C_G(a)$ este subgrup al lui G. Determinați elementele lui $C_G(a)$ în cazul $G=GL_2(\mathbb{R})$ și $a=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Determinați ordinul fiecărui element al grupului $(S_3, \circ)$ și toate subgrupurile acestui grup.

14. Determinați ordinele elementelor grupurilor $(\mathbb{Z}_6, +)$ și $(\mathbb{Z}_8, +)$.

15. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b\in G$ astfel încât $ab=ba$, ord$a=m$, ord$b=n$ și $(m, n)=1$.

Arătați că elementul $c=ab$ are ordinul mn.

16. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a\in G$, ord$a=m$. Arătați că pentru orice $k\in\mathbb{Z}$ avem $\operatorname{ord} a^k=\dfrac{m}{(k,m)}$. Demonstrați că ord$(a^k)=m$ dacă și numai dacă $(k, m)=1$.

17. Fie H un subgrup de ordinul m al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

a) Arătați că $H=\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{m-1}\}$, unde $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$.

b) Arătați că în grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ există exact $\varphi(m)$ elemente de ordin m.

c) Determinați elementele de ordinul al 4-lea și cele de ordinul al 6-lea din grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

18. Fie grupul $(D_n, \cdot)$ de ordinul $2n$, $n\geqslant 3$ în care există două elemente a și b astfel încât ord$a=n$, ord$b=2$ și $ab=ba^{n-1}$.

Arătați că $D_n=\{e, a, a^2, ..., a^{n-1}, b, ba, ba^2, .., ba^{n-1}\}$ și că $a^ib^j=b^ja^{i(n-1)^j}$.

19. Fie $n\geqslant 3$, $A=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$,
$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Arătați că $A, B\in GL_2(\mathbb{R})$, ord$A=n$, ord$B=2$, $AB=BA^{n-1}$ și că $H=\{I_2, A, ..., A^{n-1}, B, BA, .., BA^{n-1}\}$ este un subgrup de ordinul $2n$ al grupului $GL_2(\mathbb{R})$.

Arătați că $H\simeq D_n$, unde D_n este grupul de la exercițiul 18.

20. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $(S_G, \circ)$ grupul permutărilor mulțimii suport a grupului dat. Dacă $a\in G$, fie $\theta_a: G\to G$, $\theta_a(x)=ax$.

Arătați că $\theta_a\in S_G$, $\theta_a\circ\theta_b=\theta_{ab}$, $\forall a, b\in G$, $H=\{\theta_a \mid a\in G\}$ este subgrup al grupului $(S_G, \circ)$ și $G\simeq H$ (orice grup G este izomorf cu un subgrup al unui grup de permutări).

21. Fie 3-ciclul $\alpha=(i_1, i_2, i_3)\in S_n$.

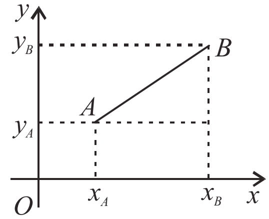
Arătați că $\alpha^2(i_1)=i_3$, $\alpha^3(i_1)=i_1$, $\alpha^3=e$, ord$\alpha=3$.

Izometrii într-un plan (facultativ)

1. Grupul izometriilor planului euclidian (facultativ)

Fie $\mathscr{P}$ un plan înzestrat cu un reper cartezian xOy. Dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ sunt două puncte din $\mathscr{P}$, distanța de la A la B este

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$



Teoremă. Fie A, B, C trei puncte necoliniare din planul $\mathscr{P}$. Dacă distanțele de la punctele P și Q la fiecare dintre punctele A, B, C sunt egale, atunci $P = Q$.

Demonstrație. Prin ipoteză $d(P, A) = d(Q, A)$, adică $\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2}$, deci

$$(1)\quad x_P^2 - x_Q^2 + y_P^2 - y_Q^2 - 2x_A(x_P - x_Q) - 2y_A(y_P - y_Q) = 0\ .$$

Analog, folosind ipotezele $d(P, B) = d(Q, B)$ și $d(P, C) = d(Q, C)$, se obțin egalitățile

$$(2)\quad x_P^2 - x_Q^2 + y_P^2 - y_Q^2 - 2x_B(x_P - x_Q) - 2y_B(y_P - y_Q) = 0$$

$$(3)\quad x_P^2 - x_Q^2 + y_P^2 - y_Q^2 - 2x_C(x_P - x_Q) - 2y_C(y_P - y_Q) = 0$$

Scăzând (2) și (3) din (1) se obține sistemul omogen în necunoscutele $u = x_p - x_Q$, $v = y_p - y_Q$

$$(S)\quad \begin{cases} (x_B - x_A)u + (y_B - y_A)v = 0 \\ (x_C - x_A)u + (y_C - y_A)v = 0 \end{cases}$$ având determinantul $$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} \neq 0\ .$$

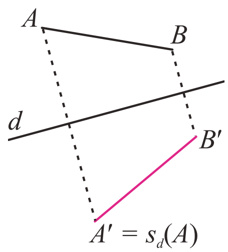
Rezultă că sistemul (S) admite numai soluția banală, deci $u = v = 0$, de unde $x_P = x_Q$, $y_P = y_Q$, adică $P = Q$. ■

Definiție. O funcție $T : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ se numește *transformare geometrică* a planului $\mathscr{P}$. Vom spune că T este *izometrie* (*mișcare rigidă*) dacă conservă distanțele dintre puncte: $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$, $\forall\ A, B \in \mathscr{P}$.

O verificare imediată stabilește că următoarele transformări geometrice sunt izometrii.

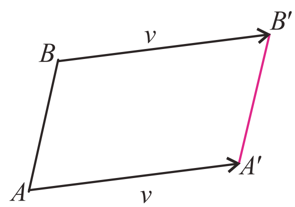
♦ *Simetria axială.*

Fie d o dreaptă în planul $\mathscr{P}$. Se numește *simetria de axă d* funcția $s_d : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ cu $s_d(A) = A'$, unde d este mediatoarea segmentului $[AA']$.



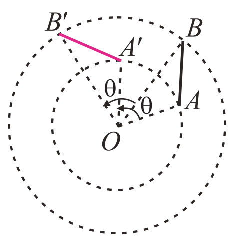
♦ *Translația (deplasarea paralelă) de vector v.*

Dacă v este un vector din planul $\mathscr{P}$, definim funcția $t_{\bar{v}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $t_{\bar{v}}(A) = A' \Leftrightarrow v = \overrightarrow{AA'}$, numită *translația de vector v*.



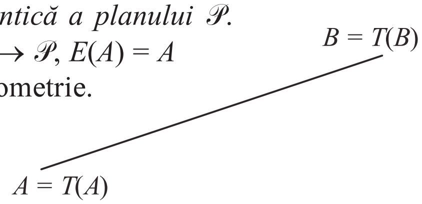
♦ *Rotația în jurul unui punct.*

Fie O un punct din $\mathscr{P}$. Notăm cu R_θ rotația de unghi $\theta \in [0, \infty)$ și de centru O, în sens invers acelor ceasornicului.

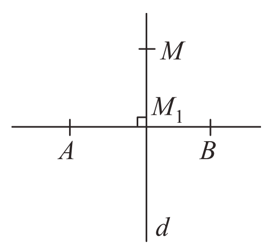


♦ *Funcția identică a planului $\mathscr{P}$.*

Funcția $E : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $E(A) = A$ este evident o izometrie.



Definiție. O submulțime F a unui plan $\mathscr{P}$ se numește *figură plană*.

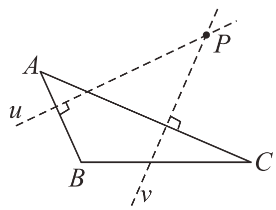


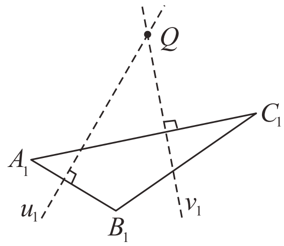
Fie $T : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ o izometrie a planului $\mathscr{P}$. Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, atunci $d(B, C) < d(B, A) + d(A, C)$. Rezultă că $d(T(B), T(C)) < d(T(B), T(A)) + d(T(A), T(C))$, deci punctele $T(A)$, $T(B)$, $T(C)$ sunt, de asemenea, necoliniare.

Dacă $A, B \in \mathscr{P}$, $A \neq B$ și $k \in \mathbb{R}$, atunci locul geometric al punctelor $M \in \mathscr{P}$ cu proprietatea că $MA^2 - MB^2 = k$ este o dreaptă d perpendiculară pe dreapta AB în punctul M_1 astfel încât $M_1A^2 - M_1B^2 = k$. Acum putem demonstra:

Teoremă. Orice izometrie $T : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ este funcție bijectivă.

Demonstrație. Evident, orice izometrie este funcție injectivă. Rămâne să arătăm că pentru orice punct $Q \in \mathscr{P}$ există un punct $P \in \mathscr{P}$ astfel încât $T(P) = Q$.





Fie în acest scop A, B, C trei puncte necoliniare ale planului $\mathscr{P}$ și $A_1 = T(A), B_1 = T(B), C_1 = T(C)$.

Fie $\alpha = QA_1^2 - QB_1^2$ și $\beta = QA_1^2 - QC_1^2$.

Fie u, v, u_1, v_1 locurile geometrice al punctelor $M \in \mathscr{P}$ pentru care avem respectiv $MA^2 - MB^2 = \alpha$, $MA^2 - MC^2 = \beta$, $MA_1^2 - MB_1^2 = \alpha$, $MA_1^2 - MC_1^2 = \beta$. Fie P intersecția dreptelor u și v. Cum T este izometrie, avem $T(B) \in u_1 \cap v_1 = \{Q\}$ de unde $T(P) = Q$. ■

Teoremă. Să notăm cu $Izom(\mathscr{P})$ mulțimea tuturor izometriilor planului $\mathscr{P}$. Dacă T_1 și T_2 sunt izometrii, atunci și $T_1 \circ T_2$ este o izometrie. $(Izom(\mathscr{P}), \circ)$ este un grup, numit *grupul izometriilor* planului $\mathscr{P}$.

Demonstrație. Compunerea a două izometrii este izometrie pentru că $\forall\ A, B \in \mathscr{P}$, avem
$d((T_1 \circ T_2)(A), (T_1 \circ T_2)(B)) = d(T_1(T_2(A)), T_1(T_2(B)) = d(T_2(A), T_2(B)) = d(A, B)$.

Compunerea izometriilor este asociativă și admite ca element neutru funcția identică a lui $\mathscr{P}$ notată cu E.

Să arătăm că inversa unei izometrii este izometrie, adică $\forall\ A', B' \in \mathscr{P}$, $d(T^{-1}(A'), T^{-1}(B')) = d(A', B')$.

Cum T este bijectivă, există $A, B \in \mathscr{P}$ astfel încât $T(A) = A'$ și $T(B) = B'$ și atunci $T^{-1}(A') = A$, $T^{-1}(B') = B$. Folosind faptul că T este izometrie, avem: $d(T^{-1}(A'), T^{-1}(B')) = d(A, B) = d(T(A)), T(B)) = d(A', B')$. ■

Corolarul 1. Dacă o izometrie T invariază (fixează) trei puncte necoliniare A, B, C, atunci $T = E$ (E este funcție identică a planului $\mathscr{P}$).

Demonstrație.

Dacă $T \neq E$, există $P \in \mathscr{P}$ cu $T(P) \neq P$. Fie $Q = T(P)$. Avem $d(Q, A) = d(T(P), A) = d(T(P), T(A)) = d(P, A)$.

Analog se arată că $d(Q, B) = d(P, B)$, $d(Q, C) = d(P, C)$. Aplicând teorema, rezultă $Q = P$, contradicție. ■

Corolarul 2. Dacă izometriile S și T coincid pe trei puncte necoliniare A, B, C, atunci $S = T$.

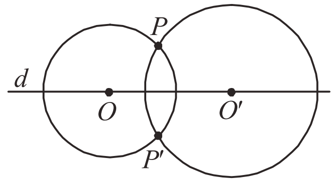
Demonstrație. Conform ipotezei, avem $S(A) = T(A)$, $S(B) = T(B)$ și $S(C) = T(C)$. Fie izometria $U = S^{-1} \circ T$. Avem: $U(A) = (S^{-1} \circ T)(A) = S^{-1}(T(A)) = S^{-1}(S(A)) = A$ și analog $U(B) = B$, $U(C) = C$.

Conform corolarului 1 avem $S^{-1} \circ T = E$, de unde $S = T$. ■

Corolarul 3. Fie T o izometrie care admite un punct fix O, diferită de funcția identică a planului $\mathscr{P}$. Atunci T este o rotație de centru O sau o simetrie axială față de o dreaptă d care trece prin O.

Demonstrație. Fie $P \neq O$ și $r = d(O, P)$; atunci $T(P)$ se află pe cicumferința cercului $\mathscr{C}(O, r)$ de centru O și rază r, pentru că $d(O, T(P)) = d(T(O), T(P)) = d(O, P) = r$.

Cazul I: există $O' \neq O$ astfel încât $T(O') = O'$.



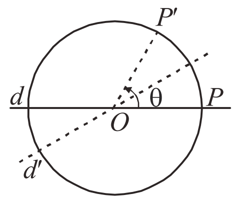
Fie d dreapta OO' și punctul P cu $P \notin d$. Dacă $T(P) = P$, atunci $T = E$, deoarece fixează punctele necoliniare O, O' și P. Prin ipoteză $T \neq E$, rezultă că $T(P) \neq P$.

Fie $P' = T(P)$. Punctul P' se află pe cicumferințele cercurilor $\mathscr{C}(O, r)$ și $\mathscr{C}(O', r')$, unde $r = d(O, P)$, $r' = d(O', P)$ și cum $P \neq P'$, avem $P' = s_d(P)$.

Cum $s_d(O) = O = T(O)$, $s_d(O') = O' = T(O')$ și $s_d(P) = P' = T(P)$, avem $T = s_d$, conform corolarului 2.

Cazul II: O este singurul punct fix al lui T.

Fie $P \neq O$ și $P' = T(P)$. Cum $T(O) = O$, P' se găsește pe circumferința cercului $\mathscr{C}(O, r)$, unde $r = d(O, P)$. Fie θ măsura unghiului $\widehat{POP'}$ și R_θ rotația de centru O și unghi θ.



Fie $S = R_\theta^{-1} \circ T$. Avem $S(O) = O$ și $S(P) = P$. Dacă $S \neq E$ din corolarul 2 rezultă că $S = s_d$, unde d este dreapta care trece prin O și P. Din $R_\theta^{-1} \circ T = s_d$ rezultă $T = R_\theta \circ s_d$.

Dar $R_\theta \circ s_d$ fixează toate punctele bisectoarei d' a unghiului $\widehat{POP'}$, deci T are această proprietate, contrar ipotezei cazului pe care îl examinăm. Rămâne adevărat că $S = E$, iar din $R_\theta^{-1} \circ T = E$ rezultă $T = R_\theta$. ■

2. Grupul de simetrie al unei figuri plane (facultativ)

Definiție.

Fie F o *figură plană* și $T : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ o izometrie; notăm cu $T(F) = \{T(P) \mid P \in F\}$. Spunem că T *invariază* (global) pe F dacă $T(F) = F$.

O izometrie T care invariază pe F se numește *simetrie* a figurii F. Notăm cu $Sym(F)$ mulțimea tuturor simetriilor figurii F. Evident $E \in Sym(F)$, deci $Sym(F)$ este o parte nevidă a grupului $(Izom(\mathscr{P}), \circ)$.

EXEMPLE

1) Fie F circumferința unui cerc de centru O. Orice rotație R_θ cu centrul în O aparține lui $Sym(F)$.

2) Fie d' o dreaptă perpendiculară pe dreapta d; atunci $s_d \in Sym(d')$, s_d fiind simetria în raport cu d. Oricare ar fi un vector $\vec{v}$ cu suportul paralel cu d', $t_{\vec{v}} \in Sym(F)$, $t_{\vec{v}}$ fiind translația de vector $\vec{v}$.

Teoremă.

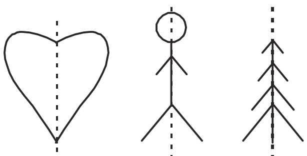
Fie F o figură plană; atunci $(Sym(F), \circ)$ este un subgrup al grupului $(Izom(\mathscr{P}), \circ)$, numit *grupul de simetrie* al lui F.

Demonstrație. Dacă $S, T \in Sym(F)$, atunci $S(F) = F$ și $T(F) = F$. Avem: $(S \circ T)(F) = S(T(F)) = S(F) = F$, deci $S \circ T \in Sym(F)$. De asemenea: $F = E(F) = (S^{-1} \circ S)(F) = S^{-1}(S(F)) = S^{-1}(F)$, deci $S^{-1} \in Sym(F)$. ■

Simetriile posibile ale figurilor plane se clasifică astfel:

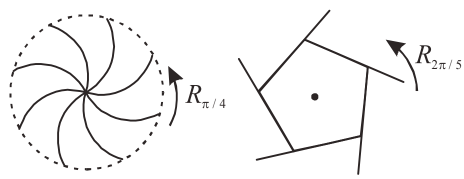
♦ *Simetrii bilaterale.*

Sunt simetriile axiale care invariază o figură F.



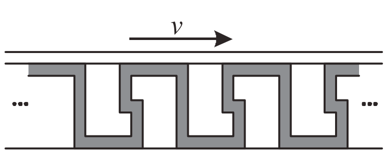
♦ *Simetrii rotaționale.*

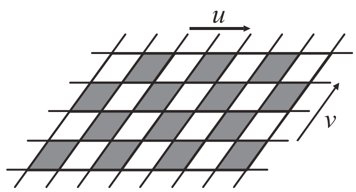
Sunt rotații în jurul unui punct care invariază o figură F.



♦ *Simetrii translaționale.*

Translația $t_{\vec{v}}$ care invariază o figură plană F, cum sunt ornamentele unidimensionale sau cele bidimensionale.

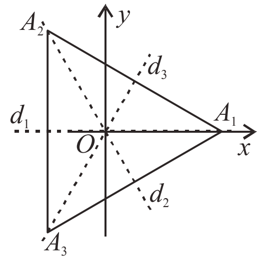




Se presupune că ornamentele unidimensionale și cele bidimensionale se întind la infinit pe direcțiile dreptelor suport ale vectorilor v, respectiv u și v.

3. Grupul diedral D_n (facultativ)

Definiție.
Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ și P_n poligonul regulat cu n laturi din planul $\mathscr{P}$ (P_n este format din toate punctele care se găsesc pe laturile sale). Grupul de simetrie al lui P_n se notează $D_n = Sym(P_n)$ și se numește *grupul diedral*.



Dacă $T \in D_n$, atunci, T conservând distanțele, se poate arăta ușor că aplică vârfuri vecine în vârfuri vecine și laturi peste laturi.

Vom determina efectiv grupul D_3, deci grupul de simetrie al triunghiului echilateral.

Alegem un reper cartezian xOy cu originea în centrul de greutate al lui P_3 și cu unul din vârfuri pe semiaxa Ox.

Fie $R = R_{2\pi/3}$ rotația de centru O și unghi $\dfrac{2\pi}{3}$. Atunci $R^2 = R \circ R = R_{4\pi/3}$, $R^3 = R^2 \circ R = R_{6\pi/3} = R_{2\pi} = E$

$E, R, R^2 \in D_3 = Sym(P_3)$. Fie d_1, d_2, d_3 dreptele determinate de O și vârfurile A_1, A_2, A_3. Evident $s_{d_1}, s_{d_2}, s_{d_3} \in D_3$.

Arătăm că $D_3 = \{E, R, R^2, s_{d_1}, s_{d_2}, s_{d_3}\}$.

Într-adevăr, fie $T \in D_3$. Cum două puncte de pe laturile lui P_3 sunt la distanță egală cu lungimea unei laturi dacă și numai dacă sunt vârfuri, rezultă că $\{T(A_1), T(A_2), T(A_3)\} = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Cazul I: $\boxed{T(A_1) = A_1.}$ Sunt posibile subcazurile: (i) $T(A_2) = A_3$ și $T(A_3) = A_2$ sau (ii) $T(A_2) = A_2$ și $T(A_3) = A_3$

(i) T acționează asupra punctelor necoliniare A_1, A_2, A_3 la fel ca s_{d_1}. Aplicând corolarul 2 obținem $T = s_d$.

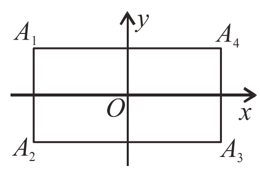
(ii) Aplicând corolarul 1 obținem $T = E$.

Cazul II: $\boxed{T(A_1) = A_2.}$ Sunt posibile subcazurile: (j) $T(A_2) = A_3$ și $T(A_3) = A_1$ sau (jj) $T(A_2) = A_1$ și $T(A_3) = A_3$.

În subcazul (j) acțiunea lui T coincide cu cea a lui R pe punctele A_1, A_2, A_3, deci $T = R$.

În subcazul (jj) se obține $T = R^2$ sau $T = s_{d_3}$.

4. Grupul de simetrie al unui dreptunghi (facultativ)



Fie dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$, de laturi $A_2A_3 = a$, $A_2A_1 = b$, $a > b$, raportat la reperul cartezian xOy. Fie R rotația de unghi π și centru O și simetriile s_x și s_y față de axa absciselor, respectiv ordonatelor.

Fie G grupul de simetrie al dreptunghiului. Vom arăta că $G = \{E, R, s_x, s_y\}$. Evident, E, R, s_x și s_y sunt în G. Fie $T \in G$. Cum T invariază distanțele dintre vârfuri, avem: $\{T(A_1), T(A_2), T(A_3), T(A_4)\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Cazul I: $\boxed{T(A_1) = A_1.}$

Cum $d(T(A_2), A_1) = d(T(A_2), T(A_1)) = d(A_2, A_1) = b$, iar A_2 este unicul vârf la distanța b de A_1, avem $T(A_2) = A_2$.

Analog, rezultă că $T(A_4) = A_4$. Așadar T acționează la fel cu E pe punctele necoliniare A_1, A_2, A_4, de unde $T = E$.

Cazul II: $\boxed{T(A_1) = A_2.}$ Punctul $T(A_2)$ este la distanța b de $T(A_1) = A_2$, deci $T(A_2) = A_1$ și $T(A_4)$ este la distanța a de $T(A_1) = A_2$, deci $T(A_4) = A_3$. Rezultă că T acționează ca s_x pe punctele necoliniare A_1, A_2, A_4, de unde $T = s_x$.

Cazul III: $\boxed{T(A_1) = A_3.}$ Avem $T = R$.

Cazul IV: $\boxed{T(A_1) = A_4.}$ Avem $T = s_y$.

PROBLEME PROPUSE

1. Simetria axială este o izometrie?

2. Rotația este o izometrie?

3. Translația este o izometrie?

4. Fie $S:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ o izometrie, $O\in\mathscr{P}$, $O'=S(O)$, $\vec{v}=\overrightarrow{O'O}$ și $T=t_{\vec{v}}\circ S$. Arătați că $T(O)=O$ și folosiți apoi corolarul 2 pentru a obține o descriere a lui S prin simetrii axiale, rotații și translații.

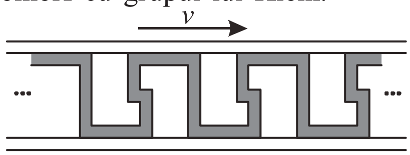
5. Fie $T:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ o izometrie a planului $\mathscr{P}$ și $A, B\in\mathscr{P}$. Arătați că imaginea segmentului $[AB]$ prin T este segmentul $[A'B']$, unde $A'=T(A)$ și $B'=T(B)$.

6. Determinați grupul de simetrie al unui pătrat.

7. Arătați că $D_3\simeq S_3$.

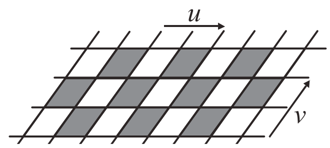
8. Grupul de simetrie al unui dreptunghi (care nu este pătrat) este izomorf cu grupul lui Klein.

9. Grupul de simetrie translațională al ornamentului unidimensional este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

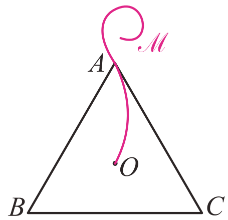


10. Arătați că grupul de simetrie al ornamentului bidimensional conține un subgrup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +)$ a cărui operație este:

$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$.



11. Un subgrup G al grupului $(Izom(\mathscr{P}), \circ)$ se numește *grup de izometrii* ale planului $\mathscr{P}$. Dacă $P\in\mathscr{P}$, atunci mulțimea $Orb_G(P)=\{T(P)\mid T\in G\}$ se numește *orbita* punctului P relativ la G.
a) Arătați că pentru orice $T\in G$, $T(Orb_G(P))=Orb_G(P)$.
b) Fie $\mathscr{M}\subset\mathscr{P}$ mulțimea punctelor de pe curba din desenul alăturat și fie $F=\bigcup\limits_{P\in\mathscr{M}} Orb_G(P)$, unde $G=D_3$. Desenați figura F și precizați grupul său de simetrie.



Teste de evaluare

Testul 1

(3p) **1.** Fie $M=\left\{\begin{pmatrix}2x & 3y\\ y & 2x\end{pmatrix}\middle|\, x, y\in\mathbb{Q}, 4x^2-3y^2=1\right\}\subset\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$.

Arătați că mulțimea M este infinită și stabilă în $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(4p) **2.** Fie mulțimea $M=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$ înzestrată cu operația $x*y\overset{\text{def}}{=}x+y+\frac{1}{2}xy$. Arătați că „$*$“ este o operație comutativă, asociativă, admite element neutru și orice element din M este simetrizabil.

(2p) **3.** Fie mulțimea $G=(a, +\infty)$, $a\in\mathbb{R}$, $k>0$ și operația $x*y=k(x-a)(y-a)+a$. Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

(2p) **1.** Fie mulțimea $M=(1, +\infty)\setminus\{2\}$ și operația: $x*y\overset{\text{def}}{=}1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$.

Demonstrați că „$*$“ este comutativă.

(3p) **2.** Fie mulțimea $M=[k, +\infty)$, $k\in\mathbb{R}$ și operația $x*y\overset{\text{def}}{=}xy-k(x+y)+k^2+k$. Demonstrați că M este stabilă în $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$“. Arătați că legea este comutativă și admite element neutru.

(4p) **3.** Arătați că mulțimea

$$G=\left\{\begin{pmatrix}x+4y & 2y\\ -7y & x-4y\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}^*, y\in\mathbb{R}, x^2-2y^2=1\right\}$$

cu înmulțirea matricelor formează grup comutativ.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 3

(2p) **1.** Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție „$*$“ definită prin: $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

Verificați dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$“.

2. Fie $G = \left\{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}, a \neq -2 \right\}$.

(2p) i) Arătați că $\forall\, A, B \in G$, $A \cdot B = B \cdot A$.

(2p) ii) Arătați că $A + 2I_3$ este inversabilă, $\forall\, A \in G$ unde I_3 este matricea unitate.

(3p) iii) Pe G definim legea „$*$“ prin: $A * B = AB + 2(A + B + I_3)$. Arătați că $\forall A, B \in G$, $A * B \in G$ și că legea „$*$“ este asociativă, comutativă și are element neutru.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 4

1. Fie $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \middle| A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \right\}$.

(1p) a) Arătați că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(1p) b) Arătați că înmulțirea matricelor definită pe M este asociativă, comutativă și are element neutru.

(1p) c) Determinați din mulțimea M elementele simetrizabile, în raport cu înmulțirea matricelor.

2. Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ definim legea de compoziție „$\circ$“ prin: $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(2p) a) Verificați dacă legea de compoziție „$\circ$“ este asociativă.

(2p) b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$“.

(2p) c) Determinați elementele din $\mathbb{C}$ care nu sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$“.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Test grilă

Pentru fiecare dintre exercițiile următoare, încercuiți varianta corectă de răspuns.

1. Fie pe $\mathbb{R}$ operația $x * y = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mulțimea tripletelor (a, b, c) pentru care $(\mathbb{R}, *)$ este grup, are:

a) 0 elemente; b) 1 element; c) 2 elemente; d) 3 elemente; e) o infinitate de elemente.

2. Fie $M = \left\{ A_x \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A_x = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in D \right\}$. Dacă $(M, \cdot)$ este grup cu element neutru E, atunci:

1) a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$; b) $D = \mathbb{R}$; c) $D = [0, +\infty)$; d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; e) $D = \mathbb{R}^*$;

2) a) $E = I_3$; b) $E = O_3$; c) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Se consideră ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$. Fie A mulțimea tripletelor (a, b, c) pentru care soluțiile ecuației date formează grup abelian în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe. Dacă n este numărul elementelor mulțimii A, atunci:

a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 5$.

4. Fie $(G, *)$ grup, unde $G = (2, +\infty)$ și $x * y = xy - 2(x + y) + 6$. Atunci $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ este izomorfism de la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la $(G, *)$ pentru:

a) $a = 1, b = 2$; b) $a = 3, b = 0$; c) $a = 1, b = -1$; d) $a = 0, b = 1$; e) $a = 0, b = 2$.

Inele și corpuri

Inele

Vom studia în acest capitol o altă structură algebrică – structura de *inel*. Noțiunea de inel are ca prototip mulțimea întregilor $\mathbb{Z}$, înzestrată cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire.

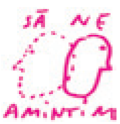
Pentru conceptul abstract de inel există modele de mare interes în Algebră (inele de matrice, inele de polinoame), în Analiza matematică (inele de funcții), în Logică (inele booleene) etc.

Cum introduceți datele într-un computer când aveți de calculat expresii în care apar mai multe operații. Exemplu: $(2 + 3\cdot 5) : 3 - 6 : 5$.

Definiția inelului

Inelul este un obiect matematic de tipul $(R, *, \circ)$, unde R este o mulțime nevidă, iar „$*$" și „$\circ$" sunt două legi de compoziție pe R care verifică o listă de axiome. Din axiome rezultă unele proprietăți care se regăsesc la operațiile de adunare și înmulțire în cazul numerelor, matricelor, polinoamelor, funcțiilor etc.

Pentru a defini noțiunea de inel vom folosi noțiunea de *monoid*.



Definiție. O mulțime nevidă M este *monoid* în raport cu o lege de compoziție internă „$\circ$", dacă „$\circ$" este asociativă și admite element neutru.

Definiție. Un triplet $(R, *, \circ)$, unde R este o mulțime nevidă iar „$*$" și „$\circ$" sunt două legi de compoziție pe R (numite *lege aditivă* respectiv *lege multiplicativă*), se numește *inel* dacă:

(G) $(R, *)$ este grup abelian

(M) $(R, \circ)$ este monoid

(D) „$\circ$" este distributivă față de „$*$":

$\forall x, y, z \in R$, $x\circ(y * z) = (x\circ y) * (x\circ z)$, $(y * z)\circ x = (y\circ x) * (z\circ x)$.

Afirmația că $(R, *)$ este grup abelian revine la faptul că operația aditivă a unui inel R verifică axiomele:

(G_1) $\forall x, y, z \in R$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.

(G_2) $\exists e \in R$, $\forall x \in R$, $e * x = x * e = x$

(G_3) $\forall x \in R$, $\exists -x \in R$, $x * (-x) = (-x) * x = e$

(G_4) $\forall x, y \in R$, $x * y = y * x$.

Afirmația că $(R, \circ)$ este monoid revine la faptul că legea multiplicativă a inelului R este asociativă și admite element neutru:

(M_1) $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$, $\forall x, y, z \in R$.

(M_2) $\exists u \in R$ astfel încât $u\circ x = x\circ u = x$, $\forall x \in R$.

1) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel. Considerăm pe R legile de compoziție „$\top$" și „$\perp$" definite prin

$a \top b = a + b - 1$,

$a \perp b = a + b - ab$.

Arătați că $(R, \top, \perp)$ este inel.

2) Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Arătați că $A^3 = O$ și $(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3$.

3) Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că R este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că formează inel în raport cu operațiile induse. Determinați elementele inversabile ale inelului R.

4) Fie $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Pe R considerăm legile de compoziție „$\top$" și „$\perp$" definite prin

$(a, b) \top (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \perp (c, d) = (ac, ad + bc)$.

Arătați că $(R, \top, \perp)$ este inel și determinați elementele sale inversabile.

Notații și denumiri. Vom spune că $(R, *)$ este *grupul aditiv* al inelului R, iar $(R, \circ)$ *monoidul multiplicativ* al inelului R. Ansamblul de condiții (G_1) - (G_4), (M_1), (M_2), (D) poartă numele de *axiomele inelului*. Elementele e și u de la axiomele (G_2), respectiv (M_2) sunt unic determinate (pentru că sunt elemente neutre) și se numesc *elementul zero*, respectiv *elementul unitate* al inelului R; ele sunt numerele reale 0 și 1, dacă operația aditivă este adunarea și operația multiplicativă este înmulțirea pe $\mathbb{R}$, mulțimea numerelor reale. În general, natura elementelor neutre este cea a elementelor mulțimii suport a inelului R (de exemplu matrice, polinoame, clase de resturi etc.).

Elementele $t \in R$ simetrizabile în raport cu înmulțirea (elementele inversabile) se numesc *unități* ale inelului R, printre ele fiind și elementul unitate u.

Definiție. Spunem că *inelul R nu are divizori ai lui zero*, dacă

$$x \neq e,\ y \neq e \Rightarrow xy \neq e,$$

unde e este elementul neutru al legii aditive, în caz contrar spunem că R este *inel cu divizori ai lui zero*.

Un *inel* R se numește *comutativ* dacă verifică și axioma:

$$(M_3)\ x \circ y = y \circ x,\ \forall\ x, y \in R.$$

Un inel R comutativ, cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero, se numește *domeniu de integritate*.

Remarcă. În literatura matematică un inel se notează de regulă cu R (de la *ring* în engleză) sau cu A (de la *anneau* în franceză). Vom folosi prima notație, rezervând litera A pentru notarea matricelor.

5) Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că R este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și formează inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu operațiile induse.

6) Fie $a \in \mathbb{Z}_8$, $a = \hat{2}$.
Arătați că $a^3 = \hat{0}$ și $(\hat{1} + a)(\hat{1} - a + a^2) = \hat{1}$.

7) Fie R un inel și $a \in R$. Dacă $a^m = 0$ cu $m \in \mathbb{N}^*$, atunci $1 - a$ este inversabil și $(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1}$

8) Pe $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legile de compoziție „⊤“ și „⊥“ prin
$(a, b) \top (c, d) = (a + c, b + d)$
$(a, b) \perp (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
Arătați că $(R, \top, \perp)$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero.

9) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in R$. Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare, calculați în două moduri produsul $(1 + a)(1 + b)$ și deduceți că, într-un inel, comutativitatea adunării este consecință a celorlalte axiome ale inelului.

Exemple de inele – Temă de sinteză

♦ *Inelul* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *al numerelor întregi*

Adunarea numerelor întregi este asociativă, comutativă, admite numărul 0 ca element neutru și orice număr întreg are opus. Așadar, $(\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian.

Înmulțirea numerelor întregi este asociativă și admite numărul 1 ca element neutru, deci $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este monoid.

Cum înmulțirea numerelor întregi este comutativă și distributivă față de adunare, rezultă că $\mathbb{Z}$ este inel comutativ. Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, atunci $xy \neq 0$, deci $\mathbb{Z}$ este domeniu de integritate.

Analog se arată că $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt inele comutative. În aceste inele orice număr $x \neq 0$ este inversabil. În inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ singurele elemente inversabile sunt 1 și -1, $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$.

♦ *Inelul* $\mathbb{Z}[i]$ *al întregilor lui Gauss*

Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ *mulțimea tuturor întregilor lui Gauss*. Numerele complexe $a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ se numesc *întregi ai lui Gauss* (de exemplu: $2 + 3i$, $-1 + 2i$, $4 = 4 + 0i$, $i = 0 + 1 \cdot i$ sunt întregi ai lui Gauss).

Dacă $z, w \in \mathbb{Z}[i]$, $z = a + bi$, $w = c + di$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $z + w = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{Z}[i]$ și $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{Z}[i]$. Rezultă că $\mathbb{Z}[i]$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe și, evident, operațiile induse pe $\mathbb{Z}[i]$ verifică axiomele (G_1), (G_4), (M_1), (M_3) și (D).

Cum $0 = 0 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$ și $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$, operațiile induse verifică și axiomele (G_2) și (M_2).

Dacă $z \in \mathbb{Z}[i]$, $z = a + bi$, atunci $-z = (-a) + (-b)i \in \mathbb{Z}[i]$, deci este verificată și axioma (G_3).

Rezultă că $\mathbb{Z}[i]$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe (mai precis, în raport cu operațiile induse de acestea). Să mai observăm că $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ este domeniu de integritate.

◆ *Inelul* $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *al claselor de resturi modulo n.*

În capitolul *Legi de compoziție* am introdus pe mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ a claselor de resturi modulo n operațiile de adunare și de înmulțire prin $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$ și $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab}$, $\forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$.

S-a arătat că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup abelian. De asemenea, am stabilit că înmulțirea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{1}$ ca element neutru și este distributivă în raport cu adunarea, $\hat{a}(\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{c}$, $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_n$.

Rezultă că $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este inel comutativ, numit *inelul claselor de resturi* modulo n.

Elementul zero al inelului $\mathbb{Z}_n$ este $\hat{0}$, iar $\hat{1}$ este elementul unitate al acestui inel.

◆ *Inelul* $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ *al claselor de resturi modulo 6.*

În efectuarea calculelor în inelul $\mathbb{Z}_n$ putem apela la tablele celor două operații. Astfel, dacă $n = 6$, tablele adunării și înmulțirii modulo 6 sunt cele prezentate alăturat.

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Cum $\hat{4} \neq \hat{0}$, $\hat{3} \neq \hat{0}$, iar $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{0}$, rezultă că inelul $\mathbb{Z}_6$ are divizori ai lui zero.

Ecuația $\hat{4}x = \hat{2}$ are în $\mathbb{Z}_6$ două soluții, $x = \hat{2}$ și $x = \hat{5}$ pentru că în linia lui $\hat{4}$ de la tabla înmulțirii $\hat{2}$ apare de două ori: în coloana lui $\hat{2}$ și în coloana lui $\hat{5}$.

Ecuația $\hat{2}x = \hat{3}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_6$ pentru că în linia lui $\hat{2}$ a tablei înmulțirii nu apare $\hat{3}$.

Ecuația $\hat{5}x + \hat{3} = \hat{0}$ are soluție unică în $\mathbb{Z}_6$, anume $x = \hat{3}$. Într-adevăr, avem $\hat{5}x = -\hat{3} = \hat{3}$, iar în linia lui $\hat{5}$ a tablei înmulțirii modulo 6 se găsește $\hat{3}$ o singură dată, anume în coloana lui $\hat{3}$.

Elementele inversabile (unitățile) ale inelului $\mathbb{Z}_n$ sunt clasele care servesc de etichetă pentru liniile (coloanele) care conțin pe $\hat{1}$ în tabla înmulțirii modulo n. În inelul $\mathbb{Z}_6$ acestea sunt $\hat{1}$ și $\hat{5}$ și avem $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$, după cum se constată consultând tabla înmulțirii modulo 6.

◆ *Inelul* $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ *al claselor de resturi modulo 2.*

Un interes aparte îl prezintă inelul $\mathbb{Z}_2$ datorită aplicațiilor pe care le are în tehnică (aritmetica calculatoarelor, codificarea informației) și în logică.

Tablele operațiilor lui $\mathbb{Z}_2$ sunt prezentate alăturat:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

◆ *Inelul* $\mathcal{M}_n(R)$ *al matricelor pătratice de ordinul n*

Fie R un inel. Acesta poate fi oricare din inele $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ etc. Notăm cu $\mathcal{M}_2(R)$ mulțimea tuturor matricelor pătratice de ordinul al 2-lea cu coeficienți în R, $\mathcal{M}_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R \right\}$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A + B \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$, $AB \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$,

numite *suma*, respectiv *produsul* lui A cu B. Se obțin două legi de compoziție pe $\mathcal{M}_2(R)$ numite *operațiile de adunare* și *înmulțire* ale matricelor pătratice de ordinul al 2-lea cu coeficienți în inelul R.

Se observă că s-au „mimat“ în acest context regulile de adunare și de înmulțire ale matricelor cu coeficienți numerici, cunoscute din clasa a XI-a.

Matricele $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(R)$, se numesc *matricea zero*, *matricea unitate* respectiv *opusa* matricei A.

Adunarea și înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(R)$ au proprietățile următoare: $\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_2(R)$

(G$_1$) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(G$_2$) $O + A = A + O = A$

(G$_3$) $A + (-A) = (-A) + A = O$

(G$_4$) $A + B = B + A$

(M$_1$) $(AB)C = A(BC)$

(M$_2$) $I_2A = AI_2 = A$

(D$_1$) $A(B + C) = AB + AC$

(D$_2$) $(B + C)A = BA + CA$,

Aceste proprietăți au fost stabilite în clasa a XI-a pentru matrice cu coeficienți numerici. Ele sunt valabile și pentru operațiile unui inel arbitrar R. Din acest motiv, demonstrațiile date în cazul numeric se transferă cuvânt cu cuvânt la cazul matricelor cu coeficienți într-un inel arbitrar. Conchidem că $\mathcal{M}_2(R)$ este inel în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire ale matricelor.

Elementul zero al acestui inel este matricea $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar elementul unitate este matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inelul matricelor pătratice de ordinul n cu coeficienți într-un inel R, $\mathcal{M}_n(R)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, nu este comutativ și are divizori ai lui zero.

Vom demonstra că $\mathcal{M}_2(R)$ nu este comutativ și are divizori ai lui zero:

fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(R)$; avem $A \neq O$, $B \neq O$, $AB = O \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

♦ *Inele de funcții reale*

Fie I o mulțime de numere reale și $\mathbb{R}^I$ mulțimea tuturor funcțiilor $f : I \to \mathbb{R}$.

Dacă $f, g \in \mathbb{R}^I$, definim funcțiile

$$f + g : I \to \mathbb{R},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

și

$$fg : I \to \mathbb{R},\ (fg)(x) = f(x)g(x)$$

numite *suma*, respectiv *produsul* funcției f cu funcția g.

Notăm cu 0 și 1 funcțiile $0 : I \to \mathbb{R}$ și $1 : I \to \mathbb{R}$ definite prin $0(x) = 0$, respectiv $1(x) = 1$, oricare ar fi $x \in I$, numită *funcția zero*, respectiv *funcția unitate* pe I.

1) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și intervalul $I = [a, b]$. În acest caz $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{[a,\, b]}$ este mulțimea funcțiilor reale definite pe intervalul $I = [a, b]$.

2) Dacă $I = \mathbb{N}$ și $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, atunci funcția f este complet determinată de valorile sale $a_n \overset{\text{def}}{=} f(n),\ n \in \mathbb{N}$.

Așadar f este șirul de numere reale $a_0, a_1, ..., a_n, ...$. Convenim să scriem $f = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$

Dacă $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ și $g = (b_0, b_1, ..., b_n, ...)$ atunci $f + g$ și fg sunt respectiv șirurile

$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ...)$

$fg = (a_0b_0, a_1b_1, ..., a_nb_n, ...)$

Așadar, în acest caz regăsim operațiile uzuale de adunare și de înmulțire a șirurilor de numere reale.

În cazul șirurilor de numere reale, funcțiile 0 și 1, date prin valorile lor sunt:

$$0 = (0, 0, ..., 0, ...),\ 1 = (1, 1, ..., 1, ...)$$

Dacă $f \in \mathbb{R}^I$ notăm cu $-f$ funcția $-f : I \to \mathbb{R}$, $(-f)(x) = -f(x)$. Funcția $-f$ se numește *opusa* funcției f și avem $f + (-f) = 0$ pentru că oricare ar fi $x \in I$, $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$.

Prin simpla verificare a axiomelor se demonstrează:

Teoremă. Mulțimea de funcții $\mathbb{R}^I$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a funcțiilor reale, adică oricare ar fi $f, g, h \in \mathbb{R}^I$ avem:

(G_1) $(f + g) + h = f + (g + h)$;

(G_2) $f + g = g + f$

(G_3) $0 + f = f + 0 = f$;

(G_4) $f + (-f) = (-f) + f = 0$

(M_1) $(fg)h = f(gh)$;

(M_2) $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$

(M_3) $fg = gf$;

(D) $f(g + h) = fg + fh$

În particular, mulțimea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a șirurilor de numere reale este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a șirurilor.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Arătați că:

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale;

b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu operațiile induse.

2. Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că R este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că formează un inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu operațiile induse.

3. Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că R este inel comutativ fără divizori ai lui zero în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

4. Pe mulțimea $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ definim operațiile: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$.

Arătați că $(R, +, \cdot)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero.

5. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim operațiile: $x \top y = x + y + 3$, $x \perp y = xy + 3x + 3y + 6$.

Arătați că:

a) $(\mathbb{Z}, \top)$ este grup abelian;

b) legea $\perp$ este asociativă și comutativă;

c) $x \perp (y \top z) = (x \perp y) \top (x \perp z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

d) $(\mathbb{Z}, \top, \perp)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero;

e) găsiți elementele inversabile ale acestui inel

6. Pe $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Arătați că $(R, +, \cdot)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero. Găsiți elementele inversabile ale acestui inel.

7. Fie $(R_1, +, \cdot)$ și $(R_2, +, \cdot)$ două inele și $R = R_1 \times R_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R_1, x_2 \in R_2\}$. Pe R se introduc operațiile: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$.

Arătați că $R = R_1 \times R_2$ are o structură de inel în raport cu aceste legi de compoziție (numit *produsul direct* al inelului R_1 cu R_2).

8. Fie $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ produsul direct al inelului $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ cu $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

a) Alcătuiți tablele adunării și înmulțirii inelului $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Verificați, folosind tablele operațiilor, că $x + x = (\hat{0}, \hat{0})$ și $x^2 = x$, $\forall x = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

9. Fie A o mulțime și $R = \{X \mid X \subseteq A\}$. Pe R definim $X \Delta Y \overset{\text{def}}{=} (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ *diferența simetrică*.

Arătați că $(R, \Delta, \cap)$ este un inel comutativ.

10. Fie inelul de funcții

$\mathcal{F} = \mathbb{R}^{[1, 3]} = \{f \mid f : [1, 3] \to \mathbb{R}\}$

a) Arătați că o funcție $f \in \mathcal{F}$ este simetrizabilă în raport cu înmulțirea funcțiilor, dacă și numai dacă $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [1, 3]$

b) Arătați că funcția $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = = x^2 - 4x + 5$ este simetrizabilă în raport cu înmulțirea și determinați funcția $g \in \mathcal{F}$ astfel încât $fg = 1$, unde 1 este funcția constată $1 : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $1(x) = 1$.

Trasați graficele lui f și g pe intervalul $[1, 3]$.

11. În inelul $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se consideră șirul $f = (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$. Determinați șirul $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ astfel încât $fg = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

12. Fie $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Dacă $f, g \in \mathcal{C}$, atunci $f + g \in \mathcal{C}$ și $fg \in \mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C}$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor.

13. Fie $\mathcal{D}$ mulțimea funcțiilor derivabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Dacă $f, g \in \mathcal{D}$, atunci $f + g \in \mathcal{D}$ și $fg \in \mathcal{D}$.

b) $\mathcal{D}$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor.

14. Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ inelul matricelor pătratice de ordinul al 2-lea având coeficienții în $\mathbb{Z}_6$ și $U, V, I_2, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$, $U = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{4} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_6$.

a) Calculați $U + V$ și $U \cdot V$.

b) Determinați matricea X astfel încât $UX = I_2$. Deduceți că U este un element inversabil al inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$.

Reguli de calcul într-un inel

Calculul algebric care implică doar operația de adunare în inelul R beneficiază de toate regulile de calcul dintr-un grup abelian pentru că $(R, +)$ este grup abelian. Când este implicată doar înmulțirea inelului, sunt valabile toate regulile de calcul pentru o operație asociativă și cu element neutru, eventual și comutativă. În afară de acestea, într-un inel avem o serie de reguli de calcul specifice, consecințe ale axiomei care angajează cele două operații, și anume distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Definiție. Fie $(R, *, \circ)$ inel. Operația $y - z = y + (-z)$, $y, z \in R$ se numește *diferență*.

Într-un inel $(R, *, \circ)$ au loc următoarele proprietăți:

Proprietatea 1.

$\forall\, x \in R$, $x \circ e = e \circ x = e$. În particular dacă $(R, *, \circ)$ și $e = 0$ avem $\forall\, x \in R$, $x0 = 0x = 0$.

Demonstrăm pentru $e = 0$ și în mod analog se demonstrează pentru un element neutru e.

Demonstrație. Fie $y = x0 \in R$; $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$; $y = y + y$. În grupul $(R, +)$: $0 = y + (-y) = y + y + (-y) = y = x0$.

Analog se arată că $0x = 0$. ■

Proprietatea 2.

Într-un inel cu cel puțin două elemente avem $u \neq e$. În particular, dacă $(R, +, \cdot)$ $e = 0$ și $u = 1$ avem $1 \neq 0$.

Demonstrație. Dacă $1 = 0$, atunci $\forall\, x \in R$, $x = 1x = 0x = 0$; de unde $R = \{0\}$, contradicție. Analog se demonstrează pentru u și e. ■

Proprietatea 3. *(Regula semnelor).*

$\forall\, x, y \in R$, $(-x) \circ y = x \circ (-y) = -x \circ y$ și $(-x) \circ (-y) = x \circ y$. În particular dacă $(R, +, \cdot)$ avem

$\forall\, x, y \in R$, $(-x)y = x(-y) = -xy$ și $(-x)(-y) = xy$.

Demonstrație. $0 = 0y = ((-x) + x)y = (-x)y + xy = xy + (-x)y$, de unde rezultă că $(-x)y$ este opusul lui xy, deci $(-x)y = -xy$. Analog, $x(-y) = -xy$. În fine, $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy$. Analog se demonstrează pentru operația „$\circ$”. ■

Proprietatea 4. *(Distributivitatea înmulțirii față de scădere).* Într-un inel $(R, +, \cdot)$ avem $\forall\, x, y, z \in R$, $x(y - z) = xy - xz$ *și* $(y - z)x = yx - zx$.

Demonstrație. Avem: $x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) =$ $= xy + (-(xz)) = xy - xz$, și analog $(y - z)x = yx - zx$. ■

Proprietatea 5.

Într-un inel $(R, +, \cdot)$ fără divizori ai lui zero putem simplifica cu elemente diferite de 0; adică

$\forall\, x, y, z \in R$, $x \neq 0$, $xy = xz$ sau $yx = zx \Rightarrow y = z$.

1) Rezolvați în inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ ecuațiile

a) $\hat{5}x = \hat{2}$, b) $\hat{2}x = \hat{3}$, c) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{0}$.

2) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{7} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}.$$

3) Determinați elementele inversabile ale inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

4) $R = \{O, I_2, A, B\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, unde

$$O = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

a) Arătați că R este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor;

b) Arătați că R este inel în raport cu operațiile induse.

c) Completați tabla adunării și tabla înmulțirii inelului R.

5) Fie $R = \{O, I_2, A, B\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$

$$O = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$$

a) Arătați că R este inel în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

b) Comparați tabla adunării și tabla înmulțirii inelului R.

c) Găsiți elementele inversabile în R.

6) Fie $R = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu patru elemente astfel încât $1 + 1 = 0$.

a) Arătați că $x + x = 0$, $\forall\, x \in R$.

b) Completați tabla adunării inelului R și deduceți că $b = 1 + a$.

c) Completați tabla înmulțirii inelului R dacă $a^2 = 0$.

d) Comparați tablele operațiilor din R cu cele ale inelului de la ex. 4).

e) Completați tabla înmulțirii inelului R, dacă $a^2 = 1 + a$.

f) Comparați tabla operațiilor din R cu cele ale inelului de la ex. 5).

Demonstrație. dacă $xy = xz$, atunci $x(y - z) = xy - xz = 0$ și cum $x \neq 0$ rezultă $y - z = 0$, deci $y = z$. ■

Grupul unităților unui inel

Definiție. Elementele inversabile ale unui inel R se numesc *unități* ale lui R. Notăm cu $U(R)$ mulțimea unităților inelului R.

Teoremă. Fie R un inel. $U(R)$ este grup în raport cu operația indusă de înmulțirea lui R, numit *grupul unităților* inelului R.

Demonstrație.

Fie 1 elementul unitate al lui R. Cum $1 \in U(R)$, rezultă că $U(R) \neq \varnothing$.

Dacă $u, v \in U(R)$, atunci $uv \in U(R)$ pentru că produsul a două elemente inversabile este inversabil.

Dacă $u \in U(R)$, atunci $u^{-1} \in U(R)$ pentru că u^{-1} este, de asemenea, inversabil și $(u^{-1})^{-1} = u$.

Așadar $U(R)$ este stabilă în R. Operația indusă pe $U(R)$ de înmulțirea inelului R este asociativă, admite element neutru și orice element $u \in U(R)$ admite pe $u^{-1} \in U(R)$ ca simetric. ■

Subinel (facultativ)

Noțiunea de subinel corespunde noțiunii de subgrup.

Definiție.

Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu elementul unitate notat 1. O submulțime S a lui R se numește *subinel* al lui R dacă verifică următoarele condiții:

(1) $\forall\, x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$ și $xy \in S$

(2) $\forall\, x \in S \Rightarrow -x \in S$

(3) $1 \in S$

EXEMPLE

1) $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este subinel al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) $\mathbb{Z}$ este subinel al inelului $\mathbb{Z}[i]$.

7) Arătați că grupul unităților inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este: $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$.

8) Arătați că grupul unităților inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este grupul general liniar $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\|\, |A| \neq 0\}$.

9) Arătați că grupul unităților lui $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ este $\{1, -1, i, -i\}$.

Indicație.

Dacă $u = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ este inversabil în $\mathbb{Z}[i]$, există $v = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ astfel încât $uv = 1$. Prin conjugare, obținem $\bar{u} \cdot \bar{v} = 1$. Așadar, în $\mathbb{N}$ avem:
$1 = 1 \cdot 1 = uv\bar{u}\bar{v} = (u\bar{u})(v\bar{v}) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.
Rezultă $a^2 + b^2 = 1$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$. Avem posibilitățile $a = 1$, $b = 0$ sau $a = -1$, $b = 0$ sau $a = 0$, $b = 1$ sau $a = 0$, $b = -1$. Așadar $u \in \{1, -1, i, -i\}$; numerele $1, -1, i$ și $-i$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}[i]$. În concluzie, $U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$.

10) Arătați că grupul unităților inelului $\mathbb{Z}_8$ este: $U(\mathbb{Z}_8) = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$.

Indicație.

Din tabla înmulțirii modulo 8, se constată că o clasă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_8$ este inversabilă dacă și numai dacă $\hat{a} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$.

11) Arătați că $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ înzestrată cu adunarea și înmulțirea este subinel al inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Aplicații ale operațiilor cu matrice

A. Modelul economic al lui Leontif

În 1973, premiul Nobel pentru *economie* a fost atribuit lui W. Leontief (economist american, originar din Rusia) care a elaborat o procedură de modelare matematică numită **analiză input-output**, adecvată pentru un sistem economic complex, formată cu un număr mare de sectoare între care există interacțiuni.

Presupunem că avem un sistem economic $\mathcal{E}$, format cu trei sectoare în care sunt fabricate respectiv produsele P_1, P_2, P_3. O parte din producția sistemului economic $\mathcal{E}$ este folosită în interiorul sistemului ca resurse, iar o altă parte este rezervată pentru a onora o cerere externă.

Notăm cu a_{ij} numărul unităților din produsul P_i care sunt folosite pentru realizarea unei unități din produsul P_j. Numerele a_{ij} cuantifică interacțiunile dintre sectoarele S_1, S_2, S_3.

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se numește **matricea tehnologică** sau **matricea input-output.**

Dacă x_j este nivelul producției lui P_j (adică numărul de unități din produsul P_j realizate), atunci vectorul 3-dimensional

$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ se numește **vectorul producție**.

Produsul $AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$ reprezintă consumul intern pentru că

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ reprezintă partea din producția x_1 a lui S_1 consumată în interiorul sistemului $\mathcal{E}$ ș.a.m.d. Rezultă că $P - AP$ este partea de producție disponibilă, care poate fi folosită pentru a onora o cerere externă.

Presupunem că din afara sistemului economic $\mathcal{E}$ există o comandă de c_j unități din produsul P_j, $1 \leqslant j \leqslant 3$ și fie $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ numit **vectorul-comandă**. Problema fundamentală care se pune este de a planifica nivelul producției P de așa natură încât $P - AP = C$, ceea ce se mai scrie $(I_3 - A)P = C$.

Dacă matricea $I_3 - A$ este inversabilă, atunci înmulțind la stânga egalitatea $(I_3 - A)P = C$ cu $(I_3 - A)^{-1}$ se obține $P = (I_3 - A)^{-1}C$.

Determină vectorul producție $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dacă matricea tehnologică este $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ și vectorul comandă $C = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix}$.

B. Criptarea mesajelor

Inversa unei matrice are aplicații și în criptografie, disciplină care are ca obiect elaborarea metodelor de secretizare a mesajelor.

Pentru exemplificare, vom folosi matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și inversa sa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, și mesajul „SOSESC JOI”. Atribuim literelor alfabetului latin câte un număr natural pozitiv și blancului □ numărul 0. De exemplu:

□	A	B	C	D	E	F	G	...	O	...	S	...	J	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓		↓		↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7		15		19		25	26

Mesajul se împarte în blocuri de lungimi egale (în cazul nostru 3) luând în considerare și spațiile libere (blancuri). Se adaugă eventual la sfârșitul mesajului câteva blancuri pentru a obține blocuri de lungimi egale: SOSESC☐JOI☐☐

Semnele din blocuri sunt înlocuite cu numerele asociate. Se formează o matrice numerică M cu trei coloane și tot atâtea linii câte blocuri are mesajul. Se înmulțește M cu A, $MA = C$, matricea C fiind mesajul criptat care se transmite. În cazul nostru:

$$\begin{matrix} \text{S} & \text{O} & \text{S} \\ \text{E} & \text{S} & \text{C} \\ \square & \text{J} & \text{O} \\ \text{I} & \square & \square \end{matrix} \text{ devine } M = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 19 \\ 5 & 19 & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și atunci } MA = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 19 \\ 5 & 19 & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 42 \\ 14 & 17 & -6 \\ 10 & 25 & 5 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

mesajul criptat va fi $C = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 42 \\ 14 & 17 & -6 \\ 10 & 25 & 5 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix}$.

La recepție, pentru decriptare se efectuează produsul CA^{-1} și se obține M, deoarece $CA^{-1} = (MA)A^{-1} = M(AA) = MI_3 = M$:

$$CA^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 42 \\ 14 & 17 & -6 \\ 10 & 25 & 5 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 19 \\ 5 & 19 & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Făcându-se corespondența dintre numere și literele asociate, se obține mesajul: $\begin{matrix} \text{S} & \text{O} & \text{S} \\ \text{E} & \text{S} & \text{C} \\ \square & \text{J} & \text{O} \\ \text{I} & \square & \square \end{matrix}$, adică SOSESC☐JOI☐☐.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $(R, +, \cdot)$ inel și $a, b \in R$ cu $ab = ba$. Arătați că:

(i) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, (ii) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (iii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

În particular, dacă R este comutativ, atunci $\forall\ a, b \in R$, sunt adevărate (i), (ii) și (iii).

Soluție. (i) Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și apoi față de scădere, avem: $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

(ii) Folosind definiția puterilor unui element și proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare, avem: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) Fie R un inel cu proprietatea (α) $1 + 1 + 1 = 0$. Arătați că:

(i) $a + a + a = 0, \forall\ a \in R$. (ii) $(a + b)^3 = a^3 + b^3, \forall\ a, b \in R$ cu $ab = ba$.

(iii) inelele $\mathbb{Z}_3$ și $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ au proprietatea (α) și demonstrați că $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ cu $AB = BA$, $(A + B)^3 = A^3 + B^3$.

Soluție. (i) $a + a + a = 1 \cdot a + 1 \cdot a + 1 \cdot a = (1 + 1 + 1)a = 0 \cdot a = 0$.

(ii) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Dar $3a^2b = a^2b + a^2b + a^2b = 0$ și, analog, $3ab^2 = 0$, de unde $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.

(iii) În $\mathbb{Z}_3$, $\hat{1} + \hat{1} + \hat{1} = (\hat{1} + \hat{1}) + \hat{1} = \hat{2} + \hat{1} = \widehat{2+1} = \hat{3} = \hat{0}$.

În inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ avem: $I_2+I_2+I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1}+\hat{1}+\hat{1} & \hat{0}+\hat{0}+\hat{0}\\ \hat{0}+\hat{0}+\hat{0} & \hat{1}+\hat{1}+\hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$

Cum $AB = BA$, calculul puterii $(A + B)^3$ se face ca într-un inel comutativ.

Avem: $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3$ pentru că $3A^2B = O$ și $3AB^2 = O$.

3) Să rezolvăm în inelul $\mathbb{Z}_6$ ecuațiile: (i) $\hat{5}x+\hat{2}=\hat{4}$; (ii) $\hat{3}x+\hat{4}=\hat{1}$; (iii) $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{2}$.

Soluție. (i) Din $\hat{5}x+\hat{2}=\hat{4}$ rezultă $\hat{5}x=\hat{4}-\hat{2}$, deci $\hat{5}x=\hat{2}$. În linia lui $\hat{5}$ în tabla înmulțirii modulo 6 se află $\hat{2}$ numai în coloana lui $\hat{4}$, deci $x=\hat{4}$. Se putea obține soluția observând că $\hat{5}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}_6$ și $\hat{5}^{-1}=\hat{5}$. Înmulțind egalitatea $\hat{5}x=\hat{2}$ cu $\hat{5}^{-1}=\hat{5}$ se obține $x=\hat{5}\cdot\hat{2}=\widehat{10}=\hat{4}$.

(ii) Din $\hat{3}x+\hat{4}=\hat{1}$ rezultă că $\hat{3}x=\hat{1}-\hat{4}=-\hat{3}=\hat{3}$.

Cu tabla înmulțirii mod 6 găsim soluțiile $x_1=\hat{1}, x_2=\hat{3}, x_3=\hat{5}$ (deci o ecuație de gradul întâi în $\mathbb{Z}_6$ poate avea mai multe soluții!).

(iii) Din $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{2}$ rezultă $\hat{2}x=\hat{2}-\hat{3}=-\hat{1}=\hat{5}$, deci $\hat{2}x=\hat{5}$. Consultând linia $\hat{2}$ din tabla înmulțirii modulo 6 conchidem că nu există $x \in \mathbb{Z}_6$ astfel încât $\hat{2}x=\hat{5}$, deci ecuația $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{2}$ nu admite soluții în $\mathbb{Z}_6$.

4) a) Fie $\hat{a}\in\mathbb{Z}_n$. Arătați că $\hat{a}$ este element inversabil al inelului $\mathbb{Z}_n$ dacă și numai dacă a este relativ prim cu n;

b) Determinați elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_9$ și rezolvați în inelul $\mathbb{Z}_9$ ecuația $\hat{7}x+\hat{3}=\hat{2}$.

Soluție. a) Presupunem că $\hat{a}$ este inversabilă în inelul $\mathbb{Z}_n$. Atunci există $\hat{b}\in\mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{a}\hat{b}=\hat{1}$. Cum $\widehat{ab}=\hat{a}\hat{b}=\hat{1}$ avem $\widehat{ab}=\hat{1}$, de unde rezultă că numărul $ab - 1$ se divide prin n. Există deci $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ab - 1 = nk$. Așadar $a \cdot b + n(-k) = 1$, de unde $(a, n) = 1$.

Reciproc, dacă $(a, n) = 1$, există $h, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ah + nk = 1$.

Cum $\hat{1}=\widehat{ah+nk}=\widehat{ah}+\widehat{nk}=\widehat{ah}+\hat{0}=\hat{a}\hat{h}$ rezultă că $\hat{a}$ este element inversabil al inelului $\mathbb{Z}_n$ și $\hat{a}^{-1}=\hat{h}$.

b) Elementele inelului $\mathbb{Z}_9$ sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{8}$

Dintre numerele 0, 1, 2, ..., 8 sunt relativ prime cu 9 numerele 1, 2, 4, 5, 7 și 8, deci elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_9$ sunt $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}$ și $\hat{8}$. Din tabla înmulțirii inelului $\mathbb{Z}_9$ se pot determina inversele acestor clase. Prezentăm o altă metodă pe cazul $a = 7$. Algoritmul lui Euclid pentru 9 și 7 este:

$9 = 7 \cdot 1 + 2,$

$7 = 2 \cdot 3 + 1.$

Ultimul rest diferit de zero este 1 și să-l reprezentăm sub forma $7h + 9k$. Din ultima egalitate avem

$1 = 7 - 2 \cdot 3$

și folosind și prima egalitate rezultă:

$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 = 7 \cdot 4 + 9 \cdot (-3)$

Avem: $\hat{1}=\widehat{7\cdot 4+9\cdot(-3)}=\hat{7}\cdot\hat{4}+\hat{9}\cdot\widehat{(-3)}=\hat{7}\cdot\hat{4}+\hat{0}\cdot\widehat{(-3)}=\hat{7}\cdot\hat{4}$ deci $\hat{7}^{-1}=\hat{4}$. Ecuația dată se rezolvă astfel:

$\hat{7}x=\hat{2}+\widehat{(-3)}=\hat{2}+\hat{6}=\hat{8}$

și atunci $x=\hat{7}^{-1}\hat{8}=\hat{4}\hat{8}=\widehat{4\cdot 8}=\widehat{32}=\hat{5}$.

1. Fie R un inel în care $x^2 = x$, $\forall\, x \in R$. Arătați că:
a) $x + x = 0$, $\forall\, x \in R$;
b) $xy = yx$, $\forall\, x, y \in R$.

2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in R$ astfel încât $ab = ba$. Arătați că
a) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
b) $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n =$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, astfel încât $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p \text{ ori}} = 0$. Arătați că:
a) $\forall\, x \in R$, $px = 0$, unde $px = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{p \text{ ori}}$.
b) dacă p prim și $a, b \in R$ cu $ab = ba$, $(a + b)^p = a^p + b^p$.
c) $A^p = I_p$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$, $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, p prim, $p > 2$.

Indicație. Dacă p este prim, atunci p divide coeficienții binomiali C_p^k, $\forall\, k = 1, 2, \ldots, p - 1$.

4. Rezolvați în inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ sistemele de ecuații liniare:

a) $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{3} \end{cases}$.

5. Fie $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 2.
a) Câte elemente are inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$?
b) Arătați că $U + U = 0$, $\forall U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.
c) Care sunt matricele inversabile ale inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ $+, \cdot)$?
d) Determinați inversele matricelor inversabile ale inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ $+, \cdot)$.

6. Fie $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $U = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
a) Pentru ce numere reale a, b, c avem $U^2 = 0$?
b) Dacă $U^2 = 0$, atunci $I_2 - U$ este inversabilă și $(I_2 - U)^{-1} = I_2 + U$.

7. Fie $(R, +, \cdot)$ inel comutativ, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$ și $u = \det(A) = ad - bc$.
a) Dacă u este inversabil în R, atunci matricea $A' = u^{-1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$ verifică $AA' = A'A = I_2$, adică $A' = A^{-1}$.
b) Arătați că $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$ este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$, dacă și numai dacă $\det A \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}\}$.
c) Arătați că $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{8} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{5} \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$ sunt inversabile în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$ și determinați inversele lor.

8. Fie R inel comutativ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$.
a) Arătați că A are inversă în inelul $\mathcal{M}_2(R)$ dacă și numai dacă $\det A$ este inversabil în inelul R.
b) Arătați că o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dacă și numai dacă $\det A = \pm 1$.
c) Arătați că o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ dacă și numai dacă $\det A \neq 0$.

9. Rezolvați în inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ ecuațiile:
a) $\hat{7}x + \hat{3} = \hat{0}$; b) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{0}$; c) $\hat{4}x + \hat{5} = \hat{0}$.

10. Fie $R = \{0, 1, a, b\}$ un inel. Arătați că:
a) funcția $f : R \to R$, $f(x) = 1 + x$ este bijectivă;
b) $\sum\limits_{x \in R} f(x) = 1 + a + b$ și $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

11. Fie R inel în care $x^6 = x$, $\forall\, x \in R$. Arătați că $x^2 = x$, $\forall\, x \in R$.

12. Fie R inel cu 8 elemente având proprietatea că $1 + 1 = 0$. Arătați că
$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$, $\forall\, x \in R$.

Corpuri

Un cadru ideal pentru efectuarea calculului algebric este oferit de inelele în care orice element nenul este inversabil în raport cu înmulțirea. Un astfel de inel este ...

Corpul. Proprietăți, exemple

Definție.
Un inel K se numește *corp* dacă $e \neq u$ și orice element nenul din K este simetrizabil în raport cu înmulțirea. Dacă înmulțirea este comutativă, K se numește *corp comutativ*.

Observație.
$e \neq u$ înseamnă că elementul neutru față de legea aditivă este diferit de elementul neutru față de legea multiplicativă.

Proprietatea 1.
Un corp nu are divizori ai lui zero.

Demonstrație. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp și $a, b \in K$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab = 0$. Avem $b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$, contradicție. ■

Proprietatea 2.
Elementele nenule ale unui corp formează grup cu înmulțirea.

Demonstrație. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp, $K^* = K \setminus \{0\}$. Dacă $a, b \in K^*$, atunci $ab \neq 0$ pentru că un corp nu are divizori ai lui zero, deci K^* este o parte stabilă a lui K în raport cu înmulțirea. Cum într-un corp $1 \neq 0$, rezultă că $1 \in K^*$. Deducem că operația indusă pe K^* de înmulțirea lui K este asociativă și admite pe 1 ca element neutru. Dacă $x \in K^*$, atunci $x \neq 0$ și fie x^{-1} inversul lui x în raport cu înmulțirea lui K. Cum $x^{-1}x = 1 \neq 0$, rezultă că $x^{-1} \neq 0$ și atunci $x^{-1} \in K^*$. Evident, x^{-1} este inversul lui x și în raport cu operația indusă pe K^* de înmulțirea lui K. Atunci $(K^*, \cdot)$ este grup, numit *grupul multiplicativ* al corpului K. ■

Proprietatea 3.
Orice domeniu de integritate finit este corp.

Demonstrație. Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu de integritate. Avem $1 \neq 0$ și din $ax = ay$, $a \neq 0$ rezultă $x = y$.

Fie $a \in R$, $a \neq 0$. Funcția $f : R \to R$, $f(x) = ax$ este injectivă pentru că, dacă $f(x) = f(y)$, atunci $ax = ay$, deci $x = y$. Cum mulțimea R este finită, rezultă că f este și funcție surjectivă.

În aceste condiții, pentru $1 \in R$ există $a' \in R$ astfel încât $f(a') = 1$, adică $aa' = 1$. Analog se arată că există $a'' \in R$ astfel încât $a''a = 1$. Cum înmulțirea este asociativă, avem $a' = a''$. Rezultă că a este inversabil și $a^{-1} = a'$. ■

Caracterizarea structurii algebrice de corp prin intermediul proprietăților operațiilor

1) Fie $(K, +, \cdot)$ un corp și $a, b \in K$, $a \neq 0$. Arătați că ecuația liniară $ax + b = 0$ are soluție unică în K, anume $x = -a^{-1}b$.

2) Rezolvați în corpul $\mathbb{Z}_5$ ecuația $\hat{3}x + \hat{1} = \hat{0}$.

3) Fie K un corp comutativ, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$ și $D = \det A \in K$.

a) Dacă $D \neq 0$ și $\alpha, \beta \in K$, atunci sistemul liniar $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ are soluție unică în K, anume $x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix} D^{-1}$, $y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix} D^{-1}$ (*Regula lui Cramer*).

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}_5$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{4}y = \hat{3} \end{cases}$.

4) Fie $\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor raționale. Se definesc legile de compoziție.
$x * y = x + y - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$
$x \circ y = x + y - xy$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

a) Arătați că legile „$*$“ și „$\circ$“ sunt bine definite.
b) Determinați elementul neutru față de legea „$*$”.
c) Determinați elementul neutru față de legea „$\circ$”.
d) Arătați că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.
e) Demonstrați că $(\mathbb{Q}, *, \circ)$ este corp.
f) Calculați inversul lui 2.
g) Calculați $3 * 4^{-1} * (-2) \circ 2^{-1}$, unde prin 4^{-1} și 2^{-1} am notat inversul lui 4, respectiv 2, față de legea „$\circ$”.

5) Care dintre următoarele inele sunt corpuri: $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$? Justificați.

Exemple de corpuri – temă de sinteză

1) Inelele $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative, numite respectiv *corpul numerelor raționale*, *corpul numerelor reale* și *corpul numerelor complexe*.

Demonstrație. Pentru $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ axiomele corpului se verifică cu ușurință.

Pentru $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ să verificăm numai existența elementului invers. Fie $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, deci $a^2 + b^2 \neq 0$. Deoarece $(a+bi)\left(\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1$, avem $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$.

2) Mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este corp în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

Demonstrație.

Fie $u, v \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $u = a + b\sqrt{2}$, $v = c + d\sqrt{2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Avem $u + v = (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $uv = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, deci $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este stabilă în raport adunarea și înmulțirea. Se verifică ușor că $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este inel în raport cu operațiile induse. Elementul zero este $0 = 0 + 0\sqrt{2}$, iar unitatea este $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.

Dacă $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $u = a + b\sqrt{2}$ și $u \neq 0$, atunci $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Rezultă că $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (pentru că din $a^2 - 2b^2 = 0$ și $b = 0$ deducem $a = 0$, iar din $a^2 - 2b^2 = 0$ și $b \neq 0$ deducem că $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ cu $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ambele variante fiind contradictorii), deci numărul $u' = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2} - \dfrac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ și avem $uu' = 1$. Așadar u este inversabil în $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ și $u^{-1} = u'$.

3) Inelele $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ nu sunt corpuri.

Demonstrație.

Ecuația $2x = 1$ nu are soluții în $\mathbb{Z}$ ($2 \neq 0$ nu este inversabil în $\mathbb{Z}$). În inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ avem $\hat{4} \neq \hat{0}$, $\hat{6} \neq \hat{0}$ și $\hat{4} \cdot \hat{6} = \widehat{24} = \hat{0}$. Cum un corp nu are divizori ai lui zero, rezultă că $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ nu este corp.

4) Inelul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, $p > 1$ este corp dacă și numai dacă p este număr prim.

Demonstrație.

Reamintim că un număr întreg $p > 1$ este prim dacă din $p \mid ab$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, rezultă $p \mid a$ sau $p \mid b$. Să observăm că din $p > 1$ rezultă $\hat{1} \neq \hat{0}$. Dacă p este prim și $\hat{a}\hat{b} = \hat{0}$ în inelul $\mathbb{Z}_p$, atunci $\widehat{ab} = \hat{0}$, deci $p \mid ab$, de unde $p \mid a$ sau $p \mid b$, adică $\hat{a} = \hat{0}$ sau $\hat{b} = \hat{0}$.

Așadar, dacă p este prim, atunci $\mathbb{Z}_p$ este domeniu de integritate finit și deci corp conform proprietății 3.

Dacă p nu este prim, există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $p \mid ab$, $p \nmid a$, $p \nmid b$, ceea ce revine la $\hat{a}\hat{b} = \hat{0}$, $\hat{a} \neq 0$ și $\hat{b} \neq \hat{0}$. Deci $\mathbb{Z}_p$ are divizori ai lui zero dacă p nu este prim și atunci nu poate fi corp.

Astfel, inelele $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ etc. sunt corpuri. Faptul că orice clasă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$, $\hat{a} \neq \hat{0}$ este inversabilă se poate observa și pe tabla înmulțirii lui $\mathbb{Z}_5$: $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{2}^{-1} = \hat{3}$, $\hat{3}^{-1} = \hat{2}$, $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$.

Grupul multiplicativ $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ al corpului $\mathbb{Z}_5$ are 4 elemente, $\mathbb{Z}_5^* = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și tabla înmulțirii acestui grup este cuprinsă în tabla înmulțiri lui $\mathbb{Z}_5$.

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Morfisme de inele și corpuri

Ca și în cazul grupurilor, noțiunea de izomorfism de inele (corpuri) permite să recunoaștem inele (corpuri) care au aceleași proprietăți algebrice. O noțiune mai generală este cea de morfism de inele (corpuri).

Definiție.

Fie inelele $(R, +, \cdot)$ și $(R', \oplus, \odot)$. O funcție $f: R \to R'$ se numește *morfism de inele* dacă, $\forall\, x, y \in R$:

(1) $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$;

(2) $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$;

(3) $f(1) = 1'$, unde 1 este unitatea inelului R și $1'$ unitatea lui R'.

Un morfism de inele bijectiv se numește *izomorfism*. Vom spune că inelul R este izomorf cu inelul R', și scriem $R \simeq R'$, dacă există cel puțin un izomorfism $f: R \to R'$.

Remarcă. Fie $f: R \to R'$ un morfism de inele.

♦ $f(0) = 0'$, 0 fiind elementul nul din R și cu $0'$ cel din R'.

♦ $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in R$.

♦ Dacă $x \in R$ este inversabil în inelul R, atunci $f(x)$ este element inversabil al inelului R' și $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Demonstrație.

Funcția f este morfism de la grupul $(R, +)$ la grupul $(R', \oplus)$. Rezultă prima și a treia afirmație.

$1' = f(1) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) \odot f(x^{-1})$. Obținem $f(x^{-1}) \odot f(x) = 1'$; rezultă că $f(x)$ este inversabil și $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. ■

Evident, orice corp este inel.

Definiție.

O funcție $f: K \to K'$ de la un corp K la un corp K' se numește *morfism (izomorfism)* de corpuri dacă este morfism (izomorfism) de la K la K' considerate ca inele.

Un izomorfism (morfism) $f: R \to R$ de la inelul $(R, +, \cdot)$ în el însuși se numește *automorfism* (respectiv *endomorfism*) al inelului R. Aceeași terminologie se folosește și pentru corpuri.

Remarcă. Orice morfism de corpuri $f: K \to K'$ este injectiv.

Demonstrație. Fie $x_1, x_2 \in K$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Arătăm că $x_1 = x_2$. Fie $x = x_1 - x_2$. Avem

$f(x) = f(x_1 + (-x_2)) = f(x_1) + f(-x_2) = f(x_1) + (-f(x_2)) = f(x_1) + (-f(x_1)) = 0'$.

Pentru $x \neq 0$, $1' = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0' f(x^{-1}) = 0'$, ceea ce este absurd căci într-un corp $1' \neq 0'$.

Funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f(a) = \hat{a}$ este morfism surjectiv de la inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ pentru că $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$,

$f(a+b) = \widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b} = f(a) + f(b)$,

$f(ab) = \widehat{ab} = \hat{a}\hat{b} = f(a)f(b)$, și $f(1) = \hat{1}$.

6) Arătați că funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ este morfism injectiv de inele de la $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ la $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$.

Indicație.

$f(a+b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = f(a) + f(b)$,

$f(ab) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = f(a)f(b)$ și

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

7) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, notăm cu $\bar{z} = a - bi$ conjugatul lui z. Arătați că funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ este automorfism al corpului $\mathbb{C}$.

Indicație. Oricare ar fi $z, w \in \mathbb{C}$, avem $f(z+w) = \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} = f(z) + f(w)$, $f(zw) = \overline{zw} = f(z)f(w)$ și $f(1) = \bar{1} = 1$.

Cum $z = \bar{\bar{z}} = f(\bar{z})$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, rezultă că f este surjectiv, deci bijectiv, pentru că orice morfism de corpuri este injectiv.

8) Pentru orice $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $z = a + b\sqrt{2}$ cu a, $b \in \mathbb{C}$, notăm $\bar{z} = a - b\sqrt{2}$ conjugatul lui z. Funcția $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $f(z) = \bar{z}, \forall z \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este automorfism al corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Indicație.

Se arată că $\forall z, w \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avem $f(z+w) = f(z) + f(w)$ și $f(zw) = f(z)f(w)$.

f este surjectivă: $z = \overline{(\bar{z})} = f(\bar{z})$ și orice morfism de corpuri este injectiv.

Exerciţii rezolvate.

1) Fie $K = \{0, 1, a, b\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, unde $0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$ şi $b = 1 + a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că mulţimea K este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi alcătuiţi tablele operaţiilor induse.

b) K are o structură de corp comutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor.

Soluţie. a) Din tablele operaţiilor rezultă că mulţimea K este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor.

b) Operaţiile induse pe K verifică axiomele inelului comutativ. Din tabla înmulţirii se constată că toate elementele diferite de 0 din K sunt inversabile în K: $1^{-1} = 1$, $a^{-1} = b$, $b^{-1} = a$.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

2) Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Big| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că mulţimea K este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea şi K formează corp comutativ în raport cu operaţiile induse.

b) Arătaţi că $\mathbb{C} \simeq K$.

Soluţie. a) Fie $A, B \in K$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$. Avem $A + B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \in K$

şi $AB = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \in K$; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ şi $-A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in K$.

Evident, operaţiile induse verifică axiomele inelului comutativ. Fie $A \in K$, $A \neq O$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, rezultă $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, deci $a^2 + b^2 \neq 0$. Fie $A' = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$. Avem $AA' = A'A = I_2$, deci A este inversabilă şi $A^{-1} = A'$.

b) Definim $f : \mathbb{C} \to K$ prin $f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Evident f este funcţie bijectivă.

Fie $z = a + bi$, $w = c + di$ din $\mathbb{C}$. Avem $z + w = (a + c) + (b + d)i$, $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, de unde

$$f(z+w) = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = f(z) + f(w),\quad f(zw) = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = f(z)f(w)$$

şi $f(1) = I_2$.

Rezultă că f este izomorfism de corpuri, deci $\mathbb{C} \simeq K$.

3) Fie $K = \{0, 1, a, b\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, unde $0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$ şi $b = 1 + a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$. Arătaţi:

a) $x + x = 0$ şi $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, $\forall x, y \in K$.

b) Funcţia $f : K \to K$, $f(x) = x^2$ este unicul automorfism al lui K diferit de 1_K.

Soluţie. a) Cum $\hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_2$, avem $A + A = 0$ oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ şi în particular $x + x = 0$ oricare ar fi $x \in K$. Cum K este corp comutativ avem $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2$.

b) În grupul $K^* = \{1, a, b\}$ avem $b = a^2$ şi $a = b^2$. Evident f este automorfism şi dacă $g : K \to K$ este automorfism avem $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Dacă $g = 1_K$ avem $g(a) = b = a^2$ şi $g(b) = a = b^2$, deci $g = f$.

● **1.** Pe mulțimea $K = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim legile de compoziție:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
a) Arătați că $(K, +, \cdot)$ este corp comutativ.
b) Funcția $f : \mathbb{C} \to K, f(z) = (a, b)$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, este izomorfism de corpuri.

● **2.** Pe intervalul $K = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ definim legile de compoziție „$\top$" și „$\perp$" (*truc* și *antitruc*):

$$x \top y = xy, \forall\, x, y \in K \quad \text{și}$$
$$x \perp y = x^{\ln y}, \forall\, x, y \in K.$$

a) Arătați că tripletul $(K, \top, \perp)$ este corp comutativ.
b) Funcția $f : K \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ este izomorfism de la corpul $(K, \top, \perp)$ la corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

● **3.** Pe mulțimea $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definesc operațiile:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
(i) Arătați că R are o structură de inel comutativ în raport cu aceste operații.
(ii) Determinați elementele inversabile ale inelului R.
(iii) Arătați că $R \simeq \mathbb{Z}[i]$ (inelul întregilor lui Gauss).

●● **4.** Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle|\, \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

Arătați că:
a) $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 \neq \hat{0}, \forall\, \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3$ cu $\hat{a} \neq \hat{0}$ sau $\hat{b} \neq \hat{0}$.
b) K este stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor;
c) $(K, +, \cdot)$ formează un corp comutativ cu 9 elemente.

● **5.** Pentru orice $A = \begin{pmatrix} u & v \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ notăm $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{v} \\ \overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix}$, unde $\overline{u}$ este conjugatul lui u etc.

Arătați că funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $f(A) = \overline{A}$ este automorfism al inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

● **6.** Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

Arătați că:
a) mulțimea K este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire;
b) $(K, +)$ este grup comutativ;
c) $(K, +, \cdot)$ este corp în raport cu operațiile induse
d) Arătați că $K \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

● **7.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție „$\top$" și „$\perp$" prin

$$x \top y = ax + by - 2, \forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ și}$$
$$x \perp y = xy - 2x - 2y + c, \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați a, b, c astfel încât $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ să fie corp.
b) Determinați $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$ să fie izomorfism de la corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la corpul $(\mathbb{R}, \top, \perp)$.

●● **8.** Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Arătați că:
a) mulțimea K este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor;
b) K formează corp necomutativ în raport cu operațiile induse. (*Corpul cuaternionilor reali al lui W.R. Hamilton*)

●● **9.** Funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_n)$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$.
este morfism surjectiv de la inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ la $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_n)$.

●● **10.** a) Dacă $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ este morfism de inele, atunci $f(k) = k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
b) Dacă $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ este morfism de corpuri, atunci $f(r) = r$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}$.

●● **11.** a) Funcția $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ este automorfism al corpului $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
b) Dacă $g : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este morfism de corpuri și $g \neq 1_K$, atunci $g = f$.

●● **12.** Fie $K = \{0, 1, a, b\}$ corpul de la exercițiul rezolvat 1.
a) Arătați că $x + x = 0$ și $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, $\forall\, x, y \in K$.
b) Funcția $f : K \to K$, $f(x) = x^2$ este automorfism al corpului K și $f \neq 1_K$.
c) Dacă $g : K \to K$ este automorfism al corpului K, atunci $g = 1_K$ sau $g = f$.

●● **13.** Fie corpul K de la exercițiul 4.
a) Arătați că $A + A + A = 0$ și $(A + B)^3 = A^3 + B^3$, oricare ar fi $A, B \in K$.
b) Funcția $f : K \to K$, $f(A) = A^3$ este automorfism al lui K și $f \neq 1_K$.
c) Dacă $g : K \to K$ este automorfism al lui K, atunci $g = 1_K$ sau $g = f$.

14. Fie K un inel cu patru elemente.

Arătați că sunt echivalente următoarele afirmații:

i) K este corp;

ii) $\exists\, a \in K$ astfel încât $a^2 = 1 + a$.

15. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este morfism de corpuri, atunci $f = 1_{\mathbb{R}}$.

Indicație: Dacă $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, avem $x = y^2$ cu $y \in \mathbb{R}$. Cum $f(x) + f(y^2) = f(y)^2 > 0$, rezultă că f este funcție crescătoare. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x - \varepsilon < r_1 < x < r_2 < x + \varepsilon$. Aplicând f, rezultă că $|f(x) - x| < \varepsilon$. Rezultă că $f(x) = x$.

Teste de evaluare

Testul 1

(2p) **1.** Pe mulțimea $A = \mathbb{Z}$ se definesc operațiile: $x * y = x + y - 2$, $\quad x \perp y = xy - 2(x+y) + 6$.

Arătați că $(\mathbb{Z}, *, \perp)$ este inel izomorf cu inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, unde $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ este de forma $f(x) = ax + b$.

(2p) **2.** Se consideră inelele $(R_1, +, \cdot)$, $(R_2, +, \cdot)$, unde:

$$R_1 = \{x + y\sqrt{3}\cdot i \mid x, y \in \mathbb{Q}\},\ R_2 = \left\{\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$$

și „+“ și „·“ sunt operațiile de adunare și înmulțire uzuale.

Demonstrați că cele două inele sunt izomorfe.

3. Fie mulțimea $K = (0, +\infty)$ cu operațiile $x \top y = x^{\ln\sqrt[3]{y}}$, $x \perp y = xy$. Arătați că:

(3p) a) tripletul $(K, \perp, \top)$ este corp comutativ.

(2p) b) între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(K, \perp, \top)$ există un izomorfism de forma: $f : \mathbb{R} \to K$, $f(x) = e^{ax} + b$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

(2p) **1.** Se consideră inelele $(R_1, +, \cdot)$, $(R_2, +, \cdot)$, unde:

$$R_1 = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Z}\},\ R_2 = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$$

și „+“ și „·“ sunt operațiile de adunare și înmulțire uzuale. Demonstrați că cele două inele sunt izomorfe.

(2p) **2.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc operațiile:

$x \oplus y = x + y - a,\ a \in \mathbb{Z}$;

$x \odot y = xy - a(x+y) + a^2 + a$;

$x \boxplus y = x + y + b,\ b \in \mathbb{Z}$; $x \boxdot y = xy + b(x+y) + b^2 - b$.

Demonstrați că $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + a + b$ este un izomorfism de inele, $(\mathbb{Z}, \boxplus, \boxdot) \simeq (\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

3. Fie mulțimea $K = (-\infty, 1)$ și aplicațiile: $x \top y = 1 - (1-x)^{\ln(1-y)}$, $x \perp y = x + y - xy$.

(3p) a) Demonstrați că tripletul $(K, \perp, \top)$ este corp comutativ.

(2p) b) Arătați că funcția: $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1-x)$ este un izomorfism de corpuri $(K, \perp, \top) \simeq (\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Test grilă

Pentru fiecare dintre exercițiile următoare, încercuiți varianta corectă de răspuns.

1. Mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ a matricelor cu elemente din $\mathbb{Z}_2$ are numărul de elemente: a) 1; b) 4; c) 16; d) 32; e) 64. Numărul elementelor inversabile ale inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ este: a) 0 ; b) 1 ; c) 2 ; d) 6 ; e) 16.

2. Fie inelul $\left(\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}\right\}, +, \cdot\right)$ și E elementul unitate în raport cu înmulțirea; atunci:

a) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $E = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. În inelul $\mathbb{Z}_{24}$ mulțimea elementelor inversabile este:

a) {1, 2, 7}; b) {1, 3, 11}; c) {1, 5, 8}; d) {1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}; e) {1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}.

4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ și $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu $A \cdot X = \frac{1}{2}X$. Atunci: a) $X = I_n$; b) $X = O_n$; c) $X = A$; d) $X = A + I_2$; e) X nu există.

Polinoame

Polinoame având coeficienți într-un corp comutativ

Definiția polinoamelor

Fie X un simbol numit *nedeterminată* și K un corp comutativ. Corpul K poate fi corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale, corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe sau un corp $\mathbb{Z}_p$ de clase de resturi, p număr prim.

Dacă $a_0, a_1, ..., a_k, ...$ este un șir de elemente din corpul K, șir având proprietatea că doar un număr finit de elemente sunt diferite de zero, atunci expresia formală f,

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_kX^k + ...$$

se numește *polinom* în nedeterminata X având coeficienții în K; elementul a_k, $k \in \mathbb{N}$ se numește *coeficientul de rang k* al polinomului f, iar a_kX^k se numește *termenul de rang k* al lui f.

Vom nota cu $K[X]$ mulțimea tuturor polinoamelor având coeficienții în corpul K.

Cum $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, avem $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Dacă $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$, atunci termenii a_kX^k se omit când $a_k = 0$. Când $a_k = 1$, termenul $1 \cdot X^k$ se scrie mai simplu X^k.

Astfel în $\mathbb{R}[X]$ scriem:

$f = 3 + 2X + 0X^2 + 5X^3 + 0X^4 + ... = 3 + 2X + 5X^3$

$g = 0 + 3X + 0X^2 + 1 \cdot X^3 + 0X^4 + ... = 3X + X^3$.

Polinomul din $K[X]$ cu toți coeficienții egali cu zero se numește *polinomul zero* sau *polinom nul* și se notează cu 0. Așadar $0 = 0 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + ... + 0 \cdot X^k + ...$

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$ și $g = b_0 + b_1X + ... + b_kX^k + ...$

Spunem că polinomul f este *egal* cu polinomul g și scriem $f = g$, dacă $a_k = b_k$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

Așadar, două polinoame f și g din $K[X]$ sunt egale dacă pentru orice $k \in \mathbb{N}$ coeficientul de rang k al lui f coincide cu coeficientul de rang k al lui g.

1) Determinați corpul K pentru fiecare dintre următoarele polinoame:

a) $f = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}X + \frac{1}{5}X^2,\ f \in K[X]$;

b) $f = -1 + X + X^2 - \frac{1}{2}X^3,\ f \in K[X]$;

c) $f = X^4 - 1,\ f \in K[X]$;

d) $f = X^3 - 7X + 1,\ f \in K[X]$;

e) $f = X^{10} - \frac{1}{3}X^3,\ f \in K[X]$;

f) $f = aX^2 + bX + 1,\ a, b \in \mathbb{Q},\ f \in K[X]$;

g) $f = \sqrt{2} + X,\ f \in K[X]$;

h) $f = 1 + X + X^2 + X^3 - \sqrt{3}X,\ f \in K[X]$;

i) $f = -3 + 2\sqrt{2}X^4,\ f \in K[X]$;

j) $f = X^{11} - X^{10} + X^9 - X^8 + \sqrt{7},\ f \in K[X]$;

k) $f = aX^2 + bX + 1,\ a, b \in \mathbb{R},\ f \in K[X]$;

l) $f = i + X^2,\ f \in K[X]$;

m) $f = 1 + iX - X^2,\ f \in K[X]$;

n) $f = X^3 + iX^2 + iX + 1,\ f \in K[X]$;

o) $f = mX^2 - 1,\ m \in \mathbb{C},\ f \in K[X]$;

EXEMPLU

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = c - 1 + 4X + (2a - b)X^2$, $g = (3a - 2b)X + X^2 + dX^3$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Să determinăm numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = g$.

Conform definiției egalității polinoamelor avem $f = g$ dacă și numai dacă $\begin{cases} c-1=0 \\ 3a-2b=4 \\ 2a-b=1 \\ d=0 \end{cases}$, de unde $a = -2$, $b = -5$, $c = 1$ și $d = 0$.

Fie $f \in K[X]$, $f \neq 0$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$

Cum $f \neq 0$, cel puțin un coeficient al lui f este diferit de zero. Numărul coeficienților lui f diferiți de zero fiind finit, există un cel mai mare număr natural n astfel încât $a_n \neq 0$.

Definiție. Fie $f \in K[X]$, $f \neq 0$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$

Cel mai mare număr natural n cu proprietatea $a_n \neq 0$ se numește *gradul* polinomului f și se notează cu grad f.

Un polinom de forma aX^n cu $a \in K$, $a \neq 0$ și $n \in \mathbb{N}$ se numește *monom*, gradul acestuia fiind egal cu n.

Dacă $f \in K[X]$, $f \neq 0$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$ și grad $f = n$, atunci putem scrie:

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$, unde $a_n \neq 0$.

Monomul a_nX^n se numește *termenul principal* al lui f, iar a_n se numește *coeficientul dominant* al lui f. Dacă $a_n = 1$ spunem că f este *polinom unitar* sau *polinom monic*.

Coeficientul a_0 se numește *termenul liber* al polinomului f. Polinoamele de grad zero și polinomul zero (al cărui grad nu se definește) se numesc *polinoame constante*.

Dacă un polinom $f \in K[X]$, $f \neq 0$ este scris $f = a_0 + a_1X + {} +...+ a_nX^n$, atunci spunem că f este reprezentat sub *forma canonică*, în ordinea crescătoare a puterilor nedeterminatei. Dacă scriem $f = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$, atunci spunem că f este reprezentat sub *forma canonică*, în ordinea descrescătoare a puterilor nedeterminatei.

p) $f = aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{C}$, $f \in K[X]$;

q) $f = a$, $a \in \mathbb{Q}$, $f \in K[X]$;

r) $f = a$, $a \in \mathbb{R}$, $f \in K[X]$;

s) $f = a$, $a \in \mathbb{C}$, $f \in K[X]$.

2) Care dintre următoarele polinoame sunt egale?

$f = X^2 + X + 1$;

$g = 1 + X + X^2$;

$h = 1 - X + X^2$.

3) Determinați, în fiecare caz în parte, numerele reale m și n astfel încât polinoamele f și g să fie egale:

a) $f = X^6 + X^3 + m$, $g = nX^6 + X^3 + 1$;

b) $f = X + 2n$, $g = mX + 2$;

c) $f = X^2 + m$, $g = mX^2 - n$;

d) $f = \sqrt{5}X^2 + m - n$, $g = \sqrt{5}X^2$;

e) $f = X^3 + n$, $g = nX^3 + m\sqrt{2}$.

4) Scrieți următoarele polinoame în formă canonică în ordinea descrescătoare a puterilor nedeterminatei X:

a) $f = X^2 + X^3 + 1$;

b) $f = 3X^2 + X - 2X^2 + 7X$;

c) $f = X^2 - 4X + 5X + X^3$;

d) $f = X^3 - 2X^4 + X + 5X^4 - 2$;

e) $f = iX^3 - iX^2 + 2X^4 - 1$;

f) $f = 2X - 8X^2 + 3X^3 - 8iX^2$;

g) $f = 6X - 4X + 3X - 5X$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 1 + (\alpha^2 - 1)X + (\alpha^2 - 4\alpha + 3)X^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)X^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Precizează gradul lui f. Discuție în funcție de valorile reale ale lui α.

Soluție. Se observă că pentru $\alpha \in \{1; 2\}$ se anulează coeficientul lui X^3, cel al lui X^2 se anulează pentru $\alpha \in \{1; 3\}$, iar cel al lui X pentru $\alpha \in \{-1; 1\}$. Rezultă că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$, grad $f = 3$, pentru $\alpha = 2$, grad $f = 2$ și pentru $\alpha = 1$, grad $f = 0$.

2) Determinați gradul polinomului $f = (m^2 + 1)X + 1$ dacă: a) $m \in \mathbb{R}$; b) $m \in \mathbb{C}$.

Soluție. a) Dacă $m \in \mathbb{R}$, atunci $m^2 + 1 \neq 0$ și grad $f = 1$.

b) Din $m^2 + 1 = 0$, $m \in \mathbb{C}$ obținem $m \in \{-i, i\}$. Dacă $m \in \{-i, i\}$, atunci grad $f = 0$; dacă $m \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, atunci grad $f = 1$.

Operații cu polinoame

Fie K un corp comutativ și $K[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X având coeficienții în K. Pe mulțimea $K[X]$ introducem două operații algebrice, *adunarea* și *înmulțirea* polinoamelor și vom arăta că în raport cu acestea $K[X]$ are o structură de inel comutativ.

♦ *Adunarea polinoamelor*

Fie $f, g \in K[X]$,

$f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$, $g = b_0 + b_1X + ... + b_kX^k + ...$

Definim *suma* polinomului f cu polinomul g, notată cu $f + g$, prin

$$f + g \overset{\text{def}}{=} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_k + b_k)X^k + ...$$

Să observăm că $f + g \in K[X]$, adică suma a două polinoame este tot un polinom. Această afirmație este evidentă când $f = 0$ sau $g = 0$. Astfel, dacă $f = 0 = 0 + 0X + ... + 0X^k + ...$, atunci

$0 + g = (0 + b_0) + (0 + b_1)X + ... + (0 + b_k)X^k + ... = b_0 + b_1X + ... + b_kX^k + ... = g$.

Putem deci presupune că $f \neq 0$ și $g \neq 0$. Dacă $n = \text{grad} f$, $m = \text{grad}\, g$ și $n \leqslant m$, atunci $f + g = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n + 0X^{n+1} + ... + b_0 + b_1X + ... + b_mX^m + 0X^{m+1} + ... = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_n + b_n)X^n + b_{n+1}X^{n+1} + ... + b_mX^m + 0X^{m+1} + ...$

Rezultă că $f + g$ are un număr finit de coeficienți diferiți de 0, deci $f + g \in K[X]$.

Din calculul efectuat mai sus rezultă:

$\text{grad}(f + g) = \max\{\text{grad} f, \text{grad}\, g\}$, dacă $m \neq n$ și

$\text{grad}(f + g) \leqslant \max\{\text{grad} f, \text{grad}\, g\}$, dacă $m = n$ și $f + g \neq 0$

Dacă $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$, atunci polinomul $(-a_0) + (-a_1)X + ... + (-a_k)X^k + ...$ se notează cu $-f$ și se numește *opusul* lui f.

Avem $f + (-f) = (-f) + f = 0$. Într-adevăr

$f + (-f) = (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))X + ... + (a_k + (-a_k))X^k + ... = 0 + 0X + ... + 0X^k + ... = 0$ și analog se arată că $(-f) + f = 0$.

Principalele proprietăți ale operației de adunare a polinoamelor sunt menționate în următorul enunț.

Teorema 1. Fie K un corp comutativ și $K[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminanta X având coeficienții în K. Avem:

(1) $(f + g) + h = f + (g + h)$, $\forall f, g, h \in K[X]$ (asociativitate)

(2) $f + g = g + f$, $\forall f, g \in K[X]$ (comutativitate)

(3) $0 + f = f + 0 = f$, $\forall f \in K[X]$ (polinomul 0 este element neutru)

(4) $f + (-f) = (-f) + f = 0$, $\forall f \in K[X]$ (orice polinom are opus)

Altfel spus, $K[X]$ este grup abelian în raport cu operația de adunare a polinoamelor.

5) Calculați $f + g + h$, știind că polinoamele $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$ și

a) $f = X^2 + X + 1$, $g = X^2 - X - 1$ și $h = -2X^2$;

b) $f = X^5 - iX^3$, $g = iX^3 - iX$ și $h = iX - 1$;

c) $f = X^4 + iX + 1 - i$, $g = -X^4 + i$ și $h = -iX - 1$.

În fiecare caz în parte determinați gradul polinomului $f + g + h$.

6) Calculați $f + g + h$, dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g \in \mathbb{Z}_3[X]$ și $h \in \mathbb{Z}_3[X]$.

a) $f = X^3 + X^2 + X$, $g = X^2 + X + \hat{1}$ și $h = \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$;

b) $f = X^4 + \hat{1}$, $g = \hat{2}X^4 + \hat{1}$ și $h = \hat{1}$.

În fiecare caz în parte determinați gradul polinomului $f + g + h$.

7) Pentru fiecare dintre polinoamele următoare $f, g \in \mathbb{C}[X]$ calculați:

i) $f + g$, ii) $-g$ și iii) $f - g$ știind că:

a) $f = X^3 - 2X^2 + X - 1$, $g = -X^2 + 1$;

b) $f = X^4 - X^2 + 2$, $g = -X^4 + X^2 - 2$;

c) $f = 3X - X^2$, $g = 3X^2 - X$;

d) $f = X^7 + X^6 + X^5$, $g = X^4 + X^3 + X^2$;

e) $f = X^3 - 5X + 2$, $g = X^3 - 5X + 2$;

f) $f = (1 + i) + (1 - i)X + iX^2 - iX^3$, $g = -i + iX + (1 - i)X^2 + (1 + i)X^3$.

8) Calculați $f + g$, $-f$, $-g$ și $f - g$ dacă $f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$ și

a) $f = X^2 + \hat{2}$, $g = X^3 + \hat{3}X + \hat{2}$;

b) $f = \hat{3}X + \hat{1}$, $g = X^2 + X + \hat{3}$;

c) $f = X^5 + X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$, $g = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{3}$.

9) Determinați numerele complexe a și b știind că $f = X^4 + aX + i$, $g = -X^4 - iX + b$ și $f + g = 0$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

Demonstrație. (2) Dacă a_k și b_k sunt coeficienții de rang k ai lui f, respectiv g, atunci $a_k + b_k$ este coeficientul de rang k al lui $f + g$, iar cel al lui $g + f$ este $b_k + a_k$. Cum $a_k + b_k = b_k + a_k$, oricare ar fi k (adunarea corpului K este comutativă) rezultă că $f + g = g + f$.

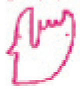
Proprietatea (1) se verifică analog, iar proprietățile (3) și (4) au fost deja demonstrate în aliniatele care preced enunțul teoremei. ■

Pe $K[X]$ se poate defini și operația de scădere a polinoamelor prin:

$$f - g \overset{\text{def}}{=} f + (-g),\ \forall f, g \in K[X].$$

Conform acestei definiții putem simplifica scrierea polinoamelor. Astfel polinomul $3 + 2X + (-5)X^2$ poate fi scris $3 + 2X - 5X^2$, iar polinomul $(-3) + (-4)X + 2X^3$ poate fi scris $-3 - 4X + 2X^3$.

EXEMPLE



1) Dacă $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = \frac{2}{3} - 5X + 4X^3$, $g = 1 + 2X - 3X^2$, atunci:

$$f + g = \left(\frac{2}{3} + 1\right) + (-5 + 2)X + (0 - 3)X^2 + (4 + 0)X^3 = \frac{5}{3} - 3X - 3X^2 + 4X^3,$$

$$-g = -1 - 2X + 3X^2 \text{ și}$$

$$f - g = \left(\frac{2}{3} - 1\right) + (-5 - 2)X + (0 + 3)X^2 + (4 - 0)X^3 = -\frac{1}{3} - 7X + 3X^2 + 4X^3.$$

2) Dacă $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3} + \hat{2}X + X^2$, $g = \hat{1} + \hat{3}X + \hat{2}X^2$ atunci

$$f + g = (\hat{3} + \hat{1}) + (\hat{2} + \hat{3})X + (\hat{1} + \hat{2})X^2 = \hat{4} + \hat{0}X + \hat{3}X^2 = \hat{4} + \hat{3}X^2,$$

$$-g = (-\hat{1}) + (-\hat{3})X + (-\hat{2})X^2 = \hat{4} + \hat{2}X + \hat{3}X^2.$$

$$f - g = f + (-g) = (\hat{3} + \hat{4}) + (\hat{2} + \hat{2})X + (\hat{1} + \hat{3})X^2 = \hat{2} + \hat{4}X + \hat{4}X^2.$$

♦ *Înmulțirea polinoamelor*

Să definim acum operația de înmulțire a polinoamelor.

Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + \ldots$, $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_kX^k + \ldots$

Definim *produsul* lui f cu g, notat fg, prin $fg = c_0 + c_1X + \ldots + c_kX^k + \ldots$, unde

$$c_0 = a_0b_0$$
$$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$$
$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$$
$$\ldots$$
$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0 = \sum_{i+j=k} a_ib_j.$$
$$\ldots$$

Evident, dacă $f = 0$ sau $g = 0$, atunci $fg = 0$. Presupunem că $f \neq 0$ și $g \neq 0$. Fie $n = \text{grad } f$ și $m = \text{grad } g$. Când $k > n + m$ și $i + j = k$ avem $i > n$ sau $j > m$, deci $a_i = 0$ sau $b_j = 0$ și atunci $c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j = 0$.

Când $k = n + m$ toate produsele a_ib_j sunt egale cu 0 mai puțin cel corespunzător lui $i = n$ și $j = m$ care este egal cu $a_nb_m \neq 0$.

10) Determinați $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3$ știind că $f = X^2 + \hat{a}$, $g = \hat{b}X^2 + \hat{1}$ și $f + g = \hat{0}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

11) Determinați $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât gradul polinomului f să fie egal cu 3 în fiecare din cazurile următoare:

a) $f = \hat{a}X^4 + \hat{2}X + \hat{1}$;

b) $f = (\hat{a} + \hat{1})X^3 + \hat{2}$.

În fiecare caz în parte scrieți toate polinoamele $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ care îndeplinesc condiția dată.

12) Calculați $f \cdot g$ dacă:

a) $f = X - 1$, $g = X^2 + X + 1$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X + 1$, $g = X^2 - X + 1$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

c) $f = X - 1$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

d) $f = X + 1$, $g = X^3 - X^2 + X - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

e) $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $g = X - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

f) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $g = X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

g) $f = X^2 - X + 1$, $g = X + 2$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

h) $f = 1 + i + (1 - i)X + iX^2$, $g = (1 - i) + (1 + i)X - iX^2$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

i) $f = 1 + X + X^2$, $g = 1 - X + X^2$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

j) $f = X^3 + X^2 + X$, $g = X^4 - X^2 + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

În fiecare caz în parte determinați grad f, grad g și grad (fg).

Concluzionăm că *produsul fg al polinoamelor f și g este tot un polinom, iar dacă $f \neq 0$ și $g \neq 0$ atunci termenul (respectiv coeficientul) principal al produsului fg este egal cu produsul termenilor (respectiv coeficienților) principali ai lui f și g.*

Mai mult, dacă $f \neq 0$ și $g \neq 0$, atunci $fg \neq 0$ și

grad fg = grad f + grad g,

adică gradul produsului este egal cu suma gradelor factorilor.

Când $f \neq 0$, $g \neq 0$, iar grad $f = n$ și grad $g = m$, atunci produsul fg poate fi precizat după cum urmează:

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \ldots + \left(\sum_{i+j=k} a_ib_j\right)X^k +$$

$$+ \ldots + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})X^{n+m-1} + a_nb_mX^{n+m}.$$

Principalele proprietăți ale operației de înmulțire a polinoamelor sunt enumerate în enunțul următor:

Teorema 2. Fie K un corp comutativ și $K[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X având coeficienții în K.

Avem:

(1) $(fg)h = f(gh)$, $\forall f, g, h \in K[X]$ (asociativitate)

(2) $fg = gf$, $\forall f, g \in K[X]$ (comutativitate)

(3) $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$, $\forall f \in K[X]$ (polinomul 1 este element neutru)

(4) $f(g + h) = fg + fh$, $\forall f, g, h \in K[X]$ (distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea)

Demonstrație

(1) Fie a_i, b_i, c_i, $i \in \mathbb{N}$ coeficienții de rang i respectiv ai polinoamelor f, g și h. Fie u_k și v_k, $k \in \mathbb{N}$ coeficienții lui fg, respectiv $(fg)h$. Pentru orice $p \in \mathbb{N}$ avem:

$$v_p = \sum_{s+k=p} u_sc_k = \sum_{s+k=p}\left(\sum_{i+j=s} a_ib_j\right)c_k = \sum_{(i+j)+k} (a_ib_j)c_k.$$

Analog, dacă v'_p este coeficientul de rang p al polinomului $f(gh)$, atunci:

$$v'_p = \sum_{i+(j+k)} a_i(b_jc_k).$$

Cum înmulțirea corpului K este asociativă avem $(a_ib_j)c_k = a_i(b_jc_k)$, oricare ar fi $i, j, k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $v_p = v'_p$, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, de unde $(fg)h = f(gh)$.

Demonstrațiile pentru afirmațiile (2), (3) și (4) sunt mai ușoare și le propunem ca exercițiu. ■

Din teoremele 1 și 2 rezultă:

Corolar. Mulțimea $K[X]$ a polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți în corpul comutativ K este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea polinoamelor.

În cele ce urmează $K[X]$ este numit *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții în corpul K.

13) Dacă $f = X - i$, $f \in \mathbb{C}[X]$ calculați:

a) f^2; b) f^3; c) $f + f^2$; d) $f^2 - f^3$.

14) Fie polinoamele

$f = (X + 1)^2 - (X - 1)^2$ și

$g = (X + 1)^3 - (X - 1)^3$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

a) Calculați f^2.

b) Calculați g.

c) Calculați $f^2 - g^2$.

d) Calculați $f + g$.

e) Calculați $f - g$.

f) Calculați $(f + g)(f - g)$.

15) Fie polinoamele $f = (X + 1)^2 - (X - 1)^2$ și $g = (X + i)^2 - (X - i)^2$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

a) Calculați f^2.

b) Calculați g.

c) Calculați $f^2 - g^2$.

d) Calculați $f + g$.

e) Calculați $f - g$.

f) Calculați $(f + g)(f - g)$.

16) Se dau polinoamele $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X]$

$f_1 = (1 + i) + (1 - i)X + iX^2 - iX^3$ și

$f_2 = -i + iX + (1 - i)X^2 + (1 + i)X^3$.

Determinați polinomul $f_3 \in \mathbb{C}[X]$ știind că $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.

17) Calculați fg știind că $f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$ și

a) $f = X^2 + \hat{2}$,

$g = X^3 + \hat{3}X + \hat{2}$;

b) $f = \hat{3}X + \hat{1}$,

$g = X^2 + X + \hat{3}$;

c) $f = X^5 + X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$,

$g = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{3}$.

În fiecare caz în parte determinați grad f, grad g și grad (fg).

În particular, $\mathbb{Q}[X]$ (respectiv $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$) este numit *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții raționali (respectiv reali, complecși).

Dacă p este un număr prim, atunci $\mathbb{Z}_p[X]$ este numit *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții în corpul claselor de resturi modulo p.

De asemenea, vom nota cu $\mathbb{Z}[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X având coeficienții întregi. Avem evident $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$, iar dacă f, $g \in \mathbb{Z}[X]$, atunci $f + g \in \mathbb{Z}[X]$ și $fg \in \mathbb{Z}[X]$. Rezultă că $\mathbb{Z}[X]$ este inel în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire induse de adunarea și de înmulțirea polinoamelor din $\mathbb{Q}[X]$. Deci $\mathbb{Z}[X]$ este *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții întregi.

Observație. Într-un inel de polinoame $K[X]$, unde K este corp comutativ, sunt adevărate regulile de calcul dintr-un inel comutativ. Așadar, dacă f, g, $h \in K[X]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

(1) $f(-g) = (-f)g = -fg$ (regula semnelor)

(2) $f(g - h) = fg - fh$ (distributivitatea înmulțirii în raport cu scăderea)

(3) $(f + g)(f - g) = f^2 - g^2$

(4) $f^3 - g^3 = (f - g)(f^2 + fg + g^2)$;

$f^3 + g^3 = (f + g)(f^2 - fg + g^2)$

(5) $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{n-k} g^k$.

18) Verificați proprietățile (1)-(5) din observație pentru următoarele polinoame:

a) $f = X^3 - 1,\quad g = X^3 + 1,$

$f, g \in \mathbb{C}[X]$;

b) $f = X^2 + \hat{1},\quad g = X^2 + \hat{2},$

$f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

19) Să se determine $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$ știind că $f(-1) = 0$ și $f\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie polinoamele f, $g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - X^2 + 3X + 1$, $g = 5X^2 - 2X + 3$. Calculați produsul fg.

Soluție. Metoda I (pe baza definiției produsului). Produsul fg este polinom de gradul $3 + 2 = 5$, deci $fg = c_5X^5 + c_4X^4 + + c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0$, cu $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,5}$.

Notând cu a_i coeficienții lui f și cu b_j pe cei ai lui g și folosind definiția produsului, avem:

$c_0 = a_0b_0 = 1 \cdot 3 = 3$

$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 7$

$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = -4$

$c_3 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 23$

$c_4 = a_2b_2 + a_3b_1 = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = -9$

$c_5 = a_3b_2 = 2 \cdot 5 = 10$

Așadar $fg = 10X^5 - 9X^4 + 23X^3 - 4X^2 + 7X + 3$

Metoda a II-a (folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare)

Înmulțim succesiv pe f cu monoamele lui g și adunăm apoi monoamele de același grad (adică reducem *termenii asemenea*). Calculele pot fi organizate ca la înmulțirea numerelor naturale scrise în baza 10 (fără să mai avem corespondent pentru transfer de unitate când suma cifrelor este mai mare sau egală decât 10).

$$
\begin{array}{r}
f = 2X^3 - X^2 + 3X + 1\ \cdot \\
g = 5X^2 - 2X + 3 \\
\hline
6X^3 - 3X^2 + 9X + 3 \\
-4X^4 + 2X^3 - 6X^2 - 2X\phantom{{}+3} \\
10X^5 - 5X^4 + 15X^3 + 5X^2.\phantom{{}-2X+3} \\
\hline
fg = 10X^5 - 9X^4 + 23X^3 - 4X^2 + 7X + 3
\end{array}
$$

2) Fie $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$. Calculați fg.

Soluție. Avem:

$$\begin{array}{r} f = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \\ g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{4} \\ \hline \hat{5}X^2 + X + \hat{5} \\ \hat{2}X^3 + \hat{6}X^2 + \hat{2}X \quad\; \\ \hat{6}X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{6}X^2 \qquad\qquad\; \\ \hline g = \hat{6}X^4 + \hat{6}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{5} \end{array}$$

♦ *Înmulțirea polinoamelor cu scalari*

Fie K un corp comutativ. Elementele corpului K sunt numite și *scalari*. Considerate ca elemente ale inelului $K[X]$ acestea sunt numite polinoame constante.

Dacă $a \in K$ și $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, atunci produsul af al polinomului constant a cu polinomul f este, conform regulii de înmulțire a polinoamelor, următorul polinom:

$af = aa_0 + (aa_1)X + \ldots + (aa_n)X^n$

Polinomul af se numește *produsul polinomului f cu scalarul a*.

Din Teorema 2 rezultă că înmulțirea polinoamelor cu scalari are proprietățile:

(1) $(a + b)f = af + bf$ (2) $a(f + g) = af + ag$

(3) $a(bf) = (ab)f$ (4) $1 \cdot f = f$

oricare ar fi $a, b \in K, f, g \in K[X]$.

De asemenea, o verificare imediată arată că

(5) $(af)g = f(ag) = a(fg), \forall a \in K, \forall f, g \in K[X]$.

20) Dacă $f = (X + 1)^2 + (X - 1)^2$ și $g = (X + i)^2 + (X - i)^2$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$, calculați:

a) $2f$;

b) $3g$;

c) $2f - 3g$;

d) f^2;

e) g^2;

f) $f^2 - g^2$;

g) $5(f + g)$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați toate polinoamele f de grad $n \in \mathbb{N}^*$ care verifică relația: $(1 + X + \ldots + X^n)f(X) = f(1) + f(X) + \ldots + f(X^n)$ (dacă $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ și $g \in \mathbb{C}[X]$, atunci $f(g) \overset{\text{def}}{=} a_0 + a_1g + \ldots + a_ng^n$).

Soluție. Observăm că dacă $\text{grad } f = n$ și $\text{grad } g = m$ atunci $\text{grad } f(g) = nm$.

Deci $\text{grad } (f(1) + f(X) + \ldots + f(X^n)) = n^2$ iar $\text{grad } (1 + X + \ldots + X^n)f(X) = 2n$. Deducem că $n^2 = 2n$, deci $n = 2$. Așadar polinomul este de forma $f = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Relația dată devine: $(1 + X + X^2)(aX^2 + bX + c) = (a + b + c) + (aX^2 + bX + c) + (aX^4 + bX^2 + c)$.

Obținem: $aX^4 + (a + b)X^3 + (a + b + c)X^2 + (b + c)X + c = aX^4 + (a + b)X^2 + bX + a + b + 3c$.

Două polinoame sunt egale dacă au același grad și coeficienții egali.

Deci $a + b = 0$, $a + b + c = a + b$, $b + c = b$ și $c = a + b + 3c$. Deci $c = 0$, $b = -a$ și $f = aX^2 - aX$, $a \in \mathbb{C}^*$.

2) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ și $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $aX^4 + bX^3 + 1 = (X - 1)^2 f(X)$.

Soluție. Evident grad $f = 2$ și coeficientul dominant al lui f este egal cu a. Așadar $f(X) = aX^2 + cX + d$, unde $c, d \in \mathbb{R}$. Rezultă că $aX^4 + bX^3 + 1 = (X - 1)^2 (aX^2 + cX + d)$.

Identificând coeficienții, după ce se efectuează produsul din membrul drept al egalității precedente, se obține sistemul: $\begin{cases} c - 2a = b \\ a - 2c + d = 0 \\ c - 2d = 0 \\ d = 1 \end{cases}$. Se obțin $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$ și $d = 1$. În particular $f = 3X^2 + 2X + 1$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați gradele polinoamelor

a) $f = m - 1 + (m^2 - 3m + 2)X + (m - 2)X^2$, $m \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

b) $g = z^2 + 1 + (1 + i)X^2 + (z + i)(z^3 + i)X^5$, $z \in \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{C}[X]$.

2. Fie $f = 1 + \bar{z}X^2 + X^3$, $g = z^3 + z^2X^2 + X^3$, $z \in \mathbb{C}$. Determinați z astfel încât $f = g$.

3. Fie $f = 3 + \alpha X + (\alpha - 2)X^2$, $g = 1 - 2X + \alpha(\alpha - 3)X^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculați grad$(f + g)$ și grad fg. Discuție în funcție de valorile reale ale lui α.

4. Determinați grad f dacă $f \in \mathbb{R}[X]$,
$f = (m^2 - 3m + 2)X^3 + (m^2 - 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 1$, $m \in \mathbb{R}$.

5. Calculați $f + g$, $f - g$ și $2f + 3g$ dacă

a) $f = 1 + X + X^2$, $g = 1 - X^2 + X^3$;

b) $f = (1 + i)^2 + (1 - i)^3X$, $g = 2i + (3 - i)X^2$.

6. Calculați fg dacă:

a) $f = 1 + X$, $g = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$;

b) $f = 2i + (1 + i)X + iX^2$, $g = 1 + i + (1 - i)X$.

7. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$,
$f = \hat{2}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$, $g = \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2}$.
Calculați: a) $f + g$; b) $f - g$; c) fg; d) $\hat{3}f + \hat{2}g$.

8. Fie polinoamele $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Z}[X]$. Determinați $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ dacă:

a) $f_1 = X^2 + X + 1$, $f_2 = X^2 - X + 1$, $f_3 = X^2 - 1$;

b) $f_1 = X^{2^n} - X^{2^{n-1}} + 1$, $f_2 = X^{2^{n-1}} - X^{2^{n-2}} + 1$,
$f_3 = X^{2^{n-1}} + X^{2^{n-2}} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

9. Fie polinoamele $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Determinați $f = f_1 \cdot f_2$ dacă:

a) $f_1 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)X^{n-k-1}$, $f_2 = (X-1)^2$;

b) $f_1 = \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(2n-k)X^{2n-k-1}$, $f_2 = (X+1)^2$.

10. Demonstrați relația

$$(X + 2X^2 + \ldots + nX^n)(1-X)^2 = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

11. Determinați un polinom f de gradul al doilea și un polinom g de gradul întâi astfel încât să avem: $(X-1)f + (X^2+1)g = -2X - 2$.

12. Determinați $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + aX + b$ știind că este pătratul unui polinom $g \in \mathbb{R}[X]$.

13. Se dau polinoamele $f = aX + b$ și $g = AX + B$. Arătați că dacă $f(g(X)) = g(f(X))$, atunci $(a-1)(B-b) = b(A-a)$.

14. Determinați $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât
grad f = grad g = 1 și
$(X^2 + 2X + 2)f + (X^2 + 3X + 3)g = 1$.

15. Arătați că:

a) $f + f + f = \hat{0}$, $\forall f \in \mathbb{Z}_3[X]$;

b) $(f + g)^3 = f^3 + g^3$, $\forall f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$;

c) Calculați $(\hat{2}X^2 + X + \hat{1})^3$.

16. Fie a, b, c trei numere reale distincte și polinoamele $f = (X - b)(X - c)$, $g = (X - a)(X - c)$ și $h = (X - a)(X - b)$. Dacă $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

17. Fie $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât grad $f = 3$, grad $g = 2$ și grad $h = 1$.
Dacă $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

18. Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât
$X^3 - 3X^2 - 2X + 11 = a(X - 2)^3 + b(X - 2)^2 + c(X - 2) + d$.

19. Arătați că:

a) $X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $X^n + 1 = (X + 1)(X^{n-1} - X^{n-2} + \ldots - X + 1)$, n impar.

20. Arătați că:

$$(f+g)^n = f^n + C_n^1 f^{n-1}g + \ldots + C_n^k f^{n-k}g^k + \ldots + g^n, n \in \mathbb{N}.$$

21. Determinați polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$, $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ astfel încât $f(X) = f(X + 1)$, unde $f(X + 1) = a_n(X + 1)^n + a_{n-1}(X + 1)^{n-1} + \ldots + a_1(X + 1) + a_0$.

22. Determinați $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ dacă
grad f = grad g = 1, $f^2(X) + g^2(X) = X^2 + 1$ și
$f(2)g(2) = 2$.

23. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - 5X^2 + 3X - 4$.
Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât
$f = a(X - 2)^3 + b(X - 2)^2 + c(X - 2) + d$.

24. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că există un polinom $g \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât
$X^4 + X^3 + X^2 + aX + b = g^2(X)$.

Teorema împărțirii cu rest pentru polinoame

Inelul $K[X]$, unde K este corp comutativ, are proprietăți de natură aritmetică asemănătoare cu cele ale inelului $\mathbb{Z}$, al numerelor întregi. Proprietățile aritmetice ale inelului $\mathbb{Z}$ au ca suport *teorema împărțirii cu rest* sau a *împărțirii euclidiene*. Amintim această teoremă în formularea următoare: *dacă b este un număr întreg, $b > 0$, atunci oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ există $q, r \in \mathbb{Z}$ unic determinate astfel încât*:

$a = bq + r$ cu $0 \leqslant r < b$

Numerele q și r se numesc *câtul*, respectiv *restul* împărțirii euclidiene a lui a prin b.

EXEMPLE

1) Dacă $a = 37$ și $b = 5$, atunci $q = 7$ și $r = 2$

2) Dacă $a = -25$ și $b = 7$, atunci $q = -4$ și $r = 3$.

3) Dacă $a = 195$ și $b = 15$, atunci $q = 13$ și $r = 0$.

Teorema împărțirii cu rest pentru numere întregi este adevărată și în inelul $K[X]$, unde K este corp comutativ, în formularea următoare.

Teorema 1. Fie g un polinom din $K[X]$, $g \neq 0$. Oricare ar fi polinomul $f \in K[X]$, există polinoamele $q, r \in K[X]$ unic determinate astfel încât:

$f = gq + r$ cu grad $r <$ grad g, dacă $r \neq 0$.

Demonstrația cuprinde două etape: existența polinoamelor q și r și unicitatea lor.

Existența. Dacă $f = 0$, atunci putem lua $q = 0$ și $r = 0$.

Dacă $f \neq 0$ fie $n =$ grad f și $m =$ grad g, $f = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$, $g = b_mX^m + ... + b_1X + b_0$.

Dacă $n < m$ afirmația din enunț este adevărată dacă luăm $q = 0$ și $r = f$.

Presupunem $n \geqslant m$ și că afirmația din enunț este adevărată pentru polinomul $f_1 \in K[X]$, $f_1 \neq 0$ cu grad $f_1 < n$. Fie $f_1 \in K[X]$ definit prin

$$(1) \quad \boxed{f_1 = f - \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g} \quad ,$$

unde cu $\frac{a_n}{b_m}$ se notează elementul $a_nb_m^{-1} \in K$.

Termenul principal al polinomului $\frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g$ este $\frac{a_n}{b_m}X^{n-m}b_mX^m = a_nX^n$. Așadar polinoamele f și $\frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g$ au același termen principal, deci grad $f_1 <$ grad $f = n$ când $f_1 \neq 0$.

Conform ipotezei de inducție există două polinoame $q_1, r_1 \in K[X]$ astfel încât

(2) $f_1 = gq_1 + r_1$ cu grad $r_1 <$ grad g, dacă $r_1 \neq 0$. Folosind (1) și (2) se obține $f = g\left(q_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}\right) + r_1$ și rezultatul din enunț este adevărat dacă punem $q = q_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}$ și $r = r_1$.

1) Scrieți teorema împărțirii cu rest (împărțirii euclidiene) pentru fiecare dintre exemplele următoare:

a)
```
 37 | 5
 35 |---
    | 7
 ==2
```

b)
```
 25 | 7
 21 |---
    | 3
 ==4
```

c)
```
 -25 | 7
 -28 |---
     | -4
 ==3
```

d)
```
 195 | 15
 15  |---
     | 13
 ==45
   45
   ==
```

2) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la g în cazurile:

a) $f = X^5 - 3X^2 + 2X + 1$, $g = X^2 + X$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

b) $f = 3X^2 + 5X + 1$, $g = \sqrt{3}X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

c) $f = \hat{3}X^2 + \hat{5}X + \hat{1}$, $g = \hat{3}X + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$.

d) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{1}$, $g = X^2 + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_2[X]$;

3) Fie polinoamele din $\mathbb{Z}[X]$ $f = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4$ și $g = X^2 - 2X + 3$.

În acest caz câtul și restul împărțirii lui f la g sunt $X^4 + X^3 - 2X^2 - 6X - 8$, respectiv $7X + 20$.

Unicitatea. Dacă $f = gq + r = gq' + r'$ cu $q, q', r, r' \in K[X]$, grad $r <$ grad g, grad $r' <$ grad g atunci $g(q - q') = r' - r$. Dacă $r' \neq r$, atunci $q \neq q'$ și avem $m >$ grad $(r' - r) =$ grad $g +$ + grad $(q - q') \geqslant m$, deci $m > m$. Contradicție. Așadar $r = r'$, deci $g(q - q') = 0$ și cum $g \neq 0$, obținem $q - q' = 0$, de unde $q = q'$.■

Observație. Demonstrația teoremei precedente oferă și un algoritm de calcul, adică o procedură de determinare efectivă a câtului q și restului r prin execuția de un număr finit (mai mic sau egal decât $n - m + 1$) de ori a pasului de la (1). Într-adevăr dacă $f_1 = 0$ sau $f_1 \neq 0$ cu grad $f_1 < m$, atunci $r = f_1$ și $q = \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}$. Dacă grad $f_1 = n_1 \geqslant m$ și $a_{n_1}^{(1)}$ este coeficientul dominant al lui f_1, atunci se aplică (1) lui $f = f_1$ și definim polinomul f_2,

$$f_2 = f_1 - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}X^{n_1-m}g.$$

Avem $f = g\left(\frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}X^{n_1-m}\right) + f_2$ ș.a.m.d. până când se găsește un prim polinom $f_k = 0$ sau $f_k \neq 0$ și grad $f_k < m$.

Vom avea $q = \frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}X^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_{n_k}^{(k)}}{b_m}X^{n_k-m}$ și $r = f_k$.

Această procedură de determinare a câtului q și restului r este cunoscută sub numele de *algoritmul împărțirii euclidiene* pentru polinoame având coeficienții într-un corp comutativ K.

1) Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^5 + 9X^4 + 2X^3 - 17X^2 + 3X + 8$, $g = x^2 + 2x - 3$. Să determinăm câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g.

Soluție:

Avem $n = 5$ și $m = 2$. Folosind pasul (1) determinăm succesiv polinoamele $f_1, f_2, \ldots$ până când se obține primul polinom f_k astfel încât $f_k = 0$ sau $f_k \neq 0$ și grad $f_k < m = 2$. Avem $r = f_k$. În cazul nostru:

$$f_1 = f - \frac{2}{1}X^{5-2}g = 5X^4 + 8X^3 - 17X^2 + 3X - 8$$

$$f_2 = f_1 - \frac{5}{1}X^{4-2}g = -2X^3 - 2X^2 + 3X - 8$$

$$f_3 = f_2 - \frac{(-2)}{1}X^{3-2}g = 2X^2 - 3X - 8$$

$$f_4 = f_3 - \frac{2}{1}X^{2-2}g = -7X - 2.$$

Ca și în cazul împărțirii euclidiene a numerelor întregi, calculele precedente pot fi prezentate astfel:

4) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g iar apoi scrieți teorema împărțirii cu rest, în fiecare dintre cazurile:

a) $f = 2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1$, $g = X^2 - 3$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

b) $f = 2X^6 - 3X^4 + 2X^2 - 10X + 1$, $g = X^3 - X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$.

c) $f = iX^4 - (1+i)X^2 + 3iX - 1 - i$, $g = X - 2i$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

5) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - aX^3 + (3a+7)X^2 - aX + 3$ să dea la împărțirea cu $X + 1$ restul 3.

6) Determinați a și b astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^4 + bX^3 + (b-2a)X^2 + 5X - 3a$ la polinomul $g = X^2 + X + 2$ să fie $X - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

7) Determinați m, astfel încât restul împărțirii polinomului f la polinomul g să fie egal cu 0, dacă:

a) $f = X^3 + (m+1)X^2 + (m-1)X$, $g = 2X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $m \in \mathbb{R}$;

b) $f = \widehat{m}X^3 + \widehat{m}X + \hat{2}$, $g = X + \hat{3}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $\widehat{m} \in \mathbb{Z}_5$.

8) Descompuneți în factori în $K[X]$ polinoamele $f, g \in K[X]$ $f = X^4 + X^2 + 1$ și $g = (X^2 + X - 3)(X^2 + X - 1) + 1$ știind că

a) $f, g \in \mathbb{Z}[X]$;

b) $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

c) $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

Indicație.

a) $f = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Efectuăm înmulțirea, apoi identificăm coeficienții și obținem $a = 1$, $c = -1$, $b = d = 1$.

$$\begin{array}{l|l}
f \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2X^5+9X^4+2X^3-17X^2+3X-8 & X^2+2X-3=g \\ \cline{2-2}
2X^3g \ldots\ldots\ldots \quad \underline{2X^5+4X^4-6X^3} & \\
f_1=f-2X^3g \quad / \quad 5X^4+8X^3-17X^2+3X-8 & \\
5X^2g \ldots\ldots\ldots \quad \underline{5X^4+10X^3-15X^2} & \\
f_2=f_1-5X^2g \ldots \quad / \quad -2X^3-2X^2+3X-8 & \\
-2Xg \ldots\ldots\ldots \quad \underline{-2X^3-4X^2+6X} & \\
f_3=f_2-(-2Xg) \ldots\ldots \quad / \quad 2X^2-3X-8 & \\
2g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underline{2X^2+4X-6} & \\
f_4=f_1-2g=r \ldots\ldots \quad / \quad -7X-2=r &
\end{array}$$

Observație. Dacă $f,\ g \in \mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$ și coeficientul dominant al lui g este ± 1 (adică inversabil în $\mathbb{Z}$) atunci $q,\ r \in \mathbb{Z}[X]$ (vezi Exemplul 1).

2) Fie $f,\ g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 3X^5 + X^4 - 6X^2 + 5X - 4$ și $g = 2X^3 - X + 1$. Să determinăm câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g.

Soluție. Folosind spații libere pentru termenii care au coeficientul egal cu zero, avem:

$$\begin{array}{l|l}
f = 3X^5 + X^4 \qquad\quad - 6x^2 + 5X - 4 & 2X^3 - X + 1 = g \\ \cline{2-2}
\underline{3X^5 \qquad - \frac{3}{2}X^3 + \frac{3}{2}X^2} & \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{4} = q \\
/ \quad X^4 + \frac{3}{2}X^3 - \frac{15}{2}X^2 + 5X - 4 & \\
\underline{X^4 \qquad\quad - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X} & \\
/ \quad \frac{3}{2}X^3 - 7X^2 + \frac{9}{2}X - 4 & \\
\underline{\frac{3}{2}X^3 \qquad\quad - \frac{3}{4}X + \frac{3}{4}} & \\
/ \quad -7X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{19}{4} = r &
\end{array}$$

Observație. În exemplul al 2-lea, cu toate că f, g au coeficienții în $\mathbb{Z}$, q și r nu mai au coeficienții în $\mathbb{Z}$, ci în $\mathbb{Q}$, deoarece coeficientul dominant al lui g nu este inversabil în inelul $\mathbb{Z}$, dar este inversabil în $\mathbb{Q}$.

3) Fie $f,\ g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^5 + \hat{4}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$.

Să determinăm câtul și restul împărțirii lui f prin g.

Soluție. Avem grad $f = 5$, grad $g = 2$. Iterând pasul (1) al teoremei anterioare, determinăm succesiv polinoamele f_1, f_2, ... până se obține primul polinom f_k astfel încât $f_k = 0$ sau $f_k \neq 0$ și grad $f_k < m$.

Altfel: $X^4 + X^2 + 1 =$
$= X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 = \ldots$
Notăm $X^2 + X - 3 = y$ și avem
$g = y(y+2) + 1 = (y+1)^2 = \ldots$.

9) Verificați dacă polinomul $f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ împărțit la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$ dă restul egal cu 0, $f,\ g \in \mathbb{R}[X]$.

10) Determinați relațiile dintre numerele reale m, n, p astfel încât polinomul $f = X^3 + mX + r$ să se împartă exact (adică cu restul egal cu 0) la polinomul $g = X^2 + pX + 1$, $f,\ g \in \mathbb{R}[X]$.

Indicație. Efectuăm împărțirea și obținem condițiile: $m + p^2 - 1 = 0$ și $n + p = 0$.

11) Demonstrați că polinomul $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ se împarte exact la polinomul $X^2 - X + 1$.

12) Ce condiție trebuie să îndeplinească numerele reale a, b și c pentru ca polinomul $X^4 + aX^2 + b$ să se împartă exact la polinomul $X^2 + X + c$?

13) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^3 - 3X + aX + b$, să se împartă exact la polinomul $g = X - 1 - i$.

Indicație. $f(1 + i) = 0$ și obținem $a = 1$ și $b = 4$.

14) Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului f și g, dacă:
$f = 6X^4 + 5X^3 - 10X^2 + 11X - 7$,
$g = 2X^2 + 3X - 2$.

15) Fie polinoamele $f,\ g \in \mathbb{C}[X]$,
$f = iX^3 - iX^2 + (3 + 4i)X + 2 - i$,
$g = X + 2i$.

Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g.

$$f_1 = f - \hat{3}\cdot\hat{2}^{-1}X^{5-2}g = \hat{2}X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$$
$$f_2 = f_1 - \hat{2}\cdot\hat{2}^{-1}X^{4-2}g = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$$
$$f_3 = f_2 - \hat{1}\cdot\hat{2}^{-1}X^{3-2}g = \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{2}$$
$$f_4 = f_3 - \hat{3}\cdot\hat{2}^{-1}X^{2-2}g = \hat{2}X + \hat{3}$$

Rezultă că $r = f_4 = \hat{2}X + \hat{3}$ și
$q = \hat{3}\hat{2}^{-1}X^{5-2} + \hat{2}\hat{2}^{-1}X^{4-2} + \hat{1}\cdot\hat{2}^{-1}X^{3-2} + \hat{3}\cdot\hat{2}^{-1} = \hat{4}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$.

Ca și în cazul împărțirii cu rest pentru numere întregi, calculele precedente pot fi dispuse ca mai jos:

f..........................	$\hat{3}X^5+\hat{4}X^4+\hat{3}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{2}$	$\hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{1}=g$
$\hat{4}x^3g$.....................	$\hat{3}X^5+\hat{2}X^4+\hat{4}X^3$	$\hat{4}X^3+X^2+\hat{3}X+\hat{4}=q$
$f_1=f-\hat{4}X^3g$.....	/ $\hat{2}X^4+\hat{4}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{2}$	
X^2g.....................	$\hat{2}X^4+\hat{3}X^3+X^2$	
$f_2=f_1-X^2g$.......	/ $X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{2}$	
$\hat{3}Xg$.....................	$X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}X$	
$f_3=f_2-\hat{3}Xg$.......	/ $\hat{3}X^2+\hat{4}X+\hat{2}$	
$\hat{4}g$........................	$\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{4}$	
$f_4=f_3-\hat{4}g=r$....	/ $\hat{2}X+\hat{3}$	

4) Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$. Să determinăm câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g.

Soluție. Asupra coeficienților lui f și g operăm cu operațiile de adunare și înmulțire din corpul $\mathbb{Z}_5$ al claselor de resturi modulo 5.

$$\begin{array}{l|l}
f = X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{4} & \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1} \\ \hline
\quad X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{3}X^2 & \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} = q \\
\quad / \quad \hat{4}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{4} & \\
\qquad \hat{4}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X & \\
\qquad / \quad \hat{2}X^2 + \hat{0}X + \hat{4} & \\
\qquad\quad \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1} & \\
\qquad\quad / \quad \hat{2}X + \hat{3} = r &
\end{array}$$

Așadar $q = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $r = \hat{2}X + \hat{3}$.

16) Fie polinoamele $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$,
$f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$,
$g = X^2 + d$ și
$h = X^2 - d$.

Să se determine numerele reale a, b, c, d astfel încât restul împărțirii lui f la g să fie X, iar f împărțit la h să dea restul $-X$.

17) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului

$f = 2X^5 + 9X^4 + 2X^3 - 17X^2 + \alpha X + \beta$

prin polinomul $g = X^2 + X - 3$ să fie egal cu zero.

Indicație. Se efectuează împărțirea și se pune condiția ca restul să fie egal cu zero.

18) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^{12n+4} - X^{6n+2} + 1$ prin polinomul $g = X^2 - X + 1$.

Indicație. Notăm cu $\varepsilon_k, k = \overline{1,2}$, rădăcinile polinomului g. Avem $\varepsilon_k^3 = -1$, $k = \overline{1,2}$. Calculăm $f(\varepsilon_1)$ și $f(\varepsilon_2)$.

19) Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$,
$f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 3$

Polinomul f împărțit la $X^2 - 1$ dă restul r_1 și împărțit la $X^2 + 1$ dă restul r_2. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ știind că

$$r_1 r_2 = 5X^2 - 28X + 15.$$

Exerciții rezolvate.

1) Determinați polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul al 3-lea știind că împărțit la $X^2 - 3X$ obținem restul $6X - 15$ și împărțit la $X^2 - 5X + 8$ obținem restul $2X - 7$.

Soluție. Câturile împărțirii euclidiene ale lui f prin $X^2 - 3X$ și $X^2 - 5X + 8$ vor fi polinoame având grad 1, de exemplu $aX + b$, respectiv $cX + d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $c \neq 0$.

Avem $f = (X^2 - 3X)(aX + b) + 6X - 15 = (X^2 - 5X + 8)(cX + d) + 2X - 7$ de unde:
$aX^3 + (b - 3a)X^2 + (6 - 3b)X - 15 = cX^3 + (d - 5c)X^2 + (8c - 5d + 2)X - 7 + 8d$.

Prin identificarea coeficienților se obține $a = c$, $b - 3a = d - 5c$, $6 - 3b = 8c - 5d + 2$ și $-15 = -7 + 8d$, de unde: $a = c = 1$, $d = -1$, $b = -3$. Așadar $f = (X^2 - 3X)(X - 3) + 6X - 15 = X^3 - 6X^2 + 15X - 15$.

2) Arătați că restul împărțirii polinomului f prin $(X-a)(X-b)$, unde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, este $r = \dfrac{(X-a)f(b)-(X-b)f(a)}{b-a}$.

Soluție. Conform teoremei împărțirii cu rest, există și sunt unice polinoamele q și r cu proprietățiile: (1) $f = (X-a)(X-b)q + r$; (2) $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad}(X-a)(X-b)$.

Deducem că $r = mX + n$, $m, n \in \mathbb{C}$. Din (1) rezultă că $f(x) = (x-a)(x-b)\cdot q(x) + r(x)$, $\forall x \in \mathbb{C}$. Deoarece $f(a) = r(a)$ și $f(b) = r(b)$, rezultă sistemul: $\begin{cases} ma + n = f(a) \\ mb + n = f(b) \end{cases}$ cu soluțiile $m = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, $n = \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ și apoi $r = \dfrac{(X-a)f(b)-(X-b)f(a)}{b-a}$.

● **1.** Determinați câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g dacă:
a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ și $g = X^2 - 3X + 1$;
b) $f = X^3 - 3X^2 - X - 1$ și $g = 3X^2 - 2X + 1$.

● **2.** Determinați câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g unde $f, g \in \mathbb{C}[X]$, dacă:
a) $f = X^4 + 2iX^3 + (1 + 2i)X^2 + 2iX + 1$ și $g = X^2 + X + 1$;
b) $f = iX^4 - (1 + i)X^2 + 3iX - 1 - i$ și $g = X + 2i$.

● **3.** Fie $g \in \mathbb{C}[X]$, $g = X^2 + bX + c$. Determinați $b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât restul împărțirii euclidiene a polinomului $f = X^4 + 1$ prin g să fie egal cu 0.

● **4.** Determinați $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + 1$ împărțit la polinomul $g = X^2 + X + 1$ să dea restul $X + i$.

● **5.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = 2X^5 + 9X^4 + 2X^3 - 17X^2 + aX + b$ prin polinomul $g = X^2 + 2X - 3$ să fie egal cu 0.

●● **6.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{6}X^4 + \hat{6}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{6}X + \hat{5}$, $g = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$. Determinați câtul și restul împărțirii lui f prin g.

● **7.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^5 + X^3 + \hat{2}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{1}$. Determinați câtul și restul împărțirii lui f prin g.

● **8.** Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^4 - 3X^2 + aX + b$, $g = X^3 - 2X + 3$. Determinați restul împărțirii lui f prin g.

●● **9.** Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{a}X + \hat{b}$. Determinați $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât f să fie divizibil prin polinomul $g = X^2 + X + \hat{1}$.

●● **10.** Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă restul împărțirii lui n prin m este r, atunci arătați că restul împărțirii polinomului $f = X^n - 1$ prin polinomul $g = X^m - 1$ este $X^r - 1$.

● **11.** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă $f = 6X^4 + 5X^3 - 10X^2 + 11X - 7$, $g = 2X^2 + 3X - 2$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

●● **12.** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă $f = iX^3 - iX^2 + (3 + 4i)X + 2 - i$, $g = X + 2i$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

Calculul valorilor unui polinom. Schema lui Horner

Relația de divizibilitate cunoscută pentru numere întregi se definește și pentru polinoame. Dacă $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, spunem că polinomul g *divide* polinomul f și scriem $g \mid f$, dacă există un polinom $q \in K[X]$ astfel încât $f = gq$. În acest caz spunem că g este *divizor* al lui f sau că f este *multiplu* de g sau că f *se divide* prin g.

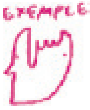
Cum câtul și restul la împărțirea euclidiană sunt unic determinate, rezultă că polinomul $g \neq 0$ divide polinomul f dacă și numai dacă restul împărțirii euclidiene a lui f prin g este egal cu zero. În acest paragraf vom prezenta rezultate privind divizorii de forma $X - \alpha$ cu $\alpha \in K$. Studiul general al relației de divizibilitate în inelul $K[X]$, unde K este corp comutativ, se va face în paragraful următor.

Funcția polinomială asociată unui polinom

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ și $\alpha \in K$.

Elementul $f(\alpha) \in K$, $f(\alpha) \overset{\text{def}}{=} a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$ se numește *valoarea* polinomului f în $\alpha \in K$. Se mai spune că elementul $f(\alpha) \in K$ s-a obținut *atribuind* nedeterminatei X valoarea $\alpha \in K$.

EXEMPLE



1) Dacă $f = 2 - 3X + X^2 \in \mathbb{Q}[X]$ și $\alpha = 2$, atunci $f(\alpha) = f(2) = 2 - 3 \cdot 2 + 2^2 = 0$.

2) Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 3 + (2 - i)X + iX^2$ și $\alpha = 3 - 2i$, atunci $f(\alpha) = f(3 - 2i) = 3 + (2 - i)(3 - 2i) + i(3 - 2i)^2 = 19 - 2i$.

3) Dacă $f = X^2 + \hat{2}X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$, atunci $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{1}$.

Teorema 1. Fie K un corp comutativ $f, g \in K[X]$ și $\alpha \in K$. Valoarea sumei (produsului) polinoamelor f, g în α este egală cu suma (respectiv produsul) valorilor lui f și g în α, adică $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$, $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$.

Demonstrație. Dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots$, avem:

$$f(\alpha) + g(\alpha) = (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots) + (b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\alpha + (a_2 + b_2)\alpha^2 + \ldots = (f + g)(\alpha) \text{ și}$$

$$f(\alpha)g(\alpha) = (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots)(b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\alpha + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\alpha^2 + \ldots = (fg)(\alpha).$$

Dacă $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots$, atunci putem considera funcția $f^* : K \to K$, $f^*(\alpha) = f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots$, oricare ar fi $\alpha \in K$, numită *funcția polinomială* asociată polinomului f. Uneori funcția polinomială asociată polinomului f se notează tot cu f (în loc de f^*). ■

1) Arătați că $X^3 - 4X^2 + X + 2 = (X - 1)(X^2 - 3X - 2)$.

2) Arătați că polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$ este divizibil prin $g = X - 1$, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

3) Arătați că polinomul $g = X - 1$ este divizor al polinomului $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$.

4) Arătați că polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$ este multiplu de $g = X^2 - 3X - 2$, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

5) Fie $f = X^3 - X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ și $\alpha = \frac{1}{2}$. Calculați $f(\alpha)$.

6) Fie $f = 2X^5 - 2X^2 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ și $\alpha = -\frac{1}{2}$. Calculați $f(\alpha)$.

7) Fie $f = X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ și $\alpha = 1 + i$.

a) Calculați $f(\alpha)$.

b) Calculați $f(\bar{\alpha})$, unde $\bar{\alpha} = 1 - i$.

c) Verificați relația $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$.

8) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{Z}_4[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = \hat{2}X^3 + X + \hat{1}$.

a) Calculați $f(\hat{1})$ și $g(\hat{1})$.

b) Calculați $f + g$ și $(f + g)(\hat{1})$.

c) Verificați dacă $f(\hat{1}) + g(\hat{1}) = (f + g)(\hat{1})$.

9) Fie $f = a_nX^n + \ldots + a_0$ un polinom având coeficienții în $\mathbb{C}$. Arătați că:

a) termenul liber a_0 este egal cu $f(0)$;

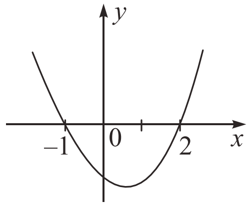
b) suma coeficiențiilor polinomului f este egală cu $f(1)$;

c) suma coeficienților de rang par $a_0 + a_2 + \ldots$ ai lui f este egală cu $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$;

d) suma coeficienților de rang impar $a_1 + a_3 + \ldots$ ai lui f este egală cu $\frac{f(1) - f(-1)}{2}$.

EXEMPLE

1) Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = -2 - X + X^2$, atunci funcția polinomială asociată este funcția $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^*(x) = -2 - x + x^2$. Reprezentarea grafică a funcției f^* este dată în figura alăturată.



2) Fie polinoamele f, g $\mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + X^2 - \hat{2}X + \hat{1}$, $g = X^2 - X + \hat{1}$. Avem $f(\hat{0}) = \hat{1} = g(\hat{0})$, $f(\hat{1}) = \hat{1} = g(\hat{1})$, $f(\hat{2}) = \hat{0} = g(\hat{2})$, deci funcțiile polinomiale asociate $f^* : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ și $g^* : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ sunt egale cu toate că $f \neq g$ (adică polinoamele f și g sunt diferite).

Când K este unul dintre corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se poate arăta că din $f, g \in K[X]$, $f \neq g$, rezultă că $f^* \neq g^*$.

Definiție. Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$. Un element $\alpha \in K$ se numește *rădăcină* a polinomului f dacă $f(\alpha) = 0$.

EXEMPLE

1) Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = -2 + X + X^2$, atunci $f(1) = 0$ și $f(-2) = 0$, deci 1 și -2 sunt rădăcini (din corpul $\mathbb{R}$) ale polinomului f.

2) Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{2}$.

Avem $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}$, $f(\hat{2}) = \hat{0}$, $f(\hat{3}) = \hat{0}$ și $f(\hat{4}) = \hat{1}$. Rezultă că $\hat{2}$ și $\hat{3}$ sunt rădăcini (din corpul $\mathbb{Z}_5$) ale polinomului f.

Rezultatele din următoarele două teoreme arată că pentru un polinom $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$ putem folosi algoritmul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$ pentru a stabili dacă α este rădăcină a lui f.

Teorema 2 (Teorema restului). Dacă $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$, atunci restul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$ este egal cu $f(\alpha)$.

Demonstrație

Evident restul împărțirii lui f prin $X - \alpha$ este un polinom constant. Așadar există $q \in K[X]$ și $r \in K$ astfel încât $f(X) = (X - \alpha)q(X) + r$.

Evaluând în α polinoamele care intervin în egalitatea precedentă și ținând cont de rezultatul din *Teorema 1*, rezultă că $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r = r$. ■

Să observăm că polinomul $f \in K[X]$ se divide prin $X - \alpha$, $\alpha \in K$ dacă și numai dacă restul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$ este egal cu zero. Aplicând *Teorema 2*, obținem următoarea teoremă:

Teorema 3 (Teorema factorului, Bézout)

Polinomul $f \in K[X]$ se divide prin polinomul $X - \alpha$, $\alpha \in K$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = 0$. Altfel spus, $X - \alpha$ este divizor al polinomului f dacă și numai dacă α este rădăcină a lui f.

10) Fie $f = X^2 - 7X + 10$, $f \in \mathbb{R}[X]$.
a) Calculați $f(2)$.
b) Calculați $f(5)$.
c) Calculați $f(0)$.
d) Care sunt rădăcinile reale ale polinomului f?

11) Fie $f = 3X^2 + 6X$, $f \in \mathbb{R}[X]$.
a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2 + 6x = 0$.
b) Calculați $f(0)$.
c) Calculați $f(-2)$.
d) Care sunt rădăcinile reale ale polinomului f?

12) Fie $f = X^3 + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_2[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$.
b) Calculați $f(\hat{1})$.
c) Care sunt rădăcinile polinomului f în $\mathbb{Z}_2$?

13) Fie $f = X^3 + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$
b) Calculați $f(\hat{1})$
c) Calculați $f(\hat{2})$.
d) Care sunt rădăcinile polinomului f în $\mathbb{Z}_3$?

14) Fie $f = X^3 + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_4[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$
b) Calculați $f(\hat{1})$
c) Calculați $f(\hat{2})$
d) Calculați $f(\hat{3})$.
e) Care sunt rădăcinile polinomului f în $\mathbb{Z}_4$?

15) Calculați restul împărțirii polinomului $f = X^4 - X^3 + X^2 - 2X - 1$ prin polinomul g dacă:
a) $g = X - 2$;
b) $g = X + 2$;
c) $g = X - 1$;
d) $g = X + 1$.

16) Calculați restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 - iX + 1 - i$ prin polinomul g dacă:
a) $g = X + i$;
b) $g = X - i$;
c) $g = X + 1$;
d) $g = X - 1$.

Teorema precedentă poate fi generalizată. Astfel:

Teorema 4. Fie $f \in K[X]$ și $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq \beta$. Polinomul f se divide prin $(X - \alpha)(X - \beta)$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = 0$ și $f(\beta) = 0$.

Demonstrație. Dacă f se divide prin $(X - \alpha)(X - \beta)$, atunci există $q \in K[X]$ astfel încât $f(X) = (X - \alpha)(X - \beta)q(X)$, de unde $f(\alpha) = 0$ și $f(\beta) = 0$.

Reciproc, presupunem că $f(\alpha) = 0$ și $f(\beta) = 0$.

Aplicând teorema factorului rezultă $f(X) = (X - \alpha)g(X)$ cu $g \in K[X]$. Avem $0 = f(\beta) = (\beta - \alpha)g(\beta)$ și cum $\beta - \alpha \neq 0$ rezultă că $g(\beta) = 0$. Aplicând din nou teorema factorului rezultă că $g = (X - \beta)q$ cu $q \in K[X]$ de unde $f = (X - \alpha)(X - \beta)q$. ■

1) Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2$ se divide prin $X - 2$. Într-adevăr

$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 - 2 = 0$.

2) Polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^5 + X^3 + 2X^2 + 2$ se divide prin $X^2 + 1$.

Avem $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ și $i \neq -i$. Dar $f(i) = i^5 + i^3 + 2i^2 + 2 = 0$, $f(-i) = (-i)^5 + (-i)^3 + 2(-i)^2 + 2 = 0$ și deci f se divide prin $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

17) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Determinați restul împărțirii polinomului f prin polinomul g în fiecare dintre următoarele cazuri.

a) $f = X^4 - 2X^3 - X^2 + 6X - 1$, $g = X - 1$;

b) $f = -X^5 + (2 + i)X^3 - iX^2 + X - 1$, $g = X + 1 - 2i$;

c) $f = 4X^3 + 6X^2 - 7X + 9$, $g = 2X + 1$.

18) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ astfel încât $f(a) = f(b) = 0$. Arătați că f se divide prin $(X - a)(X - b)$. Generalizare.

Indicație. $f(a) = 0$, $f = (X - a) \cdot g$, $f(b) = 0$, $g(b) = 0$, $g(X - b) \cdot q$; $f = (X - a)(X - b) \cdot q$. $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$. Inducție matematică.

Execițiu rezolvat. Determinați un polinom de grad minim care împărțit la $X + i$ să dea restul $2i$ și împărțit la $X - i$ să dea restul $-2i$.

Soluție. Fie f polinomul căutat. Evident $\operatorname{grad} f \geqslant 1$.

Cercetăm dacă există f, cu $\operatorname{grad} f = 1$, care să verifice condițiile problemei.

Fie $f = aX + b$. Avem condițiile: $f(-i) = 2i$ și $f(i) = -2i$ și obținem $\begin{cases} -ai + b = 2i \\ ai + b = -2i \end{cases}$ cu soluțiile $b = 0$ și $a = -2$. Deci polinomul căutat este $f = -2X$.

Schema lui Horner

Fie $f \in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ și $\alpha \in K$. Pentru a evalua polinomul f în $\alpha \in K$ calculăm mai întâi puterile lui α, anume $\alpha^2 = \alpha\alpha$, $\alpha^3 = \alpha^2\alpha$, ..., $\alpha^n = \alpha^{n-1}\alpha$ (în total $n - 1$ înmulțiri). Calculăm apoi produsele $a_n\alpha^n$, $a_{n-1}\alpha^{n-1}$, ..., $a_1\alpha$ (în total n înmulțiri) și în final efectuăm suma (n adunări):

$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = f(\alpha)$.

Cu această procedură pentru calculul lui $f(\alpha)$ sunt necesare $2n - 1$ înmulțiri și n adunări. Polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in K[X]$, definit în acest manual ca expresie formală, precizează „*programul de calcul*” care aplicat fiecărui element $\alpha \in K$ conduce la valoarea $f(\alpha)$.

După cum vom constata în continuare, o procedură mai avantajoasă se va dovedi a fi algoritmul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$; prin n înmulțiri și n adunări vom obține atât restul $r = f(\alpha)$ cât și coeficienții câtului.

19) Utilizând schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g în fiecare dintre cazurile:

a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 7X + 9$, $g = X - 1$

b) $f = 4X^5 - X^3 + 2X - 1$, $g = X + 2$

c) $f = (1 + i)X^3 - (2 - i)X^2 + X - 3 + i$, $g = X + 2 + i$.

20) Utilizând schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g în fiecare dintre cazurile:

a) $f = 2X^5 - 5X^3 - 8X$, $g = X + 3$;

b) $f = X^5$, $g = X - 1$;

Dacă grad $f = n$, $f = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$, atunci câtul q are gradul $n - 1$, $q = c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_1X + c_0$.

Putem scrie:

$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 = (X - \alpha)(c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_1X + c_0) + r$.

Efectuând calculele din membrul drept al egalității precedente obținem:

$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 = c_{n-1}X^n + (c_{n-2} - \alpha c_{n-1})X^{n-1} + ... + (c_0 - \alpha c_1)X + r - \alpha c_0$ și identificând coeficienții obținem sucesiv: $c_{n-1} = a_n$

$$c_{n-2} = a_{n-1} + c_{n-1}\alpha = a_{n-1} + a_n\alpha$$
$$c_{n-3} = a_{n-2} + c_{n-2}\alpha = a_{n-2} + a_{n-1}\alpha + a_n\alpha^2.$$
$$...$$
$$c_0 = a_1 + c_1\alpha = a_1 + a_2\alpha + ... + a_{n-1}\alpha^{n-2} + a_n\alpha^{n-1}.$$
$$r = a_0 + c_0\alpha = a_0 + a_1\alpha + ... + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n = f(\alpha).$$

Așadar c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_1, c_0 și r se calculează succesiv (în această ordine) în funcție de a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 și α (cunoscuți) prin formulele:

$c_{n-1} = a_n$, $c_{n-2} = a_{n-1} + c_{n-1}\alpha$, ..., $c_0 = a_1 + c_1\alpha$,
$r = a_0 + c_0\alpha$.

Calculele de mai sus pot fi efectuate folosind un tabel cu două linii. În prima linie sunt trecuți coeficienții lui f în ordinea a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, iar în a doua linie sunt inserați, pe măsură ce sunt calculați cu formulele precedente, coeficienții câtului c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_1, c_0 și restul r.

a_n	a_{n-1}	...	a_{i+1}	...	a_1	a_0	
c_{n-1}	c_{n-2}	...	c_i	...	c_0	r	α

Se observă că $c_{n-1} = a_n$, iar pentru $i < n - 1$, c_i se află adunând la a_{i+1} (care se află deasupra sa) coeficientul c_i (deja determinat) înmulțit cu α. Această modalitate de calcul este cunoscută sub numele de schema lui Horner.

EXEMPLE

1) Utilizând schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 3X + 2$ la $X - 2$.

X^4	X^3	X^2	X	X^0	
1	–3	5	–3	2	
1	–1	3	3	8	2
b_3	b_2	b_1	b_0	r	

Deci câtul este

$c = X^3 - X^2 + 3X + 3$ și

restul este $r = 8$.

2) Utilizînd schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4 - iX^3 - (1+i)X + i$ la $X + i$.

X^4	X^3	X^2	X	X^0	
1	$-i$	0	$-1-i$	i	
1	$-2i$	-2	$i-1$	$2i+1$	$-i$
b_3	b_2	b_1	b_0	r	

Avem

$c = X^3 - 2iX^2 - 2X + i - 1$

și $r = 2i + 1$.

c) $f = X^4 + X^3 - 4X^2 + 5X - 3$,

$g = (X-1)(X+3)$;

d) $f = X^4 - 3iX^3 - 4X^2 + 5iX - 1$,

$g = X - 1 - 2i$;

e) $f = X^3 + \sqrt{2}X^2 + 2X + 2\sqrt{2}$, $g = X + \sqrt{2}$.

21) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^4 - aX^3 + (3a+7)X^2 - aX + 3$ să dea la împărțirea cu $X + 1$ restul 3.

22) Determinați a și b astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^4 + bX^3 + (b-2a)X^2 + 5X - 3a$ la polinomul $X^2 + X + 2$ să fie $X - 1$.

23) Fie $f = X^{300} + X^{200} + X^{100} + 1$.
Determinați restul împărțirii lui f la $X(X^2 - 1)$.

24) a) Un polinom împărțit prin $X - 1$, $X + 1$, $X + 4$ dă resturile 15, 7 și respectiv –80. Determinați restul împărțirii prin $(X-1)(X+1)(X-4)$.
b) Un polinom împărțit la $X - 1$, $X + 1$, $X - 2$ dă resturile 2, 6 și respectiv –3. Determinați restul împărțirii prin $(X-1)(X+1)(X-2)$.

25) Determinați polinomul cu coeficienți raționali de grad minim, care împărțit la $X^2 + X - 2$ dă restul $2X - 3$ și împărțit la $X^2 - X + 2$ dă restul $2X - 3$.

26) Se consideră polinomul $f = X^{2n} + X^n + 1$, iar $C_1(X)$ și $C_2(X)$ câturile împărțirii lui f la $X - 1$ respectiv $X + 1$. Arătați că $C_1(-1) = C_2(1)$.

27) a) Fie f un polinom cu proprietatea $(x+1)f(x) - (x-1)f(x+3) = x^2 - 3x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determinați restul împărțirii polinomului f prin $(X-1)(X-2)$.
b) Fie f un polinom cu proprietatea $xf(x+1) + (x+2)f(x+3) = -x^2 + 2004$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determinați restul împărțirii polinomului f prin $(X-3)(X+1)$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 - 2X^3 - 15X^2 + 10X + 3$. Calculați $f(3)$ folosind definiția și apoi cu ajutorul schemei lui Horner.

Soluție. Avem $f(3) = 2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 3 = 162 - 54 - 135 + 30 + 3 = 6$.

Folosind schema lui Horner, avem

2	–2	–15	10	3	
2	4	–3	1	6	3

Rezultă că $f(3) = 6$. Se obține și câtul împărțirii lui f prin $X - 3$, $q = 2X^3 + 4X^2 - 3X + 1$.

2) Determinați câtul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$ la polinomul $(X-1)(X-2)$, utilizând schema lui Horner.

Soluție. Conform teoremei împățirii cu rest, putem scrie: $f = (X-1)q_1 + r_1$, $\text{grad } r_1 = 0$, $q_1 \in \mathbb{C}[X]$ și $q_1 = (X-2)q_2 + r_2$, $\text{grad } r_2 = 0$, $q_2 \in \mathbb{C}[X]$.

Rezultă $f = (X-1)(X-2)q_2 + r_2(X-1) + r_1 = (X-1)(X-2)q_2 + r_2X + r_1 - r_2$ de unde deducem, ținând seama de $\text{grad}(r_2X + r_1 - r_2) < \text{grad}(X-1)(X-2)$, că q_2 reprezintă câtul cerut. Însă q_2 reprezintă câtul împărțirii lui q_1 la $X - 2$, unde q_1 este câtul împărțirii lui f la $X - 1$. Prin urmare q_2 poate fi determinat aplicând de două ori schema lui Horner:

X^4	X^3	X^2	X	X^0	
1	–2	3	–1	1	
1	–1	2	1	2	1
X^3	X^2	X	X^0		
1	–1	2	1		
1	1	4	9		2
b_2	b_1	b_0			

Obținem $q_2 = X^2 + X + 4$, care reprezintă câtul cerut.

3) Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât polinmul $f = X^3 - X^2 + \lambda X + 2$ să admită ca rădăcină pe $\alpha = -2$.

Soluție. Folosind schema lui Horner, avem:

1	–1	λ	2	
1	–3	$\lambda + 6$	$-2\lambda - 10$	–2

Rezultă că $r = -2\lambda - 10 = f(-2)$. Trebuie ca $f(-2) = 0$, adică $-2\lambda - 10 = 0$, de unde $\lambda = -5$.

4) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 9X^2 + 25X - 17$. Să se determine $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f = (X-2)^3 + r_2(X-2)^2 + r_1(X-2) + r_0$ (dezvoltarea lui f după puterile lui $X - 2$).

Soluție. Putem scrie:

$f = (X-2)q_0 + r_0$ cu $q_0 = (X-2)^2 + r_2(X-2) + r_1$

$q_0 = (X-2)q_1 + r_1$ cu $q_1 = (X-2) + r_2$

$q_1 = (X-2)q_2 + r_2$ cu $q_2 = 1$

Așadar $r_0 = f(2)$, $r_1 = q_0(2)$, $r_2 = q_1(2)$, deci pentru a determina numerele r_0, r_1, r_2, este necesar să determinăm polinoamele q_0 și q_1 și valorile $f(2)$, $q_0(2)$ și $q_1(2)$.

Calculele pot fi organizate astfel:

f			
q_0		r_0	2
q_1	r_1	2	
q_2 | r_2	2		

sau explicit

1	–9	25	–17	
1	–7	11	5	2
1	–5	1	2	
1	–3	2		

Rezultă că $r_0 = 5$, $r_1 = 1$ și $r_2 = -3$, de unde $f = (X-2)^3 - 3(X-2)^2 + (X-2) + 5$.

5) Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ și $f' \overset{\text{def}}{=} a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1}$ (*derivata formală* a polinomului f). Arătați că f se divide prin $(X - \alpha)^2$ dacă $f(\alpha) = 0$ și $f'(\alpha) = 0$.

Soluție. Avem $f(X) = (X - \alpha)q(X) + f(\alpha)$, deci $f(X) - f(\alpha) = (X - \alpha)q(X)$.

Dar $f(X) - f(\alpha) = a_n(X^n - \alpha^n) + a_{n-1}(X^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \dots + a_1(X - \alpha) =$

$$= (x-\alpha)\left(a_n(X^{n-1} + X^{n-2}\alpha + \dots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}\left(X^{n-2} + X^{n-3}\alpha + \dots + \alpha^{n-2}\right) + \dots + a_2(X+\alpha) + a_1\right).$$

Rezultă că, $q = a_n(X^{n-1} + X^{n-2}\alpha + \dots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}\left(X^{n-2} + X^{n-3}\alpha + \dots + \alpha^{n-2}\right) + \dots + a_2(X+\alpha) + a_1$ și atribuind lui X valoarea α, obținem $q(\alpha) = na_n\alpha^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\alpha^{n-2} + \dots + 2a_2\alpha + a_1 = f'(\alpha)$.

Din $f(X) = (X - \alpha)q(X) + f(\alpha)$ și $f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$ rezultă că $(X - \alpha)^2$ divide pe f.

Dacă $f = X^4 - 2X^3 + 5X^2 + pX + q$, atunci $f' = 4X^3 - 6X^2 + 10X + p$. Din $f(1) = 0$ și $f'(1) = 0$ rezultă $4 + p + q = 0$ și $8 + p = 0$. Avem $p = -8$, $q = 4$ și în acest caz f se divide prin $(X - 1)^2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ folosind schema lui Horner, calculați $f(\alpha)$ dacă:
a) $f = X^5 - 5X^4 + 18X^3 - 15X^2 + X + 4$ și $\alpha = 3$;
b) $f = X^5 + (1 + 2i)X^4 - (1 + 3i)X^2 + 7$ și $\alpha = -2 - i$.

2. Folosind schema lui Horner, dezvoltați polinomul f după puterile lui $X - \alpha$ dacă:
a) $f = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 1$ și $\alpha = 1$;
b) $f = X^4 + 2iX^3 - (1+i)X^2 - 3X + 7 + i$ și $\alpha = -i$.

3. Folosind schema lui Horner aflați câtul și restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{5}X^4 + \hat{3}X^2 + X + \hat{2}$ prin polinomul $g = X + \hat{5}$.

4. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - X + 1$. Folosind schema lui Horner, determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{a}{(x-2)^3} + \frac{b}{(x-2)^4} + \frac{c}{(x-2)^5},$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

5. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$. Determinați toate polinoamele $g = \hat{a}X^3 + \hat{b}X^2 + \hat{c}X + \hat{d}$ din $\mathbb{Z}_3[X]$ astfel încât $f^* = g^*$.

6. Arătați că polinomul $f = (X^2 + X - 1)^{2n-1} - X$ din $\mathbb{R}[X]$ împărțit la polinomul $X^2 - 1$ dă restul 0.

7. Arătați că polinomul
$f = nX^{n+2} - (n + 1)X^{n+1} + X$ din $\mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

8. Determinați, $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^3 + \lambda X^2 - (3\lambda + 2)X + 2$ la $X - 1$ să fie egal cu 5.

9. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^4 + aX^3 + (2b - 1)X + b$ la $X + 1$ să fie egal cu 1 și cel al împărțirii la $X - 1$ să fie egal cu 5.

10. Determinați polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$ care verifică relația $Xf(X) = (X - 3)f(X + 1)$, unde $f(X + 1) = a_n(X + 1)^n + a_{n-1}(X + 1)^{n-1} + \dots + a_1(X + 1) + a_0$ dacă $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

11. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = aX^4 + bX^3 - 3$ să se dividă prin polinomul $g = (X - 1)^2$, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

12. Determinați polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ dacă $f(k) = 2^k$ pentru $k \in \{1, 2, 3\}$.

13. Determinați polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$,
$f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, dacă $f(i) = 1 + i$ și
$f(i + 1) = -6 + 5i$.

14. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{6n+5} + X^{3n+4} + 1$ și $g = X^2 + X + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că f se divide prin g.

15. Fie $f = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$. Determinați numerele reale a, b, c, d astfel încât
$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Relația de divizibilitate pentru polinoame

Și în acest paragraf K este un corp comutativ. Vom arăta că inelul de polinoame $K[X]$ are proprietăți aritmetice asemănătoare cu cele ale inelului $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi.

Date fiind polinoamele d și f din $K[X]$, spunem că d *divide* pe f, și scriem $d \mid f$, dacă există $q \in K[X]$ astfel încât $f = dq$.

În acest caz se mai spune că d este *divizor* al lui f sau că f este *multiplu* al lui d.

Să observăm că dacă polinomul d este divizor comun pentru polinoamele f și g, atunci d divide polinomul $f\varphi + g\psi$, oricare ar fi $\varphi, \psi \in K[X]$. Într-adevăr, fie $q_1, q_2 \in K[X]$ astfel încât $f = dq_1$ și $g = dq_2$.

Avem: $f\varphi + g\psi = dq_1\varphi + dq_2\psi = d(q_1\varphi + q_2\psi) = dq$, unde $q = q_1\varphi + q_2\psi$.

Cel mai mare divizor comun pentru două polinoame

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $d \in K[X]$ se numește *cel mai mare divizor comun* (prescurtat c.m.m.d.c.) al lui f și g dacă are proprietățile:
(α) $d \mid f$ și $d \mid g$ (adică d este divizor comun al lui f și g) și
(β) dacă $h \mid f$ și $h \mid g$, atunci $h \mid d$ (adică orice alt divizor comun h al lui f și g este divizor și al lui d).

Cel mai mare divizor comun al lui f și g se notează cu c.m.m.d.c. (f, g) sau cu (f, g), la fel ca perechea ordonată de componente f și g.

Evident, dacă $f \mid g$, atunci c.m.m.d.c. $(f, g) = f$. Așadar pentru a dovedi existența c.m.m.d.c. este suficient să considerăm cazul a două polinoame $f, g \in K[X]$ astfel încât grad $f \geqslant$ grad$g$ și $g \nmid f$.

În aceste condiții există $q_1, r_1 \in K[X]$, $r_1 \neq 0$, astfel încât:

(1) $f = gq_1 + r_1$ cu grad $r_1 <$ grad g. Cum $r_1 \neq 0$, există $q_2, r_2 \in K[X]$ astfel încât

(2) $g = r_1q_2 + r_2$ cu grad $r_2 <$ grad r_1, dacă $r_2 \neq 0$.

Cum, $r_2 \neq 0$, există $q_3, r_3 \in K[X]$ astfel încât

(3) $r_1 = r_2q_3 + r_3$ cu grad $r_3 <$ grad r_2 dacă $r_3 \neq 0$ ș.a.m.d.

Cum grad $g >$ grad $r_1 >$ grad $r_2 >$ ... există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $r_i \neq 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ și $r_{n+1} = 0$, adică

(n) $\quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ cu grad $r_n <$ grad r_{n-1}, $r_n \neq 0$

și

($n + 1$) $\quad r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$.

Secvența (1), (2), ..., (n), ($n + 1$) de împărțiri cu rest poartă numele de *algoritmul lui Euclid* pentru polinoamele f și g, iar r_n este numit *ultimul rest nenul* din algoritmul lui Euclid pentru f și g.

Arătăm că polinomul $d = r_n$ verifică (α) și (β) din definiția c.m.m.d.c. al lui f și g.

Din ($n + 1$) rezultă că $r_n \mid r_{n-1}$ și apoi din

(n) rezultă că $r_n \mid r_{n-2}$ ș.a.m.d. până când, în final din (2) și din (1) rezultă că $r_n \mid g$ și $r_n \mid f$. Așadar r_n verifică (α).

Dacă $h \mid f$ și $h \mid g$, atunci folosind succesiv (1), (2), ..., (n) rezultă că h divide $r_1, r_2, ..., r_n$, de unde rezultă că h verifică (β). În final c.m.m.d.c. $(f, g) = r_n$, ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid pentru f și g.

1) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^5 - (m+1)X^3 - mX + 1$ să fie divizibil cu $X + 1$.

2) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul $f = X^3 - 3X + aX + b$ să fie divizibil cu $X - 1 - i$.

3) Fie polinomul
$f = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1 \in \mathbb{R}[X]$
a) Calculați $f(1)$.
b) Calculați $f(-1)$.
c) Este polinomul f divizibil cu $X - 1$?

4) Arătați că
$X^{n+1} - (n+1)X + n \,\vdots\, (X-1)^2$.
Dați alte două exemple de polinoame de grad $n + 1$ divizibile cu g.

Indicație. Obținem sistemul
$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$, adică $\begin{cases} 1 - n - 1 + n = 0 \\ n + 1 - n - 1 = 0 \end{cases}$.

5) Demonstrați că polinomul f se divide cu polinomul g în fiecare dintre cazurile:
a) $f = X^{n+1} - (n+1)X + n, \quad g = (X-1)^2$
b) $f = (2n-1)X^{2n} + 2nX^{2n-1} + 1$,
$g = (X+1)^2$.

6) Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $mX^4 + nX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

7) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$,
$f = X^4 + 1$, $g = X^2 + \alpha X + \beta$.
Să se determine α, β astfel încât $g \mid f$.

1) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X - 1$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$. Determinați (f, g).

Soluție. Aplicând algoritmul lui Euclid obținem:

(1) $f(X) = g(X) \cdot X + X^2 - 1$

(2) $g(X) = (X^2 - 1)(X + 1) + 2X + 2$

(3) $X^2 - 1 = (2X + 2) \cdot \dfrac{1}{2}(X - 1) + 0$, deci c.m.m.d.c. $(f, g) = 2X + 2$.

2) Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^5 + \hat{3}X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{4}$. Determinați (f, g).

Soluție. Aplicând algoritmul lui Euclid obținem:

(1) $f = gq_1 + r_1$, unde $q_1 = \hat{3}X + \hat{2}$, $r_1 = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$.

(2) $g = r_1q_2 + r_2$, unde $q_2 = X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$, $r_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.

(3) $r_1 = r_2q_3 + r_3$, unde $q_3 = X + \hat{2}$, $r_3 = \hat{0}$.

Deci, $(f, g) = \hat{2}X + \hat{3}$.

Observații

♦ Dacă $d, f, g \in K[X]$ și $\alpha \in K^* = K \setminus \{0\}$ atunci d este divizor comun pentru f și g dacă și numai dacă αd are această proprietate. Într-adevăr dacă $f = dq_1$ și $g = dq_2$, atunci $f = \alpha d(\alpha^{-1}q_1)$ și $g = \alpha d(\alpha^{-1}q_2)$. Implicația reciprocă se verifică asemănător.

În particular dacă d = c.m.m.d.c. (f, g) și a este coeficientul dominant al lui d, atunci polinomul $a^{-1}d$ este monic (sau unitar) și evident $a^{-1}d$ = c.m.m.d.c. (f, g).

♦ Dacă d = c.m.m.d.c (f, g), atunci există două polinoame $\varphi, \psi \in K[X]$ astfel încât $d = f\varphi + g\psi$.

Într-adevăr, arătăm că resturile $r_1, r_2, ..., r_n$ din algoritmul lui Euclid au această proprietate. Acest fapt se verifică imediat pentru r_1 și r_2.

Dacă $r_{i-2} = f\varphi_{i-2} + g\psi_{i-2}$ și $r_{i-1} = f\varphi_{i-1} + g\psi_{i-1}$, cu φ_{i-2}, φ_{i-1}, ψ_{i-2}, $\psi_{i-1} \in K[X]$, atunci $r_i = r_{i-2} - r_{i-1}q_i = f(\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}q_i) + g(\psi_{i-2} - \psi_{i-1}q_i)$ și proprietatea cerută rezultă prin inducție matematică. În particular $d = r_n = f\varphi_n + g\psi_n$ și putem lua $\varphi = \varphi_n$, $\psi = \psi_n$.

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Dacă c.m.m.d.c. $(f, g) = 1$, atunci spunem că f este *prim* cu g. Se mai spune în acest caz că polinoamele f și g sunt *prime între ele*.

Evident c.m.m.d.c. $(f, g) = 1$ dacă și numai dacă există $\varphi, \psi \in K[X]$ astfel încât $f\varphi + g\psi = 1$.

1) Polinoamele $X - a$ și $X - b$, $a \neq b$ sunt prime între ele. Într-adevăr $\dfrac{1}{b-a}(X - a) - \dfrac{1}{b-a}(X - b) = 1$.

2) Dacă $a, b \in \mathbb{C}[X]$, $a \neq b$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci polinoamele $(X - a)^n$ și $(X - b)^m$ sunt prime între ele.

8) Folosind algoritmul lui Euclid, găsiți polinoamele $u, v \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $uf + vg = d$, unde d este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g dacă:

a) $f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$, $g = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$;

b) $f = 4X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 5X + 9$, $g = 2X^3 - X^2 - 5X + 4$.

9) Determinați polinoamele f de gradul întâi astfel încât:

a) $f(X^2)$ să se dividă cu $f(X)$

b) $f(X^2 - 1)$ să se dividă cu $f(X)$.

10) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 + 3X^2 + \alpha X^2 - 1$, $g = 2X^2 + X - \beta$.

Să se determine α și β astfel încât f să se dividă cu g.

11) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + \alpha X + \beta$, $g = X^2 - 4X + \beta$.

Să se determine parametrii α și β astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g și în acest caz să se determine câtul.

12) Fiind date polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^2 + bX + c$, $g = (X - 1)^3$ să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $g \mid f$.

13) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$, $n \in \mathbb{N}$, $g = X^2 + 1$.

Arătați că $g \mid f$.

14) Fie polinomul $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Arătați că următoarele polinoame sunt prime între ele:

a) $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^3 - 2X^2 + 1$.

b) $f = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.

15) Fie $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$. Arătați că dacă $f \mid gh$, f și g sunt prime între ele atunci $f \mid h$.

Teorema 1. Fie $f, g, h \in K[X]$. Avem:

(1) c.m.m.d.c. $(hf, hg) = h \cdot$ c.m.m.d.c. (f, g) sau cu notații mai simple $(hf, hg) = h(f, g)$.

(2) Dacă $(f, g) = 1$ și $(f, h) = 1$, atunci $(f, gh) = 1$, adică dacă f este prim cu g și h, atunci este prim și cu gh.

(3) Dacă $f \mid gh$ și $(f, g) = 1$, atunci $f \mid h$, adică dacă f divide produsul gh și este prim cu unul dintre factori, atunci f divide celălalt factor.

Demonstrație

(1) Când $h = 0$ proprietatea este evidentă. Dacă $h \neq 0$, atunci înmulțind cu h în egalitățile (1), (2), ..., (n), ($n + 1$) din algoritmul lui Euclid pentru f și g se obține algoritmul lui Euclid pentru hf și hg, iar ultimul rest nenul este $hr_n = h(f, g)$.

(2) Fie φ_1, ψ_1 și φ_2, ψ_2 din $K[X]$ astfel încât $1 = f\varphi_1 + g\psi_1$ și $1 = f\varphi_2 + h\psi_2$. Avem $1 = f\varphi_1 + g\psi_1(f\varphi_2 + h\psi_2) = f(\varphi_1 + g\psi_1\varphi_2) + {}$ $+gh\psi_1\psi_2 = f\varphi + gh\psi$ cu $\varphi = \varphi_1 + g\psi_1\varphi_2$ și $\psi = \psi_1\psi_2$, deci $(f, gh) = 1$.

(3) Fie $\varphi, \psi \in K[X]$ astfel încât $1 = f\varphi + g\psi$. Avem $h = f\varphi h + g\psi h$ și cum $f \mid gh$ rezultă că $f \mid h$. ■

16) Fiind date polinomale $f, g \in \mathbb{C}[X]$

$f = X^2 + 2X + 2$; $g = X^2 + 3X + 3$

să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

17) Să se arate că polinomul

$g = (X^2 - 1)(X^2 + X + 1)$,

divide polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$,

$f = X^{4^n} + X^3 - X - 1, n \in \mathbb{N}^*$.

Indicație. $g = 0$, $x \in \{-1, 1, \varepsilon, \overline{\varepsilon}\}$,

$f(1) = f(-1) = 0$.

$4^n = (3 + 1)^n = 3q + 1$, $q \in \mathbb{N}^*$.

$f(\varepsilon) = f(\overline{\varepsilon}) = 0$, $g \mid f$.

18) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$,

$f = AX^{n+2} + BX^n + 2$, $g = (X - 1)^2$.

Să se determine A, B astfel încât $g \mid f$.

19) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$,

$f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$, $g = X^2 + 1, n \in \mathbb{N}$

Să se arate că $g \mid f$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați c. m. m. d. c. al polinoamelor $f = X^3 + X^2 + 1$ și $g = X^2 + X + 1$.

Împărțim f la g:

$$\begin{array}{l|l} X^3 + X^2 + \quad 1 & X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-X^3 - X^2 - X} & X \\ \;/ \quad\; / \quad -X + 1 = r_1 & \end{array}$$

Împărțim $g = X^2 + X + 1$ la $r_1 = -X + 1$:

$$\begin{array}{l|l} X^2 + X + 1 & -X + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-X^2 + X} & -X - 2 \\ \;/ \quad 2X + 1 & \\ \quad \underline{-2X + 2} & \\ \quad\; / \quad 3 = r_2 & \end{array}$$

Împărțim $r_1 = -X + 1$ la $r_2 = 3$ și obținem restul $r_3 = 0$. Deci 3 este un c. m. m. d. c. al polinoamelor f și g.

2) Determinați c. m. m. d. c. al polinoamelor $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$ și $g = X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1$.

Împărțim f la g:

$$\begin{array}{l|l} X^5 + \quad X^4 - \quad X^3 - \quad 3X^2 - 3X - 1 & X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-X^5 + 2X^4 + \quad X^3 + 2X^2 - \quad X} & X + 3 \\ \;/ \qquad 3X^4 \qquad\qquad -X^2 - 4X - 1 & \\ \quad \underline{-3X^4 + 6X^3 + 3X^2 + 6X - 3} & \\ \quad\; / \qquad 6X^3 + 2X^2 + 2X - 4 = r_1 & \end{array}$$

Împărțim r_1 la 2 și înmulțim $X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1$ cu 3. Efectuăm apoi împărțirea lui $3X^4 - 6X^3 - 3X^2 - 6X + 3$ la $3X^3 + X^2 + X - 2$:

$$
\begin{array}{rl}
3X^4-6X^3-3X^2-6X+3 & \big|\ 3X^3+X^2+X-2 \\
\underline{-3X^4-\ \ X^3-\ \ X^2+2X} & \big|\ X \\
-7X^3-4X^2-4X+3 &
\end{array}
$$

Înmulțim $3X^3+X^2+X-2$ cu 7 și $-7X^3-4X^2-4X+3$ cu –3 și continuăm împărțirea:

$$
\begin{array}{rl}
21X^3+\ 7X^2+\ 7X-14 & \big|\ 21X^3+12X^2+12X-9 \\
\underline{-21X^3-12X^2-12X+9} & \big|\ 1 \\
-5X^2-\ 5X-5 &
\end{array}
$$

Împărțim $-5X^2-5X-5$ la –5 și apoi efectuăm împărțirea lui $21X^3+12X^2+12X-9$ la X^2+X+1:

$$
\begin{array}{rl}
21X^3+12X^2+12X-9 & \big|\ X^2+X+1 \\
\underline{-21X^3-21X^2-21X} & \big|\ 21X-9 \\
/\quad -9X^2-\ 9X-9 & \\
\underline{9X^2+\ 9X+9} & \\
/\qquad /\quad / &
\end{array}
$$

Am obținut restul zero, deci c.m.m.d.c. este ultimul rest nenul, adică $X^2 + X + 1$.

Cel mai mic multiplu comun a două polinoame

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $m \in K[X]$ se numește *cel mai mic multiplu comun* (prescurtat c.m.m.m.c.) al lui f și g dacă

(α') $f \mid m$ și $g \mid m$ (adică m este multiplu comun al lui f și g) și

(β') dacă $f \mid h$ și $g \mid h$, atunci $m \mid h$ (adică orice alt multiplu h al lui f și g este multiplu și al lui m).

Pentru cel mai mic multiplu comun al lui f și g folosim notația c.m.m.m.c. (f, g) sau mai simplu $[f, g]$.

Teorema 2. Oricare ar fi $f, g \in K[X]$ cel mai mic multiplu comun al lui f și g există și verifică relația

$$[f, g] = \frac{f \cdot g}{(f, g)}$$

Demonstrație. Relația de demonstrat se scrie și astfel: $fg = md$, unde $m = [f, g]$ și $d = (f, g)$. Fie $d = (f, g)$ și $f_1, g_1 \in K[X]$ astfel încât $f = df_1$, $g = dg_1$. Avem $d = (f, g) = (df_1, dg_1) = d(f_1, g_1)$ și simplificând cu d obținem $1 = (f_1, g_1)$, adică f_1 și g_1 sunt polinoame prime între ele.

Fie $m = \dfrac{fg}{d} = f_1g = fg_1$. Rezultă că m este multiplu comun al lui f și g.

Fie $h \in K[X]$ un multiplu comun al lui f și g. Avem $h = fq_1 = gq_2$ cu $q_1, q_2 \in K[X]$. Din $fq_1 = gq_2$ rezultă $df_1q_1 = dg_1q_2$ și simplificând cu d obținem $f_1q_1 = g_1q_2$. Cum $(f_1, g_1) = 1$ și $f_1 \mid g_1q_2$ rezultă că $f_1 \mid q_2$. Din $h = gq_2$ rezultă că $m = f_1g$ divide h.

Analog se arată că $m \mid h$ și deci $\dfrac{fg}{d} = m = [f, g]$. ■

20) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^9 - 1$ și $g = X^6 - 1$.

a) Determinați polinomul $m \in \mathbb{C}[X]$, c.m.m.m.c. al polinoamelor f și g.

b) Determinați polinomul d, c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

c) Calculați produsul fg.

d) Verificați relația $fg = m \cdot d$.

21) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{C}[X]$. Determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor f și g în fiecare dintre cazurile:

a) $f = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$;
$g = 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X$;

b) $f = X^4 - 4X^3 + 1$;
$g = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + X + 1$

c) $f = X^6 - 9X^4 - 10X^3 - 9X^2 + 1$,
$g = X^4 - 4\sqrt{2}X^3 + 6X^2 + 4\sqrt{2}X + 1$.

Calculați, în fiecare caz în parte $f \cdot g$.

Verificați, în fiecare caz în parte, relația $fg = (f, g) \cdot [f, g]$.

Observație. Dacă pentru c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c., cerem să fie polinoame monice, atunci egalitatea din enunț este adevărată, mai puțin un factor nenul din K.

22) Aflați polinoamele f și g cunoscând că cel mai mare divizor comun al lor este X^4+4, cel mai mic multiplu comun este X^4+3X^2-4, $f(1)=10$ și $g(-1)=20$.

Exercițiu rezolvat.

Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$, $g = X^3 + 3X^2 - X - 3$. Să se calculeze $d = (f, g) =$ = c.m.m.d.c. (f, g) și $m = [f, g] =$ c.m.m.m.c. (f, g).

Soluție. Împărțim pe f la g și obținem $f = gq_1 + r_1$ cu $q_1 = X - 2$ și $r_1 = 4X^2 - 4$.

Împărțind pe g la r_1 obținem $g = r_1q_2 + r_2$ cu $q_2 = \frac{1}{4}X + \frac{3}{4}$ și $r_2 = 0$. Rezultă că c.m.m.d.c. $(f, g) = X^2 - 1$ dacă punem condiția să fie polinom monic. Împărțind polinomul fg la $X^2 - 1$ se obține:
$m =$ c.m.m.m.c. $(f, g) = X^5 + 4X^4 - 10X^2 - X + 6$.

Observație. Dacă $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, atunci polinoamele f și αf au aceeași divizori în $K[X]$. Din acest motiv în algoritmul lui Euclid pentru două polinoame f și g din $\mathbb{Z}[X]$ putem evita coeficienții fracționari înmulțind oricare dintre polinoamele $f, g, r_1, r_2, ..., r_n$ cu un număr întreg nenul potrivit ales. Astfel în exercițiul rezolvat precedent atunci când împărțim pe $g = X^3 + 3X^2 - X - 3$ la $r_1 = 4X^2 - 4$ putem înlocui pe g cu $4g$ sau pe r_1 cu $\frac{1}{4}r_1 = X^2 - 1$.

Polinoame ireductibile

Vom introduce noțiunea de *polinom ireductibil* peste un corp comutativ K. Vom arăta că polinoamele ireductibile au în aritmetica inelului $K[X]$ rolul pe care îl au numerele prime în aritmetica lui $\mathbb{Z}$.

Definiție. Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$, grad $f = n > 0$. Spunem că polinomul f este *ireductibil* peste K dacă nu există $g, h \in K[X]$ astfel încât

$$f = gh \text{ cu grad } g < n \text{ și grad } h < n.$$

În caz contrar spunem că f este *reductibil* peste K.

Proprietatea 1.

Orice polinom $f \in K[X]$ de grad 1 este ireductibil peste K.

Într-adevăr dacă $f = gh$ cu grad $g < 1$, grad $h < 1$, atunci g și h sunt polinoame constante nenule și la fel va fi $f = gh$. Contradicție.

Astfel $2X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$

- $X+\sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$,
- $\hat{3}X+\hat{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

Proprietatea 2.

Dacă un polinom $f \in K[X]$, grad $f = n > 1$ este ireductibil peste K, atunci $f(a) \neq 0$, oricare ar fi $a \in K$, adică polinomul f nu are rădăcini în K. Reciproc, dacă $n =$ grad f *este egal cu 2 sau cu 3 și $f(a) \neq 0$, $\forall a \in K$, atunci f este ireductibil peste K.*

Într-adevăr dacă $f(a) = 0$ cu $a \in K$, atunci conform teoremei lui Bézout avem $f(X) = (X - a)q(X)$ cu $q(X) \in K[X]$.

23) Fie polinomul $f \in K[X]$. Stabiliți dacă următoarele polinoame sunt ireductibile peste K:

a) $f = X^2+X+1$, $f \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X^2+2$, $f \in \mathbb{Q}[X]$;

c) $f = X^2+X+\hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_2[X]$;

d) $f = X^4+X^2+\hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$.

24) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{R}[X]$. $f=(X^2+X+1)^9$, $g=X^2+1$.

a) Arătați că $g \mid f$.

b) Stabiliți dacă polinomul f este ireductibil peste $\mathbb{R}$.

c) Stabiliți dacă polinomul f este ireductibil peste $\mathbb{C}$.

d) Stabiliți dacă polinomul g este ireductibil peste $\mathbb{R}$.

e) Stabiliți dacă polinomul g este ireductibil peste $\mathbb{C}$.

Indicație. a) $g(X)=(X-i)(X+i)$
$g \mid f$ dacă și numai dacă $f(i)=0$ și $f(-i)=0$. Avem $(i^2+i+1)^9=0$ și $((-i)^2-i+1)^9=0$.

Cum grad$(X - a) = 1 < n$ și grad $q(X) = n - 1 < n$ rezultă că f este reductibil peste K. Contradicție.

Reciproc, dacă $n = 2$ sau $n = 3$ și f este reductibil peste K, avem $f = gh$ cu $g, h \in K[X]$, grad $g < n$ și grad $h < n$. Cum n este egal cu 2 sau cu 3, rezultă că grad $g = 1$ sau grad $h = 1$. Dacă grad $g = 1$, atunci $g = aX + b$ cu $a, b \in K$, $a \neq 0$.

Avem $g(c) = 0$, unde $c = -ba^{-1} \in K$ și atunci $f(c) = g(c)h(c) = 0h(c) = 0$. Contradicție.

EXEMPLE

1) Polinomul $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Într-adevăr, în caz contrar există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r^2 - 2 = 0$, deci $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Contradicție.

2) Polinomul $X^2 - 2 \in \mathbb{R}[X]$ este reductibil peste $\mathbb{R}$ pentru că $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ cu $X - \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$ și $X + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$.

3) Polinomul $f = X^3 + \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$ este ireductibil peste corpul $\mathbb{Z}_5$ pentru că $f(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{4} \neq \hat{0}$, $f(\hat{2}) = \hat{3} \neq \hat{0}$, $f(\hat{3}) = \hat{4} \neq \hat{0}$, $f(\hat{4}) = \hat{3} \neq \hat{0}$.

În continuare vom determina polinoamele ireductibile peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe și peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale. Vom folosi *teorema fundamentală a algebrei*.

Teorema 3. (d'Alembert-Gauss)
Oricare ar fi $f \in \mathbb{C}[X]$, grad$f > 0$, există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(z) = 0$. Altfel spus, orice polinom de grad mai mare sau egal cu 1 având coeficienții complecși admite cel puțin o rădăcină complexă.

Nu se cunoaște o demonstrație elementară pentru teorema fundamentală a algebrei. O admitem fără demonstrație.

Corolarul 1. Singurele polinoame ireductibile peste $\mathbb{C}$ sunt polinoamele de gradul întâi din $\mathbb{C}[X]$.

Demonstrație. Se folosesc rezultatele de la proprietățile (1) și (2) de mai sus, cazul $K = \mathbb{C}$. ■

Cum $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, avem $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$. Fie $f \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, grad $f = n > 0$. Conform teoremei fundamentale a algebrei există $z = u + vi \in \mathbb{C}$ cu $u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(z) = 0$.

Dacă $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, atunci avem:

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0.$$

Considerăm conjugatul $\bar{z} = a - bi$ al numărului complex $z = a + bi$, avem:

$$0 = \bar{0} = \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0} = a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \ldots + a_1\bar{z} + a_0 = f(\bar{z})$$

Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

Teorema 4. Dacă z este o rădăcină complexă a polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ atunci și $\bar{z}$ este rădăcină a lui f.

Corolarul 2. Singurele polinoame ireductibile peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale sunt:

(1) polinoamele de gradul întâi: $aX + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

(2) polinoamele de gradul al doilea:
$aX^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

25) Determinați numerele reale a și b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$:

a) $f = (a+1)X^4 + (b+2)X^3 - 3X - 1$ și $g = (X-1)(X+1)$;

b) $f = X^5 - 3X^4 + 4X^3 + aX + bX - 2$ și $g = X^2 - 3X + 2$;

c) $f = X^4 - X^3 + 5X^2 + aX + b$ și $g = X^2 + 4$.

În fiecare caz în parte verificați dacă polinomul g este reductibil sau ireductibil peste $\mathbb{R}[X]$.

Indicație.
c) $f = g \cdot (X^2 - X + 1) + r(X)$,
$r(X) = (a+4)X + b - 4$;
$r(X) = 0 \Rightarrow a = -4, b = 4$.

26) Polinomul $f = X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ dar este reductibil peste $\mathbb{R}$ astfel

$$f = \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Dați exemplu de un alt polinom din $\mathbb{Z}$[X] ireductibil peste $\mathbb{Q}$, dar reductibil peste $\mathbb{R}$.

27) Polinomul $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$ dar este reductibil peste $\mathbb{C}$ astfel:

$$f = \left(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dați exemplu de un alt polinom din $\mathbb{R}[X]$ ireductibil peste $\mathbb{R}$, dar reductibil peste $\mathbb{C}$.

28) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$
$f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$.

Determinați numerele reale a și b și rădăcinile lui f, știind că una dintre rădăcini este $x_1 = 1 + i$.

Demonstrație

Având în vedere Exemplele (1) și (2) este suficient să arătăm că, dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil și n = grad $f > 1$, atunci $n = 2$.

Fie $z = u + iv \in \mathbb{C}$ cu $u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(z) = 0$. Cum f este ireductibil peste $\mathbb{R}$, avem $v \neq 0$. Mai știm $f(\overline{z}) = 0$ și cum $v \neq 0$ rezultă că $z \neq \overline{z}$. Din $f(z) = 0$, $f(\overline{z}) = 0$ și $z \neq \overline{z}$ rezultă, conform Teoremei 4, paragraful anterior că f se divide prin polinomul $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2uX + u^2 + v^2 \in \mathbb{R}[X]$. Cum și $f \in \mathbb{R}[X]$ din algoritmul împărțirii euclidiene a polinoamelor rezultă că există $q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(X) = (X^2 - 2uX + u^2 + v^2)q(X)$.

Cum f este ireductibil peste $\mathbb{R}$, avem $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, și deci $f = aX^2 + bX + c$, unde $a = q \neq 0$, $b = -2uq$ și $c = q(u^2 + v^2)$. Avem $b^2 - 4ac = -4v^2q^2 < 0$. ■

Descompunerea polinoamelor în produs de polinoame ireductibile

Conform teoremei fundamentale a aritmeticii orice număr natural mai mare decât 1 se reprezintă în mod unic ca produs de numere prime. Acest rezultat rămâne adevărat și în inelul $\mathbb{Z}$: orice număr întreg a, $|a| > 1$ se reprezintă în mod unic (mai puțin semnul factorilor) în produs de numere prime.

Astfel:

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (-2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-5)$ etc.

Două polinoame $f, g \in K[X]$ se numesc polinoame *asociate în divizibilitate* dacă se divid reciproc, adică $f \mid g$ și $g \mid f$.

Se observă că două polinoame nenule f și g sunt asociate în divizibilitate dacă $g = af$ cu $a \in K$, $a \neq 0$.

Rezultatul corespunzător teoremei fundamentale a aritmeticii pentru inelul $K[X]$, K un corp comutativ este dat în următoarea...

Teorema 5. Dacă $f \in K[X]$, grad $f = n > 1$, atunci există polinoamele ireductibile $f_1, f_2, \ldots, f_r \in K[X]$ unic determinate mai puțin o asociere în divizibilitate astfel încât:

$$f(X) = f_1(X)f_2(X) \ldots f_r(X) \text{ cu } r \geqslant 1.$$

Demonstrație. Pentru partea de existență a descompunerii în factori ireductibili demonstrăm prin inducție matematică după n = grad f.

Dacă $n = 1$, atunci f este ireductibil peste K și afirmația din enunț este adevărată cu $r = 1$ și $f_1 = f$.

Presupunem că $n > 1$. Dacă f este ireductibil, din nou luăm $r = 1$ și $f_1 = f$. Dacă f este reductibil atunci există $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = gh$, grad $g < n$, grad $h < n$.

Presupunând afirmația din enunț adevărată pentru polinoamele din $K[X]$ de grad mai mic decât n, rezultă că g și h se reprezintă ca produse de polinoame ireductibile și atunci aceeași proprietate are și $f = gh$.

Partea de unicitate este propusă ca exercițiu. ■

29) Să se determine polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$,
$f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + b$.
știind că $f(i) = 1 + i$ și $f(1 + i) = -6 + 5i$.
Indicație. Se ține cont de puterile lui i în calculul lui $f(i)$, respectiv $f(1 + i)$ și apoi se identifică coeficienții numerelor complexe, despre care trebuie să arătăm că sunt egale.

30) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + 1$. Descompuneți f în factori ireductibili peste:
a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{C}$

31) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - 1$. Descompuneți f în factori ireductibili peste:
a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{C}$.

32) Descompuneți în factori ireductibili polinomul
$f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

Indicație. Considerăm funcția polinomială asociată și calculăm

$f(\hat{0}) = \hat{4}$; $f(\hat{1}) = \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{3}$;
$f(\hat{2}) = \hat{0}$; $f(\hat{3}) = \hat{3}$; $f(\hat{4}) = \hat{1}$.

Rezultă că f are rădăcina $\hat{2}$. Din teorema lui Bézout obținem că $X - \hat{2} \mid f$, adică $X + \hat{3} \mid f$.

33) Descompuneți în factori ireductibili fiecare dintre polinoamele:
a) $g = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$;
b) $f = X^3 + \hat{6} \in \mathbb{Z}_7[X]$;
c) $h = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{5}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

Observație. În descompunerea $f = f_1 f_2 \dots f_r$ dând în factor coeficienții dominanți ai polinoamelor ireductibile $f_1, f_2, \dots, f_r$, avem: $f = af_1 f_2 \dots f_r$ cu $a \in K$, $a \neq 0$ și $f_1, f_2, \dots, f_r$ polinoame monice ireductibile.

Din rezultatele precedente deducem:

Corolarul 3. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ cu $n > 0$ și $a_n \neq 0$, atunci există numerele complexe $z_1, z_2, \dots, z_n$ unic determinate astfel încât: $f = a_n(X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n)$

Corolarul 4. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ cu $n > 0$ și $a_n \neq 0$ atunci f se descompune în mod unic sub forma: $f = a_n(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_s)(X^2 + \beta_1 X + \gamma_1) \dots (X^2 + \beta_t X + \gamma_t)$ unde $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$ și $s + 2t = n$.

1) Polinomul $f = X^n + X^{n-1} + \dots + X - n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ este reductibil peste $\mathbb{Z}$, deoarece $f(1) = 0$.

2) Polinomul $f = X^3 + X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

Într-adevăr, dacă f ar fi reductibil am putea scrie: $f = gh$, $\operatorname{grad} g = 1$, $\operatorname{grad} h = 2$, $g, h \in \mathbb{Z}[X]$. Atunci $X^3 + X + 1 = (X + a)(X^2 + bX + c)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Rezultă $ac = 1$, deci $a = \pm 1$.

Din descompunerea lui f rezultă $f(-a) = 0$. Însă $f(1) = 3 \neq 0$ și $f(-1) = -1 \neq 0$.

Indicație.

a) $\left.\begin{array}{l} g(\hat{0}) = \hat{2} \\ g(\hat{1}) = \hat{2} \\ g(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{0} \\ g(\hat{3}) = \hat{4} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{3} \\ g(\hat{4}) = \hat{3} + \hat{3} + \hat{2} = \hat{3} \end{array}\right| \Rightarrow (X + \hat{3}) \mid f$

b) $f(\hat{0}) = \hat{6}$, $f(\hat{1}) = \hat{0}$, $f(\hat{2}) = \hat{0}$, $f(\hat{3}) = \hat{5}$, ...

Rezultă $f(X) = (X - \hat{1})(X - \hat{2}) \dots$

34) Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - X^2 - 5X + 5$ și $g = X^6 - 1$.

Descompuneți fiecare dintre polinoamele f și g în $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ și $\mathbb{C}[X]$.

35) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ polinomul f, dacă:

a) $f = X^4 + 1$; b) $f = X^4 - X^2 + 1$.

36) Descompuneți polinomul $f = X^6 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$.

Aplicație a inelului $\mathbb{Z}_2[X]$. *Codificarea mesajelor*

Fie A o mulțime numită alfabet, cu două elemente, anume simbolurile 0 și 1 numite litere. Cu ajutorul literelor alfabetului A putem forma 2^m secvențe diferite cu m termeni $a_0 a_1 \dots a_{m-1}$ ($a_i \in A$) numite *cuvinte de lungime m peste alfabetul A*. Notăm cu D_m mulțimea cuvintelor de lungime m peste alfabetul A.

Fie C o submulțime cu 2^m elemente a lui D_n, unde $m < n$. Mulțimea C se numește *cod* iar elementele sale *cuvinte-cod*. Putem fixa o bijecție $g : D_m \to C \subset D_n$ prin care *codificăm* mesajele date prin cuvinte de lungime n din C. Se poate folosi aritmetica inelului $\mathbb{Z}_2[X]$ pentru a perfecta codificarea și decodificarea mesajelor îndată ce se cunoaște *cheia* codului (în cazul nostru, un polinom $p \in \mathbb{Z}_2[X]$).

Pentru a simplifica scrierea polinoamelor din $\mathbb{Z}_2[X]$, notăm elementele corpului $\mathbb{Z}_2$ cu 0 și 1 ; corpul $\mathbb{Z}_2$ este înzestrat cu operațiile de adunare și înmulțire care au tabelele alăturate:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Se observă că $a + a = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}_2$, de unde rezultă că $f + f = 0$, $\forall\, f \in \mathbb{Z}_2[X]$.

Să notăm cu P_n mulțimea polinoamelor $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ de grad mai mic decât n, $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}_2$). Evident, P_n are 2^n elemente, iar aplicația $(*)$ $D_n \to P_n$, $a_0 a_1 \dots a_{n-1} \mapsto a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ este bijectivă.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < n$ și $p \in \mathbb{Z}_2[X]$ un polinom de gradul $n - m$. Deoarece un polinom $f \in P_n$ se divide prin p dacă și numai dacă există un polinom $q \in P_m$ astfel încât $f = pq$, rezultă că mulțimea $\mathscr{C}$ a polinoamelor din P_n care se divid prin p are 2^m elemente.

Submulțimea C a lui D_n formată cu cuvintele din D_n care prin bijecția $(*)$ corespund polinoamelor din $\mathscr{C}$ se numește (n, m) - *codul polinomial* generat de p. Dacă $f \in \mathscr{C}$, atunci f se numește *polinom-cod*.

Fie acum bijecția $(**)$ $D_m \to P_m$, $b_0 b_1 \dots b_{m-1} \mapsto b_0 + b_1 X + \dots + b_{m-1}X^{m-1}$. Dacă $g \in P_m$, atunci g este numit *polinom-mesaj*. Există $q, r \in \mathbb{Z}_2[X]$ unic determinați astfel încât: $X^{n-m}g = pq + r$, $r \in P_{n-m}$.

Presupunem că $r = c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-m-1}X^{n-m-1}$, $c_i \in \mathbb{Z}$ și fie

$f \overset{def}{=} r + X^{n-m}g = c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-m-1}X^{n-m-1} + b_0X^{n-m} + \ldots + b_{m-1}X^{n-1}$. Avem $f \in \mathscr{C}$.

Într-adevăr, cum $r + r = 0$, avem $f = r + X^{n-m}g = r + pq + r = pq$, de unde $f \in \mathscr{C}$.

Se obține corespondența $P_m \to \mathscr{C}$, $g \to f$ care evident este bijectivă. Așadar, de la mesaje (din D_m) la cuvinte-cod (din $C \subset D_n$) se trece astfel: mesajul $b_0b_1\ldots b_{m-1}$ trece prin bijecția $(**)$ în polinomul-mesaj $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_{m-1}X^{m-1}$, căruia îi corespunde polinomul-cod $f = r + X^{n-m}g$. În fine, polinomul-cod f trece prin inversa bijecției $(*)$ în cuvântul-cod $c_0c_1\ldots c_{n-m-1}b_0b_1\ldots b_{m-1}$, unde c_0, c_1, ... c_{n-m-1} sunt coeficienții restului împărțirii lui $X^{n-m}q$ prin p.

Evident, un cuvânt $u \in D_n$, $u = a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ se găsește în C dacă și numai dacă polinomul $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$ se divide prin p.

Fie (6, 3)-codul polinomial generat de polinomul $p = 1 + X + X^3 \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Să se codifice mesajul 110.

b) Care dintre cuvintele 111001 și 110011 sunt cuvinte-cod?

Soluție. a) Mesajului 110 îi corespunde prin $(**)$ polinomul-mesaj $g = 1 + X$ și atunci $X^{n-m}g = X^{6-3}(1 + X) = X^3 + X^4$. Făcând împărțirea cu rest în $\mathbb{Z}_2[X]$ a polinomului $X^3 + X^4$ prin polinomul $P = 1 + X + X^3$ se obține restul $r = 1 + X^2$. Așadar, polinomul-cod corespunzător lui $g = 1 + X^2$ este $g = r + X^3g = 1 + X^2 + X^3 + X^4$, căruia îi corespunde cuvântul cod 101110.

b) Cuvântului 111001 din D_6 îi corespunde prin $(*)$ polinomul $f = 1 + X + X^2 + X^5$. Se constată că f se divide prin p, deci 111001 este cuvânt cod. Cuvântului 110011 îi corespunde prin $(*)$ polinomul $1 + X + X^4 + X^5$ care împărțit la p dă restul X, deci 110011 nu este cuvânt cod.

Exerciții rezolvate.

1) Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ polinomul $f = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ știind că admite rădăcina $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție. Polinomul f având coeficienții reali, admite și rădăcina $\bar{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și deci se divide prin polinomul $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 + X + 1$. Împărțind pe f prin $X^2 + X + 1$ se găsește câtul $X^2 - 2$, deci $f = (X^2 - 2)(X^2 + X + 1)$

Cum discriminatul lui $X^2 + X + 1$ este $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$ polinomul $X^2 + X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$ și cu atât mai mult peste $\mathbb{Q}$ (pentru că, $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$).

Cum și $X^2 - 2$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (pentru că rădăcinile sale nu sunt în $\mathbb{Q}$) rezultă că $f = (X^2 - 2)(X^2 + X + 1)$ este descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$ a lui f.

Acum este evident că descompunerile lui f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ sunt:

$$f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + X + 1) \text{ respectiv } f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2) Descompuneți polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$ în factori ireductibili peste: a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{C}$.

Soluție. Putem scrie $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$

Polinoamele $X^2 + X + 1$ și $X^2 - X + 1$ sunt ireductibile peste $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ deoarece discriminanții sunt negativi. Peste $\mathbb{C}$, aceste polinoame se pot descompune astfel:

$$X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right), \quad X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right),$$

deci $$f = \left(X + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

3) Descompuneți în factori ireductibili peste corpul $\mathbb{Z}_3$ polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

Soluție. Valorile $f(\alpha)$ ale polinomului f când $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ sunt:

α	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$f(\alpha)$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$

Rezultă că f se divide prin $X - \hat{1} = X + \hat{2}$. Folosind schema lui Horner, avem:

$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

deci câtul împărțirii lui f prin $X - \hat{1}$ este $X^2 + \hat{1}$. Cum gradul lui $X^2 + \hat{1}$ este 2 și cum $X^2 + \hat{1}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, rezultă că este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$. Descompunerea căutată este:

$$f = (X - \hat{2})(X^2 + \hat{1}).$$

4) Fie $n \geqslant 2, f = (X - a_1)(X - a_2)\ \dots\ (X - a_n) + 1, a_1,\ a_2,\ \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ distincte. Demonstrați că f este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

Soluție. Presupunem că $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$, grad $g < n$, grad $h < n$.

Avem $f(a_i) = -1$, adică $g(a_i)h(a_i) = -1$, $i = \overline{1,n}$. Cum $g(a_i), h(a_i) \in \mathbb{Z}$, rezultă $g(a_i) = 1$ și $h(a_i) = -1$ sau $g(a_i) = -1$ și $h(a_i) = 1$. În ambele cazuri avem $g(a_i) + h(a_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Fie $q = g + h$. Avem grad $q < n$. Presupunem $q \neq 0$. Deoarece $q(a_i) = 0, i = \overline{1,n}$, înseamnă că putem scrie $q(X) = (X - a_i)(X - a_2)\dots(X - a_n)s(X)$, grad $s \geqslant 0$. Rezultă grad $q \geqslant n$, contradicție! Deci $q = 0$ și prin urmare $h = -g$ iar $f = -g^2$. Deducem $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, fals deoarece dacă alegem $x_0 = \max\left\{ |a_i| \,\middle|\, i = \overline{1,n} \right\} + 1$ rezultă $f(x_0) > 0$.

5) a) Câte polinoame de grad mai mic sau egal cu 4 sunt în $\mathbb{Z}_2[X]$?

b) Determinați polinoamele ireductibile peste $\mathbb{Z}_2$ de grad cel mult 4.

Soluție. a) Dacă $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ și are gradul cel mult 4, atunci $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$, cu $a_i \in \mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

Cum pentru fiecare a_i avem două posibilități, există $2^5 = 32$ polinoame de grad cel mult 4 în $\mathbb{Z}_2$ $[X]$.

b) Singurele polinoame de grad 1 din $\mathbb{Z}_2[X]$ sunt X și $\hat{1} + X$ și acestea sunt ireductibile.

Dacă $f \in \mathbb{Z}_2$ $[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_2[X]$ și n = grad $f > 1$, atunci $a_0 = f(\hat{0}) \neq \hat{0}$, $a_0 + a_1 + \dots + a_n = f(\hat{1}) \neq \hat{0}$. Singurele polinoame de gradul al 2-lea sau al 3-lea care îndeplinesc aceste condiții sunt $\hat{1} + X + X^2$, $\hat{1} + X + X^3$, $\hat{1} + X^2 + X^3$ și vor fi ireductibile peste $\mathbb{Z}_2$.

Polinoamele de gradul al 4-lea care îndeplinesc condițiile $f(\hat{0}) \neq \hat{0}, f(\hat{1}) \neq \hat{0}$ sunt $\hat{1} + X + X^4$, $\hat{1} + X^2 + X^4$, $\hat{1} + X^3 + X^4$, $\hat{1} + X + X^2 + X^3 + X^4$ și fie f unul dintre acestea. Dacă f este reductibil, descompunerea sa în factori ireductibili conține numai factori de gradul al 2-lea, deci numai pe $X^2 + X + \hat{1}$. Așadar $f = (\hat{1} + X + X^2)^2 = \hat{1} + X^2 + X^4$. Conchidem că polinoamele ireductibile de gradul al 4-lea sunt $\hat{1} + X + X^4$, $\hat{1} + X^3 + X^4$ și $\hat{1} + X + X^2 + X^3 + X^4$.

6) Determinați polinoamele monice (unitare) ireductibile de gradul al 2-lea din inelul $\mathbb{Z}_3[X]$.

Soluție. Cum termenul liber al polinomului ireductibil de grad mai mare sau egal cu 2, nu poate fi egal cu $\hat{0}$, rezultă că polinomalele căutate sunt de forma $X^2 + \hat{a}X + \hat{1}$ sau $X^2 + \hat{a}X + \hat{2}$. Punând condiția ca acestea să nu aibă rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, se arată că polinoamele căutate sunt $X^2 + \hat{1}$, $X^2 + X + \hat{2}$ și $X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$.

1. Folosind algoritmul lui Euclid, determinați c.m.m.d.c. al polinoamelor:
a) $f = X^4 + 3X^3 + X^2 - 2$ și
$g = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ din $\mathbb{Q}[X]$.
b) $f = X^5 + X^2 - X + 1$ și
$g = 3X^4 - 5X^3 + 8X + 1$ din $\mathbb{Q}[X]$.

2. Folosind algoritmul lui Euclid, determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale polinoamelor $f, g \in \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = X^4 + X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$ și $g = X^2 + \hat{3}X + \hat{6}$.

3. Determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$ în cazurile:
a) $f = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$,
$g = 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X$.
b) $f = X^4 - 4X^3 + 1$, $g = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + X + 1$.
c) $f = X^6 - 9X^4 - 10X^3 - 9X^2 + 1$,
$g = X^4 - 4\sqrt{2}X^3 + 6X^2 + 4\sqrt{2}X + 1$.

4. Arătați că polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^3 - 2X^2 + 1$ sunt prime între ele.

5. Determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^9 - 1$, $g = X^6 - 1$.

6. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + 11X + 6$, $g = X^3 + bX^2 + 14X + 8$. Determinați a și b astfel încât f și g să admită un divizor comun de gradul al doilea.

7. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât c.m.m.d.c. (f, g) să fie un polinom de gradul al doilea, unde: $f = 2X^3 - 7X^2 + aX + 2$, $g = X^3 - 3X^2 + bX + 3$.

8. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$ polinoamele: $f = X^4 + 4$ și $g = X^6 + 27$.

9. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 2$
a) Arătați că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.
b) Descompuneți pe f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$.

10. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $f = X^4 + X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

11. Descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ polinomul $f = X^{12} - 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

12. Descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ polinomul $f = X^7 + X^6 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

13. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $f = mX(1 - X^n) - nX(1 - X^m)$. Demonstrați că f poate fi decompus sub forma $(1 - X)^2 g(X)$ și determinați polinomul g.

14. Descompuneți polinomul $X^8 + X^4 + 1$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.

15. Demonstrați că polinomul $f = (X-1)^2(X-2)^2 + 1$ nu se poate descompune în produs de două polinoame cu coeficienți numere întregi.

16. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$.

17. Determinați $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul $f = \hat{2}X^3 + \hat{a}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$.

18. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 2$.
a) Arătați că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.
b) Descompuneți polinomul f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$.

19. Descompuneți în factori ireductibili polinoamele de gradul al patrulea din $\mathbb{Z}_2[X]$.

20. Determinați polinoamele ireductibile peste $\mathbb{Z}_3$ de grad cel mult 3.

21. Fie $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, $h = fg$ și p un număr prim. Dacă toți coeficienții lui h se divid prin p, atunci cel puțin unul dintre polinoamele f și g are toți coeficienții divizibili prin p.

22. (*Criteriul lui Eisenstein*).
Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1X + .. + a_nX^n$, $n > 0$, $a_n \neq 0$ astfel încât există un număr prim p cu proprietățile: $p \mid a_0$, $p \mid a_1$, ..., $p \mid a_{n-1}$, $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$. Arătați că:
a) dacă $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$, atunci grad $g = n$ sau grad $h = n$;
b) f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

23. Arătați că polinoamele $X^4 - 2$, $X^4 - 15$, $X^5 - px + p$, $X^{p-1} + ... + X + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și p este prim, sunt ireductibile peste $\mathbb{Q}$.

24. (*Criteriul reducerii*).
Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, $n > 0$, p prim astfel încât $p \nmid a_n$ și $\hat{f} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X + ... + \hat{a}_nX^n \in \mathbb{Z}_p[X]$ este ireductibil peste corpul $\mathbb{Z}_p$.
a) Arătați că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.
b) Arătați că polinomul $5X^4 - 3X^3 + 6X^2 + 4X + 3$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

Rădăcini ale polinoamelor

Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$ astfel încât grad $f = n > 0$, Un element $\alpha \in K$ se numește *rădăcină* a polinomului f dacă $f(\alpha) = 0$. Aplicând teorema lui Bézout, rezultă că polinomul $X - \alpha \in K[X]$ divide polinomul f adică există $q(X) \in K[X]$ astfel încât $f(X) = (X - \alpha)q(X)$.

Există polinoame de grad mai mare decât 0 care nu admit nici o rădăcină în corpul coeficienților. Astfel, dacă $f = X^2 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$, atunci $f(\hat{0}) = \hat{2} \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{1} \neq \hat{0}$ și $f(\hat{2}) = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci f nu admite rădăcini în corpul $\mathbb{Z}_3$.

De asemenea, dacă $f = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, avem $f(\alpha) \neq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ pentru că din $\alpha^2 + 1 = 0$ rezultă $\alpha^2 = -1 < 0$. Contradicție.

Pe de altă parte, conform *teoremei fundamentale a algebrei* (teorema d'Alembert Gauss) orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ de grad mai mare decât 0 admite cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

Aplicând teorema d'Alembert-Gauss se poate demonstra următorul rezultat:

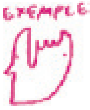
Teorema 1. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ cu $a_n \neq 0$ și $n > 0$. Există numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, nu neapărat distincte, astfel încât $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ numită *descompunerea în factori liniari* a lui f.

Demonstrație. Inducție matematică după n = grad f. Dacă $n = 1$, atunci $f = a_1X + a_0 = a_1\left(X + \frac{a_0}{a_1}\right) = a_1(X - x_1)$ cu $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$.

Presupunem că $n > 1$ și că rezultatul este adevărat pentru polinoame de grad $n - 1$ din $\mathbb{C}[X]$. Conform teoremei d'Alembert-Gauss există $x_1 \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(x_1) = 0$. Aplicând teorema lui Bézout, există $q \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât
$f(X) = (X - x_1)q(X)$. Evident grad $q = n - 1 > 0$ și coeficientul dominant al lui q este a_n. Conform ipotezei de inducție există $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $q = a_n(X - x_2)\ldots(X - x_n)$, de unde

$$f = a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n). \blacksquare$$

EXEMPLE



1) Dacă $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, atunci $f = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)$ este descompunerea în factori liniari a lui f, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Dacă $f = X^4 - 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, atunci $f = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$ este descompunerea în factori liniari a lui f.

Observații

♦ Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n$ și $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ cu $x_i \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, atunci

1) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$
$f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
a) Calculați $f(1)$.
b) Calculați $f(2)$.
c) Calculați $f(3)$.
d) Verificați dacă $f = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.
e) Care sunt rădăcinile reale ale lui f?

2) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$,
$f = 4X^4 + 3X^2 - 1$.
a) Calculați $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
b) Calculați $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
c) Calculați $f(i)$.
d) Calculați $f(-i)$.
e) Arătați că polinomul f este divizibil cu $X^2 + 1$.
f) Calculați $g = (4X^2 - 1)(X^2 + 1)$
g) Arătați că $f = g$.
h) Care sunt rădăcinile reale ale polinomului g?
i) Care sunt rădăcinile complexe ale polinomului f?

3) Fie polinomul, $f \in \mathbb{C}[X]$,
$f = X^4 - 2X^3 - 6X^2 + 16X - 16$. Știind că $2\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului f, descompuneți f în factori liniari în:
a) $\mathbb{Q}[X]$;
b) $\mathbb{R}[X]$;
c) $\mathbb{C}[X]$.

4) Fie $f = X^3 + \hat{2}X + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$
b) Calculați $f(\hat{1})$
c) Calculați $f(\hat{2})$.
d) Are polinomul f rădăcini în $\mathbb{Z}_3$?

$f(x_i) = a_n(x_i - x_1)(x_i - x_2)...(x_i - x_i)...(x_i - x_n) = 0$ pentru $i = 1, 2,..., n$, adică $x_1, x_2,..., x_n$ sunt rădăcini din $\mathbb{C}$ pentru f. Dacă pentru un număr $z \in \mathbb{C}$ avem $f(z) = 0$, atunci $a_n(z-x_1)(z-x_2) ... (z-x_n) = 0$ și deci există i astfel încât $z - x_i = 0$, adică $z = x_i$. Așadar $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt singurele rădăcini (nu neapărat distincte) din $\mathbb{C}$ ale lui f.

♦ În cazuri particulare de polinoame, o descompunere ca cea din enunțul teoremei precedente poate avea loc și când $K \neq \mathbb{C}$.

Astfel dacă $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$, atunci $f(\hat{1}) = \hat{0}, f(\hat{2}) = \hat{0}$ și $f(\hat{4}) = \hat{0}$. Așadar $\hat{1}, \hat{2}$ și $\hat{4}$ sunt rădăcini din $\mathbb{Z}_5$ pentru f și avem: $f = \hat{2}(X-\hat{1})(X-\hat{2})(X-\hat{4})$, adică $f = \hat{2}(X+\hat{4})(X+\hat{3})(X+\hat{1})$.

5) Fie polinomul
$f = X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{1}, f \in \mathbb{Z}_2[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$
b) Calculați $f(\hat{1})$
c) Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

6) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$,
$f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c$.
Determinați a, b, c astfel încât f împărțit la $X - 1$ să dea restul -15 și să admită pe $1 - i$ ca rădăcină. Aflați apoi toate rădăcinile lui f.

Exercițiu rezolvat. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că polinomul
$f = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} + \ ... \ + (-1)^n \frac{X(X-1) \ ... \ (X-n+1)}{n!}$ are rădăcinile 1, 2, ..., n.

Soluție. Procedăm prin inducție matematică după n. Pentru $n = 1$, avem $f = 1 - X$ care are rădăcina $x_1 = 1$.

Presupunem că polinomul $f = 1 - \frac{X}{1!} + \ ... \ + (-1)^n \frac{X(X-1) \ ... \ (X-n+1)}{n!}$ are rădăcinile 1, 2, ..., n și demonstrăm că polinomul $g = 1 - \frac{X}{1!} + \ ... \ + (-1)^n \frac{X(X-1) \ ... \ (X-n+1)}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{X(X-1) \ ... \ (X-n+1)(X-n)}{(n+1)!}$ are rădăcinile 1, 2, ..., n, $n+1$. Observăm că $g(x) = f(x) + (1)^{n+1} \cdot \frac{X(X-1) \ ... \ (X-n+1)(X-n)}{(n+1)!}$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

Dacă $1 \leqslant k \leqslant n, k \in \mathbb{N}$, atunci $g(k) = f(k) + 0 = 0$, deci 1, 2, ..., n sunt rădăcini ale lui g. Deoarece rădăcinile lui f sunt 1, 2, ..., n iar coeficientul dominant al lui f este $\frac{(-1)^n}{n!}$, putem scrie:

$f(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(X-1)(X-2)...(X-n+1)$. Rezultă:

$g(n+1) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot n! \ + \ (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$ și problema este rezolvată.

Rădăcini multiple

Fie $f \in K[X]$, $\text{grad} f = n > 0$ și $\alpha \in K$ o rădăcină a lui f. Cum $f(\alpha) = 0$, rezultă că $X - \alpha \mid f$, deci există $q_1 \in K[X]$ astfel încât

$$f = (X - \alpha)q_1$$

Să observăm că $(X - \alpha)^2$ divide pe f dacă și numai dacă $q_1(\alpha) = 0$. Într-adevăr, dacă $(X - \alpha)^2 \mid f$, atunci $f = (X - \alpha)^2 q_2$ cu $q_2 \in K[X]$. Din $f = (X - \alpha)q_1 = (X - \alpha)^2 q_2$ obținem $q_1 = (X - \alpha)q_2$ și deci $q_1(\alpha) = 0$. Reciproc, dacă $X - \alpha \mid q_1$, atunci evident $(X - \alpha)^2 \mid f$.

Analog se arată că $(X - \alpha)^3 \mid f$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = q_1(\alpha) = q_2(\alpha) = 0$ unde q_1 este câtul împărțirii lui f prin $X - \alpha$, iar q_2 câtul împărțirii lui q_1 prin $X - \alpha$.

În general avem:

Teorema 2. Fie $f \in K[X]$, $\text{grad} f = n > 0$, $\alpha \in K$ și $e \in \mathbb{N}^*$, $e \leqslant n$. Atunci $(X - \alpha)^e \mid f$ și $(X - \alpha)^{e+1} \nmid f$ dacă și numai dacă

$$f(\alpha) = q_1(\alpha) = q_2(\alpha) = \ldots = q_{e-1}(\alpha) = 0 \text{ și } q_e(\alpha) \neq 0,$$

unde $q_1, q_2, \ldots, q_e$ sunt respectiv câturile împărțirii prin $X - \alpha$ ale polinoamelor $f, q_1, q_2, \ldots, q_{e-1}$.

Definiție. Fie $f \in K[X]$, $\text{grad} f = n > 0$, $e \in \mathbb{N}^*$ și $\alpha \in K$ astfel încât $f(\alpha) = 0$. Spunem că α este rădăcină de *ordin de multiplicitate* e a polinomului f dacă $(X - \alpha)^e \mid f$ și $(X - \alpha)^{e+1} \nmid f$.

Când $e = 1, 2, 3, \ldots$ spunem că α este respectiv rădăcină *simplă*, *dublă*, *triplă* ... . De asemenea, dacă $e > 1$ spunem că α este rădăcină *multiplă*.

7) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 1)^2(X - 2)$.
a) Scrieți polinomul în forma canonică după puterile descrescătoare ale lui X.
b) Calculați f'.
c) Calculați $f(1)$.
d) Calculați $f(2)$.
e) Calculați $f'(1)$.
f) Determinați rădăcinile reale ale polinomului f specificând și ordinul de multiplicitate.
g) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

8) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$.
a) Calculați $f(2)$.
b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.
c) Determinați rădăcinile reale ale polinomului f și specificați ordinul de multiplicitate al acestora.

9) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - (m+1)X^3 + (2n - m)X^2 + X + 1$. Determinați numerele reale m și n știind că f admite rădăcina dublă $\alpha = 2$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$. Arătați că $\alpha = 2$ este rădăcină dublă a polinomului f.

Soluție. Avem $f(2) = 0$, deci $\alpha = 2$ este rădăcină a polinomului f. Împărțim polinomul f prin $X - 2$ și găsim $f = (X - 2)q_1$, unde $q_1 = X^3 - X^2 - X - 2$. Cum $q_1(2) = 0$ rezultă că $X - 2$ divide polinomul q_1 și efectuând împărțirea găsim $q_1 = (X - 2)q_2$, unde $q_2 = X^2 + X + 1$. Cum $q_2(2) = 7 \neq 0$ rezultă că $\alpha = 2$ este rădăcină dublă a polinomului $f = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.

Pentru determinarea câturilor q_1 și q_2 folosim „în cascadă" schema lui Horner ca mai jos.

f			
q_1		$f(2)$	2
q_2	$q_1(2)$	2	
q_3 $q_2(2)$	2		

sau explicit

1	–3	1	0	4	
1	–1	–1	–2	0	2
1	1	1	0	2	
1	3	7	2		

2) Fie $f = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$. Arătați că $\alpha = 1$ este rădăcină triplă a lui f și precizați apoi care este descompunerea în factori liniari a lui f.

Soluție. Folosind „în cascadă" schema lui Horner pentru împărțirea cu $X - 1$, avem:

1	–5	14	–22	17	–5	
1	–4	10	–12	5	0	1
1	–3	7	–5	0	1	
1	–2	5	0	1		
1	–1	4	1			

Rezultă că $f = (X - 1)^3(X^2 - 2X + 5)$. Cum rădăcinile polinomului $X^2 - 2X + 5$ sunt $1 + 2i$ și $1 - 2i$, descompunerea în factori liniari a lui f este:

$$f(X) = (X - 1)(X - 1)(X - 1)(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i) = (X - 1)^3(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i).$$

3) Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 - X^3 + X^2 - \hat{2}X + \hat{3}$.

Determinați multiplicitatea rădăcinii $\alpha = \hat{3} \in \mathbb{Z}_5$ pentru polinomul f.

Soluție. Folosind schema Horner „în cascadă”, avem

$\hat{1}$	$-\hat{1}$	$\hat{1}$	$-\hat{2}$	$\hat{3}$	
$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	
$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$		

Rezultă că $f = (X - \hat{3})^2(X^2 + \hat{2}) = (X + \hat{2})^2(X^2 + \hat{2})$ și $\alpha = \hat{3}$ este rădăcină dublă pentru f.

Dacă $f \in K[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, atunci polinomul $f' \in K[X]$

$$f' \overset{\text{def}}{=} na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \ldots + 2a_2X + a_1$$

se numește *derivata* formală a polinomului f. Regulile de derivare pentru funcțiile polinomiale reale de variabilă reală se regăsesc și la derivata formală a polinoamelor:

$$(f+g)' = f' + g',\ (fg)' = f'g + fg',\ (af)' = af',$$

$$f(g(X))' = f'(g(X))g'(X)$$

Dacă $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, atunci notăm cu $f(g(X))$ pe $a_ng(X)^n + a_{n-1}g(X)^{n-1} + \ldots + a_1g(X) + a_0$.

4) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ și rezolvați ecuația $x^3 - ax^2 + 2x + b = 0$ știind că admite soluția dublă $x = -1$.

Soluție. Considerăm polinomul asociat $f = X^3 - aX^2 + 2X + b = 0$ și aplicăm schema lui Horner.

X^3	X^2	X	X^0	
1	$-a$	2	b	
1	$-a-1$	$a+3$	$b-a-3$	-1

Avem deci prima condiție:
$b - a - 3 = 0$ (1)

X^2	X	X^0	
1	$-a-1$	$a+3$	
1	$-a-2$	$2a+5$	-1

a doua condiție este $2a + 5 = 0$ (2)

Rezultă $a = -\dfrac{5}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$ și obținem $X^3 + \dfrac{5}{2}X^2 + 2X + \dfrac{1}{2} = (X+1)^2\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$. Deci $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

5) Demonstrați că polinomul $(X^2+1)^{3n+1} + (X+1)^{2n+1} + X^{n+2} + X^{6n+1}$ este divizibil prin polinomul $X^2 + X + 1$ dacă și numai dacă n este par.

Soluție. Fie x_1, x_2 rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$, $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Atunci $X^2 + X + 1 = (X - x_1)(X - x_2)$. Pentru a demonstra că $X^2 + X + 1 \mid f$ este necesar și suficient să arătăm că x_1, x_2 sunt rădăcini ale lui f. Fie $\alpha \in \{x_1, x_2\}$. Atunci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ și $\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$. Avem: $f(\alpha) = (\alpha^2+1)^{3n+1} + (\alpha+1)^{2n+1} + \alpha^{n+2} + \alpha^{6n+1} = (-\alpha)^{3n+1} + (-\alpha^2)^{2n+1} + \alpha^{n+2} + (\alpha^3)^{2n} \cdot \alpha =$ $= (-\alpha)^{3n} \cdot (-\alpha) - \alpha^{4n+2} + \alpha^{n+2} + \alpha = -(-1)^n \cdot \alpha - \alpha^{n+2}(\alpha^{3n} - 1) + \alpha = \alpha(1 - (-1)^n)$. Conchidem că $f(\alpha) = 0$ dacă și numai dacă n este par.

6) Fie $f \in K[X]$, grad $f = n \geqslant 2$ și $\alpha \in K$.

a) Arătați că $(X - \alpha)^2 \mid f(X) \Leftrightarrow f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

b) Arătați că polinomul $f = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X$ se divide prin $(X-1)^2$.

Soluție a) Dacă $(X - \alpha)^2 \mid f(X)$ avem $f(X) = (X - \alpha)^2 q(X)$ cu $q(X) \in K[X]$. Folosind regulile de derivare avem:

$$f'(X) = 2(X - \alpha)q(X) + (X - \alpha)^2 q'(X),\ \text{de unde } f(\alpha) = f'(\alpha) = 0.$$

Reciproc, presupunem că $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Din $f(\alpha) = 0$ rezultă că $f(X) = (X - \alpha)g(X)$ cu $g(X) \in K[X]$.

Derivând, obținem $f'(X) = g(X) + (X - \alpha)g'(X)$ și cum $f'(\alpha) = 0$ rezultă că $g(\alpha) = 0$, deci $g(X) = (X - \alpha)q(X)$ cu $q \in K[X]$ și atunci $f(X) = (X - \alpha)^2 q(X)$.

b) Avem $f'(X) = (n+2)nX^{n+1} - (n+1)^2X^n + 1$ și se constată că $f(1) = f'(1) = 0$.

Relații între rădăcini și coeficienți

Fie K un corp comutativ și $f\in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ cu $n > 0$ și $a_n \neq 0$.

Presupunem că f se descompune în factori liniari în $K[X]$, adică există $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ astfel încât

$$f = a_n(X - x_1)(X - x_2) ... (X - x_n)$$

Conform teoremei d'Alembert-Gauss acest lucru este posibil pentru orice polinom f de grad mai mare decât 0 dacă $K = \mathbb{C}$.

Elementele $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ sunt rădăcinile lui f din K, adică $f(x_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Între coeficienții $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ ai polinomului f și rădăcinile sale $x_1, x_2, ..., x_n$ există o legătură, care se descrie prin *relațiile lui Viète* obținute prin identificarea coeficienților din egalitatea

$$a_n(X - x_1)(X - x_2) ... (X - x_n) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0.$$

Înainte de a obține rezultatul general să examinăm cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Egalitatea $a_2(X - x_1)(X - x_2) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ mai poate fi scrisă sub forma

$$a_2X^2 - a_2(x_1 + x_2)X + a_2x_1x_2 = a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

de unde, prin identificarea coeficienților, obținem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{a_1}{a_2} \\ x_1x_2 = \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

(prin $\dfrac{a_1}{a_2}$ se notează $a_1a_2^{-1} \in K$ etc.)

Analog, egalitatea

$$a_3(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

se mai scrie

$$a_3X^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)X^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - a_3x_1x_2x_3 = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

de unde:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Rezultatul general este:

Observație. Relațiile lui Viète sunt simetrice în raport cu x_1 ... x_n.

Exemplu. Relațiile lui Viète pentru polinomul $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$, $a \neq 0$, sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

10) Scrieți relațiile lui Viète pentru fiecare dintre polinoamele:

a) $f = 4X^2 - 5X + 1$;

b) $f = -X^3 - 2X^2 + X - 5$;

c) $f = 2X^3 - X + 1$;

d) $f = X^4 + X^3 - X^2 + 1$.

11) Fie $f\in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^4 + 12X - 5$. Să se arate că f are două rădăcini a căror sumă este egală cu 2. Să se afle rădăcinile polinomului.

12) Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, știind că între acestea există relațiile precizate în fiecare caz:

a) $f = 6X^3 - 47X^2 + 64X + 12$ și $x_1 = 3x_2$;

b) $f = X^4 + 10X^3 + 35X^2 + 50X + 24$ și $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

13) Să se determine rădăcinile polinomului f, dacă acestea verifică relația indicată $f = X^3 - 13X + 12$, $x_1 - x_2 = 2$.

14) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$,

$f = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.

Determinați rădăcinile polinomului f știind că acestea sunt în progresie geometrică.

Teorema 3. Fie $f \in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polinom de grad $n > 0$. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ avem $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} & (2) \\ \ldots & \ldots \\ x_1 \ldots x_{k-1}x_k + x_1 \ldots x_{k-1}x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1} \ldots x_{n-1}x_n = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n} & (k) \\ \ldots & \ldots \\ x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} & (n) \end{cases}$$

Demonstrație

Presupunem că $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ cu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, nu neapărat distincte. Avem $a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.

Efectuăm produsele din membrul stâng al egalității precedente și scriem rezultatul ca un polinom în X după puterile descrescătoare ale lui X.

Identificând coeficienții se obțin relațiile (1) – (n) din enunțul teoremei.

Să observăm că membrul stâng al relației (k) este o sumă de C_n^k termeni, fiecare termen fiind un produs de k factori luați dintre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, în ordinea crescătoare a indicilor.

Reciproc, presupunem că elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, nu neapărat distincte, verifică relațiile (1) – (n) din enunțul teoremei și fie polinomul $g \in K[X]$, $g = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$.

Evident, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ coincid cu rădăcinile lui g din K. Avem $g = f$ pentru că

$$g = a_nX^n - a_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n x_1x_2 \ldots x_n =$$

$$= a_nX^n - a_n\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n(-1)^n \frac{a_0}{a_n} =$$

$$= a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = f.$$

Când $K = \mathbb{C}$, din teorema fundamentală a algebrei rezultă că pentru orice polinom f, grad $f = n$, $n > 0$ avem $f = a_n(X - x_1) \ldots (X - x_n)$ cu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, așa cum se cere în enunțul teoremei 3. ■

Egalitățile (1) – (n) din enunțul teoremei 3 sunt cunoscute sub numele de *relațiile lui Viète* și descriu legăturile dintre rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale polinomului f și coeficienții acestuia. Ele pot folosi la determinarea efectivă a rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dacă se cunoaște o relație suplimentară între acestea.

15) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile polinomului $f = aX^2 + bX^2 + c$, $f \in \mathbb{C}[X]$ și știind că numerele complexe a, b, c sunt în progresie aritmetică, să se arate că este verificată relația $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 1 = 0$.

16) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f = X^3 + pX + q$, $f \in \mathbb{R}[X]$, arătați că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) =$
$= 7\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2$.

17) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f = X^3 - 5X + 2$, să se calculeze

a) $x_1 + x_2 + x_3$;

b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;

c) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$;

d) $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

18) Se consideră polinomul

$$f = X^2 + pX + q.$$

Determinați numerele reale p și q astfel ca diferența rădăcinilor polinomului să fie 4, iar diferența cuburilor rădăcinilor să fie 208.

19) Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + X - 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3. Determinați un polinom $g \in \mathbb{R}[X]$ care are rădăcinile α_1, α_2 și α_3, știind că:

a) $\alpha_1 = x_1^2$, $\alpha_2 = x_2^2$, $\alpha_3 = x_3^2$;

b) $\alpha_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$,
$\alpha_2 = x_1 + 3x_2 + x_3$, $\alpha_3 = x_1 + x_2 + 3x_3$;

c) $\alpha_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\alpha_2 = x_1^2 + x_3^2$, $\alpha_3 = x_2^2 + x_3^2$

d) $\alpha_1 = 1 + \dfrac{1}{x_1^2}$, $\alpha_2 = 1 + \dfrac{1}{x_2^2}$, $\alpha_3 = 1 + \dfrac{1}{x_3^2}$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ ale polinomului $f = 2X^3 - X^2 - 7X - 3 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, știind că $x_1 + x_2 = 1$.

Soluție. Relațiile lui Viète pentru polinomul f sunt: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\dfrac{7}{2} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Cum $x_1 + x_2 = 1$, din prima relație se obține $x_3 = -\frac{1}{2}$. Apoi, din ultima relație rezultă că $x_1x_2 = -3$. Cum $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1x_2 = -3$, x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 3 = 0$, deci $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

2) Determinați λ și rădăcinile polinomului $f = X^4 - 2X^3 - 6X^2 + \lambda X - 3 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, știind că $x_1x_2 = 3$.

Soluție. Relațiile lui Viète pentru polinomul f de gradul al 4-lea pot fi scrise astfel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 & (1) \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = -6 & (2) \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)(x_3x_4) = -\lambda & (3) \\ x_1x_2x_3x_4 = -3 & (4) \end{cases}$$

făcând în relațiile (2) și (3) grupări de termeni care adesea ușurează rezolvarea. Cum $x_1x_2 = 3$, din ultima relație rezultă că $x_3x_4 = -1$. Acum primele două relații pot fi scrise $\begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 2 \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = -8 \end{cases}$ de unde $x_1 + x_2 = 4$ și $x_3 + x_4 = -2$ ca soluții ale ecuației $x^2 - 2x - 8 = 0$. Din a treia relație se obține acum $\lambda = 10$. În continuare, din $x_1 + x_2 = 4$ și $x_1x_2 = 3$ se obțin $x_1 = 3$ și $x_2 = 1$, iar din $x_3 + x_4 = -2$ și $x_3x_4 = -1$ rezultă că $x_3 = -1+\sqrt{2}$ și $x_4 = -1-\sqrt{2}$.

3) Rezolvați ecuația $x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0$ știind că soluțiile sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Avem condiția $x_1 + x_3 = 2x_2$ și relațiile lui Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 6 \\ x_1x_2x_3 = 4 \end{cases}$. Relațiile $x_1 + x_2 + x_3 = -6$ și $x_1 + x_3 = 2x_2$ conduc la $x_2 = -2$. Din ultima relație deducem $x_1x_3 = -2$. Avem $x_1 + x_3 = -4$ și $x_1x_3 = -2$, deci x_1, x_3 sunt soluțiile ecuației $x^2 + 4x - 2 = 0$, adică $x_{1,3} = -2 \pm \sqrt{6}$. Soluțiile ecuației sunt $-2-\sqrt{6}, -2$ și $-2+\sqrt{6}$.

4) Fie $f = X^3 + X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Determinați rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$ și că restul împărțirii lui $f(X-1)$ la $X+1$ este -4.

Soluție. Calculăm expresia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de a și b: scriem că x_1, x_2, x_3 verifică ecuația $f(x) = 0$, adică: $x_1^3 + x_1^2 + ax_1 + b = 0$; $x_2^3 + x_2^2 + ax_2 + b = 0$; $x_3^3 + x_3^2 + ax_3 + b = 0$. Adunând, obținem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - a(x_1 + x_2 + x_3) - 3b$. Avem: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1 - 2a$ și înlocuind, obținem: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2a - 1 + a - 3b = 3a - 3b - 1$. Deci $3a - 3b - 1 = 8$, de unde $a - b = 3$. Restul împărțirii polinomului $f(X-1)$ la $X+1$ este egal cu valoarea lui $f(X-1)$ în $x = -1$, deci $f(-2) = -4$. Obținem: $-2a + b = 0$ și apoi $a = -3, b = -6$. Rezolvăm ecuația $x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$ și obținem soluțiile $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

5) Fie ecuația $x^3+x+m=0,\ m\in\mathbb{R}$. Determinați m astfel încât $x_1^5+x_2^5+x_3^5=10$, unde x_1,x_2,x_3 sunt soluțiile ecuației.

Soluție. Avem relațiile: $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=0$; $ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d=0$; $ax_3^3+bx_2^2+cx_3+d=0$. Înmulțindu-le cu x_1^n, x_2^n și respectiv x_3^n, obținem: $ax_1^{n+3}+bx_1^{n+2}+cx_1^{n+1}+dx_1^n=0$; $ax_2^{n+3}+bx_2^{n+2}+cx_2^{n+1}+dx_2^n=0$; $ax_3^{n+3}+bx_3^{n+2}+cx_3^{n+1}+dx_3^n=0$.

Prin adunare rezultă relația: $aS_{n+3}+bS_{n+2}+cS_{n+1}+dS_n=0$ (1), unde $S_n={x_1}^n+{x_2}^n+{x_3}^n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ și $S_0=3$.

Fie acum ecuația $x^3+x+m=0$. Relația (1) se scrie: $S_{n+3}+S_{n+1}+mS_n=0,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Din n = 2 rezultă $S_5=-S_3-mS_2$ iar din n = 0 rezultă $S_3=-S_1-mS_0=-3m$; $S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2$. Obținem $S_5=5m$ și m = 2.

Rădăcini complexe ale polinoamelor având coeficienții reali

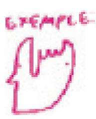
Fie $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$, $a_n \neq 0$, $n > 0$ un polinom cu coeficienți reali. Dacă $z\in\mathbb{C}$, $z = a + bi$, cu $a, b\in\mathbb{R}$, $b \neq 0$ este o rădăcină a lui f, atunci:

$$0=\overline{0}=\overline{a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0}=a_n\overline{z}^n+\ldots+a_1\overline{z}+a_0=f(\overline{z}),$$

deci și $\overline{z}=a-bi$ este rădăcină a lui f. Cum $b \neq 0$, avem $\overline{z}\neq z$, deci f se divide prin

$$(X-z)(X-\overline{z})=X^2-2aX+a^2+b^2\in\mathbb{R}[X].$$

Așadar $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)q(x)$ cu $q(x)\in\mathbb{R}[X]$. Rezultă că problema determinării rădăcinilor polinomului f de grad n, $n > 1$ având coeficienții reali se reduce la o problemă mai simplă a determinării rădăcinilor polinomului q de grad $n - 2$ cu coeficienți reali.



1) Fie $f\in\mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ și rădăcinile lui f știind că una dintre ele este $z = 1 + i$.

Soluție. Polinomul f admite și rădăcina $\overline{z}=1-i$ și deci se divide prin $(X-z)(X-\overline{z})=X^2-2X+2$.

Efectuând împărțirea lui f prin $X^2 - 2X + 2$ se obține câtul $q = X^2 + 4X + 9$ și restul $r = (a + 10)X + b - 18$. Cum $r = 0$, rezultă că $a = -10$ și $b = 18$ și

$$f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 4X + 9)$$

Rădăcinile polinomului $q = X^2 + 4X + 9$ sunt $-2+i\sqrt{5}$ și $-2-i\sqrt{5}$, deci rădăcinile lui f sunt $1 + i$, $1 - i$, $-2+i\sqrt{5}$ și $-2-i\sqrt{5}$.

2) Fie polinomul $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X\in\mathbb{R}[X]$, $n\in\mathbb{N}$. Să se arate că f se divide prin $X^2 + 1$.

Soluție. Avem $f(i) = (i^2 + i + 1)^{4n+1} - i = i^{4n+1} - i = i - i = 0$. Așadar f admite rădăcina $z = i$. Cum f are coeficienții reali, f admite și rădăcina $\overline{z}=-i$, deci se divide prin $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

20) Fie polinomul $f = X^4 - 7X^3 + 19X^2 - mX + n$, $f\in\mathbb{R}[X]$. Determinați numerele reale m și n știind că polinomul f admite rădăcina $2 + i$.

21) Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$, $f\in\mathbb{R}[X]$. Determinați numerele reale a și b știind că f admite rădăcina $1 + i$.

22) Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX + c$. Determinați numerele reale a, b și c știind că f admite rădăcina $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ și că între rădăcinile lui f există relația $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=5$.

23) Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$. Să se determine rădăcinile polinomului f dacă se divide cu $X - 1$.

24) Fie polinoamele $f, g\in\mathbb{R}[X]$, $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $g = (X - 1)^2$. Să se arate că polinomul f se divide prin g. Să se afle rădăcinile polinomului f pentru n = 3.

Indicație. $f=(X-1)^2(nX^{n-1}+\ldots+3X^2+2X+1)$.

Rădăcini ale polinoamelor având coeficienți raționali

Dacă $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$ și d nu se divide prin pătratul unui număr prim, atunci un număr u real de forma $u = a + b\sqrt{d}$ cu $a, b \in \mathbb{Q}$ se numește *număr pătratic*.

Astfel numerele: $2 - 3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2} + \sqrt{6}$, $-\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$ sunt numere pătratice. Dacă $u = a + b\sqrt{d}$ și $u' = a' + b'\sqrt{d}$ se verifică ușor că $u = u' \Leftrightarrow a = a'$ și $b = b'$, cu un raționament asemănător celui prin care se arată că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dacă $u = a + b\sqrt{d}$ este un număr pătratic atunci $u^* = a - b\sqrt{d}$ se numește *conjugatul lui u*. Astfel $(1 + 3\sqrt{2})^* = 1 - 3\sqrt{2}$, $\left(2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^* = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{5}$. Ca și în cazul numerelor complexe, operația de conjugare a numerelor pătratice are proprietățile:

(a) $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(uv)^* = u^* v^*$

(b) $(u^*)^* = u$

(c) $u^* = u \Leftrightarrow u \in \mathbb{Q}$,

oricare ar fi numerele pătratice u și v. În plus, $(u^n)^* = (u^*)^n$, oricare ar fi numărul pătratic u.

Teorema 4. Fie $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$, $a_n \neq 0$, $n > 1$ și $u = a + b\sqrt{d}$ un număr pătratic.

(1) Dacă $f(u) = 0$, atunci $f(u^*) = 0$.

(2) Dacă $f(u) = 0$ și $b \neq 0$, atunci polinomul f se divide prin $(X - u)(X - u^*) = X^2 - (u + u^*)X + uu^* = X^2 - 2aX + a^2 - db^2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Demonstrație

(1) Avem $0 = 0^* = (a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0)^* =$
$= a_n (u^*)^n + a_{n-1} (u^*)^{n-1} + \ldots + a_1 u^* + a_0 = f(u^*)$.

(2) Evident. ■

EXEMPLE

1) Determinați rădăcinile polinomului $f = X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 12 \in \mathbb{Q}[X]$, știind că una dintre rădăcinile sale este $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

Soluție. Polinomul f admite și rădăcina $x_2 = x_1^* = 1 - \sqrt{3}$ și deci se divide prin polinomul $(X - x_1)(X - x_2) = X^2 - 2X - 2$.

Efectuând împărțirea lui f prin $X^2 - 2X - 2$ se obține câtul $q(X) = X^2 - 2X - 6$. Așadar $f(X) = (X^2 - 2X - 2)(X^2 - 2X - 6)$.

Cum rădăcinile polinomului $X^2 - 2X - 6$ sunt $1 + \sqrt{7}$ și $1 - \sqrt{7}$, rezultă că rădăcinile lui f sunt: $1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{7}$ și $1 - \sqrt{7}$.

2) Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$ și rădăcinile polinomului $f = X^4 + aX^3 - X^2 - 2X + b \in \mathbb{Q}[X]$ știind că f admite rădăcina $u = 2 + \sqrt{2}$.

25) Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^5 - 3X^4 - 19X^3 + 91X^2 - 80X - 50$. Determinați toate rădăcinile polinomului f știind că $3 + i$ și $1 - \sqrt{2}$ sunt rădăcini ale lui f.

26) Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 2X^3 - 3X^2 - 6X - 18$, știind că una dintre rădăcini este $x_1 = 1 - \sqrt{7}$.

27) Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$ și rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 10X^3 + aX^2 - 34X + b$, știind că una dintre rădăcini este $x_1 = 3 + \sqrt{5}$.

28) Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^4 - X^3 + 39X^2 + 18X + 54$.

a) Știind că $x_1 = 3\sqrt{2}$ este o rădăcină a polinomului f, determinați încă o rădăcină a lui f.

b) Calculați $(X - 3\sqrt{2})(X + 3\sqrt{2})$.

c) Arătați că f se divide cu polinomul $X^2 - 18$.

d) Calculați câtul împărțirii polinomului f la $X^2 - 18$.

e) Determinați toate cele patru rădăcini ale lui f.

29) Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 1$.

a) Știind că $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ este o rădăcină a polinomului f, determinați încă o rădăcină a lui f.

b) Calculați $(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2})$.

c) Arătați că f se divide cu polinomul $X^2 - (1 - \sqrt{2})^2$.

d) Calculați câtul împărțirii polinomului f la $X^2 - (1 - \sqrt{2})^2$.

e) Determinați toate cele cinci rădăcini ale lui f.

Soluție. Polinomul f se divide prin
$(X-u)(X-u^*) = X^2-(u+u^*)X+uu^* = X^2-4X+2$.

Împărțirea euclidiană a lui f prin $X^2 - 4X + 2$ dă câtul $q = X^2 + (a + 4)X + 4a + 13$ și restul $r = 14(a + 3)X + b - 8a - 26$. Cum $r = 0$, rezultă $a = -3$ și $b = 2$, deci

$f = (X^2 - 4X + 2)(X^2 + X + 1)$

Rădăcinile lui f sunt $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

30) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(X) = X^6 - 7X^5 + 14X^4 + 17X^3 + 15X^2 - 6X - 10$.
a) Știind că f are rădăcina $x_1 = 3 + i$, determinați încă o rădăcină x_2 a lui f.
b) Știind că f mai are o rădăcină $x_3 = 1-\sqrt{2}$, determinați încă o rădăcină x_4 a lui f.
c) Determinați toate rădăcinile lui f.

Rădăcini raționale ale polinoamelor având coeficienți întregi

Așa cum s-a mai observat, determinarea rădăcinilor unui polinom având coeficienții numerici este de regulă o problemă complicată atunci când gradul acestuia este mare. Un caz favorabil este atunci când avem informații suplimentare asupra rădăcinilor, altele decât cele date de relațiile lui Viète.

Când polinomul are coeficienții întregi, putem delimita o mulțime finită de numere raționale printre care se află cu siguranță eventuale rădăcini raționale și, în particular, rădăcinile întregi ale polinomului dat.

Avem:

Teorema 5. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_nX^n + \dots a_1X + a_0$, $a_n \neq 0$, $n > 0$ un polinom având coeficienții întregi și $r = \frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ un număr rațional dat sub formă de fracție ireductibilă. Avem:
(1) Dacă r este rădăcină a lui f, atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.
(2) Dacă a este o rădăcină întreagă a lui f, atunci $a \mid a_0$.
(3) Dacă $a_n = \pm 1$, atunci orice rădăcină rațională a lui f este întreagă.

Demonstrație. Reamintim că două numere întregi p și q sunt *prime între ele* dacă c.m.m.d.c. $(p, q) = 1$ și în acest caz spunem că fracția $\frac{p}{q}$ este *ireductibilă*, ceea ce revine la faptul că p și q nu admit un divizor comun d astfel încât $|d| > 1$.

Se știe că pentru $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avem următoarele proprietăți:
(α) dacă a este prim cu b și cu c, atunci a este prim și cu bc.
β) dacă $a \mid bc$ și a este prim cu b, atunci $a \mid c$.

Să demonstrăm acum afirmațiile din enunțul teoremei.

(1) Cum $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, avem $a_n\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\dots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$ și înmulțind cu q^n obținem:
$a_0q^n = -p(a_np^{n-1}+\dots+a_1q^{n-1})$ și $a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_0q^{n-1})$.

Rezultă că $p \mid a_0q^n$ și $q \mid a_np^n$. Cum p este prim cu q rezultă că p este prim cu q^n și q este prim cu p^n, deci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

(2) $a = \frac{a}{1}$ și cum fracția $\frac{a}{1}$ este ireductibilă se aplică rezultatul de la (1).

(3) Cum $a_n = \pm 1$ și $q \mid a_n$, rezultă că $r \in \mathbb{Z}$. ■

31) Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$,
$f = 12X^4 - 28X^3 + 5X^2 + 7X - 2$.
a) Scrieți divizorii întregi ai lui -2.
b) Scrieți divizorii întregi ai lui 12.
c) Determinați mulțimea numerelor care pot fi rădăcini raționale ale lui f.
d) Calculați $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(1)$, $f(-1)$.
e) Determinați rădăcinile raționale ale lui f.

32) Determinați rădăcinile raționale ale polinomului $f \in \mathbb{Z}[X]$,
$f = 2X^4 + 3X^2 + 6X - 4$.

33) Determinați rădăcinile raționale ale polinomului $f \in \mathbb{Z}[X]$,
$f = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 5X + 6$.

34) Determinați rădăcinile raționale ale fiecăruia dintre polinoamele următoare:
a) $f = X^4 - X^3 - 12X^2 + 6X + 36$;
b) $f = 12X^3 + 8X^2 - X - 1$
c) $f = X^5 + X^4 - 5X^3 - X^2 + 8X - 4$.

35) Determinați rădăcinile următoarelor polinoame știind că ele admit rădăcini raționale:
a) $f = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 8X + 4$;
b) $f = 6X^4 - 17X^3 - X^2 + 8X - 2$;
c) $f = X^3 + 3X - 14$;
d) $f = X^5 + 7X^4 + 18X^3 + 22X^2 + 13X + 3$;
e) $f = 10X^4 - 13X^3 + 15X^2 - 18X - 24$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați rădăcinile raționale ale polinomului
$f = 2X^3 + 3X^2 + 6X - 4 \in \mathbb{Z}[X]$.

Determinați apoi toate rădăcinile lui f.

Soluție. Avem $n = 3$, $a_n = 2$ și $a_0 = -4$. Divizorii întregi ai lui a_n sunt 1, –1, 2, –2, iar cei ai lu a_0 sunt 1, –1, 2, –2, 4, –4. Fracțiile ireductibile $\frac{p}{q}$ cu $q \mid 2$ și $p \mid -4$ sunt: –4, –2, –1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4.

Eventualele rădăcini raționale ale polinomului f sunt printre numerele din lista precedentă.

Cum

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	-108	-20	-9	$-\frac{13}{2}$	0	7	36	196

rezultă că singura rădăcină rațională a lui f este $r = \frac{1}{2}$.

Împărțind pe f prin $X - \frac{1}{2}$ găsim $f = \left(X - \frac{1}{2}\right)(2X^2 + 4X + 8)$.

Cum rădăcinile polinomului $2X^2 + 4X + 8$ sunt $-1 + i\sqrt{3}$ și $-1 - i\sqrt{3}$ rezultă că rădăcinile lui f sunt $\frac{1}{2}, -1 + i\sqrt{3}$ și $-1 - i\sqrt{3}$.

2) Determinați rădăcinile raționale ale polinomului $f = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 5X + 6 \in \mathbb{Z}[X]$.

Soluție. Cum $a_5 = 1$, rădăcinile raționale ale lui f sunt întregi și sunt divizori ai lui $a_0 = 6$, adică printre numerele $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Evaluând polinomul f pentru fiecare divizor al lui 6 se constată că:

$f(-6) \neq 0$, $f(-3) \neq 0$, $f(-2) = 0$, $f(-1) \neq 0$, $f(1) = 0$, $f(2) \neq 0$, $f(3) = 0$ și $f(6) \neq 0$.

Rezultă că rădăcinile raționale ale lui f sunt –2, 1 și 3.

3) Arătați că polinomul $f = X^3 + pX^2 + pX + p$, unde p este un număr întreg prim, $p \geqslant 2$, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienți raționali.

Soluție. Presupunem contrariul. Din grad $f = 3$ rezultă $f = g \cdot h$, unde grad $g = 1$ și grad $h = 2$. Deoarece $g \in \mathbb{Q}[X]$ are grad 1, rezultă că g are o rădăcină rațională x_0. Atunci $f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) = 0$, deci f admite rădăcina rațională x_0. Rezultă $x_0 \in \{\pm1, \pm p\}$. Însă: $f(1) = 3p + 1 \neq 0$; $f(-1) = p - 1 \neq 0$; $f(p) = 2p^3 + p^2 + p \neq 0$ și $f(-p) = -p^2 + p \neq 0$. Deducem că f nu poate fi descompus în produsul a două polinoame cu coeficienți raționali.

● **1.** Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = 2$ a polinomului $f = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$.

● **2.** Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = -2$ a polinomului $f = X^5 + 7X^4 + 17X^3 + 8X^2 - 16X - 8$.

● **3.** Determinați λ astfel încât polinomul $f = X^5 + \lambda X^2 + \lambda X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ să admită rădăcina $\alpha = -1$. Determinați apoi ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = -1$.

● **4.** Determinați rădăcinile polinoamelor $X^3 - 8$, $X^6 - 1$ și $X^4 + i$ din $\mathbb{C}[X]$ și precizați care sunt descompunerile în factori liniari din $\mathbb{C}[X]$ ale acestor polinoame.

● **5.** Determinați a și b astfel încât polinomul $f = aX^4 + bX^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ să admită pe $\alpha = 1$ ca rădăcină multiplă și precizați care este descompunerea lui f în factori liniari în acest caz.

●● **6.** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea verifică relația indicată între rădăcini:

a) $f = 3X^3 + 7X^2 - 18X + 8$, $x_1 + x_2 = -3$;

b) $f = X^3 - 13X + 12$, $x_1 - x_2 = 2$;

c) $f = X^4 - (4 + 5i)X^3 - 4(3 - 5i)X^2 + 6(4 + 5i)X + 36$, $x_1x_2 = x_3x_4$;

d) $f = X^3 - 12X^2 + aX + 60$, $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

● **7.** Determinați rădăcinile polinomului $f = X^5 - 5X^4 - 5X^3 + 25X^2 + 4X - 20 \in \mathbb{C}[X]$ știind că $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$.

● **8.** Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = 2X^3 + 2X^2 - 3X - 1$. Determinați un polinom g ale cărui rădăcini sunt $\frac{x_2 + x_3}{x_1}, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, \frac{x_1 + x_2}{x_3}$.

9. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 5X + 2$. Calculați $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

10. Fie $f = 2X^3 - 12X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$. Determinați rădăcinile lui f știind că acestea formează o progresie aritmetică.

11. Fie $f = 2X^3 - 7X^2 + 7X + a \in \mathbb{C}[X]$. Determinați rădăcinile lui f știind că acestea formează o progresie geometrică.

12. Fie $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Determinați a și b știind că trei dintre rădăcinile lui f sunt în progresie aritmetică și a patra este egală cu suma celorlalte.

13. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului $f = X^3 + pX + q$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ fie $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

a) Calculați S_n pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b) Arătați că $S_n \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

14. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului $f = X^3 - X - a$, $a \in \mathbb{R}$ și $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că $S_n \in \mathbb{R}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_6 \geqslant S_5$.

15. Fie $f = X^4 + (a+1)X^3 + \left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right)X^2 + 2X - 5$, $a \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f. Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

16. Fie $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + (-1)^n \in \mathbb{C}$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

Dacă $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n|$, atunci $f(-1) \in \mathbb{R}$.

17. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ dacă admite rădăcina indicată în fiecare caz:

a) $f = X^4 - 7X^3 + 19X^2 - 23X + 10$, $x_1 = 2 + i$;

b) $f = X^4 - 2X^3 - X - 2$, $x_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

18. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ și rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ știind că admite rădăcina indicată în fiecare caz:

a) $f = X^4 + aX^3 + 49X^2 + bX + 78$, $x_1 = 3 + 2i$

b) $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - X + 1$, $x_1 = i$.

19. Determinați un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad minim știind că admite rădăcina dublă -1 și rădăcina simplă i.

20. Determinați un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad minim știind că admite rădăcina dublă $1 + i\sqrt{2}$.

21. Fie polinomul $f = (X - 1)^m - (X + 1)^n \in \mathbb{R}[X]$. Arătați că polinomul f se divide prin $X^2 + X + 1$ dacă și numai dacă $m - n$ se divide prin 6.

22. Găsiți descompunerile în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$ ale polinoamelor $f = X^3 - 2$ și $g = X^4 + 1$.

23. Arătați că polinomul $f = (X + 1)^{n+3} + X^{2n+3}$ $f \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $X^2 - X + 1$.

24. Pentru care valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ polinomul $f = (X - 1)^n + X^n + 1 \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $X^2 - X + 1$?

25. Arătați că polinomul $f = (X + 1)^7 - X^7 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $X^2 + X + 1$ și descompuneți pe f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$.

26. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$ știind că una dintre ele este cea indicată:

a) $f = X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 12$, $x_1 = 1 + \sqrt{3}$;

b) $f = X^4 - 2X^3 - 3X^2 - 6X - 18$, $x_1 = 1 - \sqrt{7}$;

c) $f = X^4 - 2X^3 - 25X^2 + aX + b$, $x_1 = 4 - \sqrt{2}$;

d) $f = X^4 - 10X^3 + aX^2 - 34X + b$, $x_1 = 3 - \sqrt{5}$.

27. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și rădăcinile polinomului $f = X^4 - 10X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$ știind că restul împărțirii lui f la $X - 1$ este egal cu 3 și că polinomul f admite rădăcina $x_1 = -1 + \sqrt{2}$.

28. Determinați rădăcinile raționale ale polinoamelor

a) $f = 4X^4 - 7X^2 - 5X - 1$

b) $g = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 12X + 9$.

29. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(0)$ și $f(1)$ sunt numere impare. Arătați că $f(a) \neq 0$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

30. Arătați că polinomul $X^3 - 2$ nu are rădăcini raționale. Deduceți că polinomul $X^3 - 2$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

31. Găsiți un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f \neq 0$ care să admită ca rădăcină numărul $\alpha = 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$.

32. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f \neq 0$. Dacă f admite o rădăcină în $\mathbb{Z}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $f(0)f(1)f(2) \ldots f(n)$ se divide prin $(n + 1)!$

33. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f \neq 0$ un polinom de grad par. Dacă toți coeficienții lui f sunt impari, atunci f nu are rădăcini raționale.

34. Fie $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, $h = fg$. Dacă toți coeficienții lui h se divid prin 2, atunci unul dintre polinoamele f sau g are toți coeficienții divizibili cu 2.

Arătați că proprietatea rămâne adevărată dacă înlocuiți pe 2 cu un număr prim p oarecare.

Ecuații algebrice având coeficienți numerici (în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$)

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + a^{n-1} X_{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ cu $a_n \neq 0$ și $n > 0$ un polinom cu coeficienți complecși. Egalitatea $\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,\ x \in \mathbb{C}}$ se numește *ecuație algebrică* (având coeficienți numerici) în *necunoscuta* x, asociată polinomului f.

Gradul ecuației algebrice este prin definiție gradul polinomului asociat f, iar *soluțiile* ecuației algebrice sunt rădăcinile (din $\mathbb{C}$) ale polinomului f. O soluție $\alpha \in \mathbb{C}$ a ecuației algebrice se numește *simplă* (*dublă*, *triplă*, ...) dacă α este rădăcină simplă (respectiv dublă, triplă, ...) a polinomului asociat f.

Ca o consecință a teoremei fundamentale a algebrei (teorema d'Alembert-Gauss) orice ecuație algebrică de grad n având coeficienți numerici admite n soluții complexe $x_1, x_2, ..., x_n$, nu neapărat distincte.

Determinarea efectivă a soluțiilor unei ecuații algebrice este o problemă dificilă și adesea imposibilă când gradul acesteia este mare. Pentru unele tipuri particulare de ecuații algebrice avem o descriere satisfăcătoare a soluțiilor. Este în primul rând cazul ecuațiilor algebrice de forma:

$$\boxed{x^n - a = 0 \text{ cu } a \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \text{ și } n \in \mathbb{N}^*,}$$

numite *ecuații binome*. Vom arăta că o asemenea ecuație admite n soluții distincte, anume

$$x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ 0 \leqslant k < n,$$

unde $r = |a| \in \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ și $\theta = \arg z \in [0, 2\pi)$. Soluțiile ecuațiilor binome de grad n, $x^n - a = 0$, $a \in \mathbb{C}$ se numesc *radicali* de ordin n din a sau *rădăcini de ordin* n ale numărului complex a.

Un rezultat clasic stabilește că orice ecuație algebrică de grad $n \leqslant 4$ are soluții exprimabile prin radicali, în funcție de coeficienții acesteia. În cazul ecuațiilor de gradul al doilea

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0,}$$

acest rezultat se stabilește cu mijloace elementare, soluțiile fiind de forma

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Un rezultat cunoscut sub numele de teorema Abel-Ruffini stabilește că ecuația algebrică generală de grad $n > 4$ nu are soluții exprimabile prin radicali.

În acest paragraf vom studia câteva tipuri particulare de ecuații algebrice (*ecuații binome*, *ecuații de gradul al II-lea*, *ecuații bipătrate*, *ecuații reciproce*) ale căror soluții pot fi efectiv determinate și sunt exprimabile prin radicali.

Ecuații binome

Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci există un unic număr real $b > 0$ astfel încât $b^n = a$; numărul b se numește *radicalul aritmetic* de ordin n al lui a și se notează cu $\sqrt[n]{a}$. Pe baza acestui rezultat se poate stabili numărul soluțiilor reale ale ecuației,

(1) $\boxed{x^n - a = 0 \text{ cu } n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$ numită *ecuație binomă* de grad n cu coeficienți reali.

Avem:

Cazul n par. Dacă $a > 0$ ecuația (1) are două soluții reale, anume $\sqrt[n]{a} > 0$ și $-\sqrt[n]{a} < 0$, iar dacă $a < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții reale.

Cazul n impar. Ecuația (1) are o singură soluție reală, anume $\sqrt[n]{a} > 0$ când $a > 0$ și $-\sqrt[n]{-a} < 0$ când $a < 0$.

Când $a = 0$, ecuația are soluție unică $x = 0$.

1) a) Arătați că $1 = 1\,(\cos 0 + i \sin 0)$.
b) Fie $a = 1$. Calculați rădăcinile de ordinul al treilea din a, adică $z_k = \sqrt[3]{1}$, $k = \overline{0,2}$, utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$, pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^3 - 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 - 1 = 0$.

1) Ecuația $x^4 - 2 = 0$ are două *soluții* reale și anume $\sqrt[4]{2}$ și $-\sqrt[4]{2}$.

2) Ecuația $x^2 + 5 = 0$ nu are *soluții* reale.

3) Ecuația $x^3 - 27 = 0$ are o unică soluție reală și anume $\sqrt[3]{27} = 3$.

4) Ecuația $x^3 + 8 = 0$ are o unică soluție reală și anume $-\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8} = -2$

Vom studia în continuare ecuațiile de forma

(2) $\boxed{x^n - a = 0 \text{ cu } n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{C},\ a \neq 0,}$ numite *ecuații binome* de grad n cu coeficienți complecși. Vom arăta că ecuația (2) admite n soluții distincte în $\mathbb{C}$ și că acestea pot fi descrise cu ajutorul *modulului* $r = |a| = \sqrt{a\bar{a}}$ și a *argumentului redus* $\varphi = \arg a$ al numărului complex a.

Examinăm mai întâi cazul $a = 1$, adică stabilim soluțiile $z \in \mathbb{C}$ ale ecuației

(3) $\boxed{x^n - 1 = 0, \text{ cu } n \in \mathbb{N}^*}$

Fie $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ și $\varphi = \arg z$ deci $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dacă z este soluție a ecuației binome (3) atunci $z^n = 1$ și $z \neq 0$. Rezultă că $1 = |1| = |z^n| = |z|^n$ și cum $|z| \in \mathbb{R}, |z| > 0$, avem $|z| = 1$, deci $r = 1$ și $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Folosind formula lui Moivre, egalitatea $z^n = 1$ se mai scrie

(4) $\cos n\varphi + i\sin n\varphi = 1 = 1 + 0\cdot i$.

Din (4) rezultă că $\sin n\varphi = 0$ și $\cos n\varphi = 1$, deci $\varphi = \dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$$

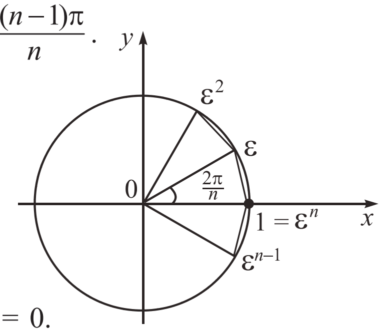
Rezultă că soluțiile din $\mathbb{C}$ ale ecuației $x^n - 1 = 0$ sunt numerele complexe.

(5) $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$.

Dintre numerele z_k, $k \in \mathbb{Z}$ exact n sunt distincte. Într-adevăr, fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Avem $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n} = \varepsilon^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Numerele complexe

(6) $1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ au modulul egal cu 1 și argumentele reduse respectiv $0, \dfrac{2\pi}{n}, \dfrac{4\pi}{n}, ..., \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.



Rezultă că numerele de la (5) sunt afixele vârfurilor unui poligon regulat cu n laturi, raportat la un reper cartezian xOy ca în figura alăturată. Acum este clar că $1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ sunt n soluții distincte ale ecuației binome $x^n - 1 = 0$.

2) a) Arătați că $-1 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$.
b) Fie $a = -1$. Calculați rădăcinile de ordinul al treilea din a, adică $z_k = \sqrt[3]{-1},\ k = \overline{0,2}$, utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$, pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $X^3 + 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $X^3 + 1 = 0$.

3) a) Arătați că $1 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$.
b) Fie $a = 1$. Calculați rădăcinile de ordinul al patrulea din a, adică $z_k = \sqrt[4]{1},\ k = \overline{0,3}$, utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$, pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $X^4 - 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $X^4 - 1 = 0$.

4) a) Arătați că $-1 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$.
b) Fie $a = -1$. Calculați rădăcinile de ordinul al patrulea din a, adică $z_k = \sqrt[4]{-1},\ k = \overline{0,3}$, utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$, pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $X^4 + 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $X^4 + 1 = 0$.

5) a) Arătați că $1 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$.
b) Fie $a = 1$. Calculați rădăcinile de ordinul al cincilea din a, adică $z_k = \sqrt[5]{1},\ k = \overline{0,4}$, utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$, pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $X^5 - 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $X^5 - 1 = 0$.

Fie acum $z \in \mathbb{C}$ o soluție a ecuației binome $x^n - 1 = 0$.

Conform analizei de mai sus, există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $z = z_k$. Fie $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k = nq + r$ cu $0 \leqslant r < n$. Cum $\varepsilon^n = 1$ avem $z = \varepsilon^k = (\varepsilon^n)^q \cdot \varepsilon^r = \varepsilon^r$ cu $0 \leqslant r < n$.

Rezultă că sunt exact n soluții ale ecuației $x^n - 1 = 0$, numite *rădăcinile de ordin n ale unității*, anume $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. Notăm cu U_n mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale unității $U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$.

EXEMPLE

1) Să determinăm rădăcinile de ordinul al 3-lea ale unității numite *rădăcinile cubice* ale unității. Avem:

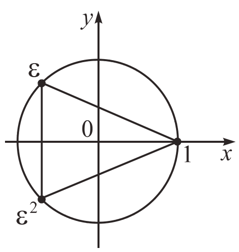
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ \text{de unde } U_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

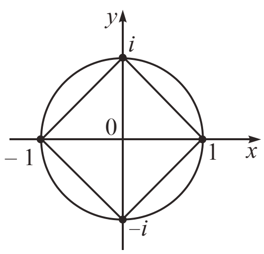
2) Rădăcinile de ordinul al 4-lea ale unității sunt $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i$, deci $U_4 = \{1, i, i^2, i^3\} = \{1, i, -1, -i\}$.

3) Să determinăm soluțiile complexe ale ecuației $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Cum $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ și 1 nu este soluție a ecuației date, rezultă că soluțiile căutate sunt $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ și ε^4, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

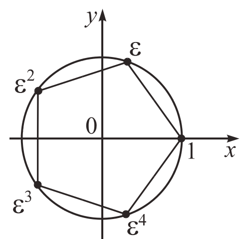
Să observăm că rădăcinile de ordinul al 3-lea, al 4-lea, al 5-lea ale unității sunt respectiv afixele vârfurilor triunghiului echilateral, pătratului și pentagonului regulat înscrise în cercul trigonometric ca în figura alăturată.



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

Să examinăm acum cazul general pentru o ecuație binomă:

(7) $\boxed{x^n - a = 0,\ a \in \mathbb{C},\ a \neq 0.}$

Fie $r = |a|$ și $\varphi = \arg a$. Avem $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Fie $z = \rho\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, unde $\rho = \sqrt[n]{r}$.

Avem $z^n = \rho^n\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a$, deci z este soluție a ecuației binome (7) și evident $z \neq 0$.

6) a) Arătați că $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.
b) Fie $a = -1$. Calculați rădăcinile de ordinul al cincilea din a, adică $z_k = \sqrt[5]{-1}, k = \overline{0,4}$ utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$, pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^5 + 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^5 + 1 = 0$.

7) Rezolvați în $\mathbb{C}$, fiecare dintre ecuațiile:
a) $x^3 - 1 = 0$;
b) $x^4 - 1 = 0$;
c) $x^5 - 1 = 0$;
d) $x^6 - 1 = 0$.

8) Formați ecuația care are următoarele soluții:
a) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$;
b) $x_1 = 1, x_2 = -1,\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$,
$x_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

9) a) Arătați că $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$
b) Fie $a = -64$. Calculați rădăcinile de ordinul al șaselea din a adică $z_k = \sqrt[6]{a}$, $k = \overline{0,5}$ utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$ pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^6 + 64 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^6 + 64 = 0$.

10) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^6 - 64 = 0$.

11) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^6 - 64 = 0$.

Dacă $1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ sunt rădăcinile de ordin n ale unității, atunci numerele complexe

(8) $z, z\varepsilon, z\varepsilon^2, ..., z\varepsilon^{n-1}$ sunt distincte. Cum $(z\varepsilon^k)^n = z^n(\varepsilon^n)^k = a$, $0 \leqslant k < n$ rezultă că numerele de la (8) sunt n soluții distincte ale ecuației binome $x^n - a = 0$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Dacă $z' \in \mathbb{C}$ este o soluție a ecuației $x^n - a = 0$ și $z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ atunci $\left(\frac{z'}{z}\right)^n = \frac{z'^n}{z^n} = \frac{a}{a} = 1$, deci $\frac{z'}{z} \in U_n = \{1, \varepsilon, ..., \varepsilon^{n-1}\}$. Rezultă că $z' = z\varepsilon^k$, $0 \leqslant k < n$. Așadar, dacă $z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, unde $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, atunci soluțiile ecuației binome, $x^n - a = 0$ sunt numerele complexe $z, z\varepsilon, z\varepsilon^2, ..., z\varepsilon^{n-1}$ cu $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Altfel formulat, *soluțiile ecuației binome $x^n - a = 0$ se obțin înmulțind rădăcinile de ordin n ale unității* cu *o soluție particulară* z, de exemplu $z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, unde $r = |a|$ și $\varphi = \arg a$.

EXEMPLE

1) Soluțiile ecuației binome $x^3 - 2 = 0$ sunt

$$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Într-adevăr, în acest caz $|a| = |2| = 2$, $\arg a = 0$, $a = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$ și deci $z = \sqrt[3]{2}\varepsilon^k$, $0 \leqslant k < 3$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

2) Soluțiile ecuației binome $x^4 + 1 = 0$ sunt

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Într-adevăr $a = -1$, $r = |-1| = 1$, $\arg a = \arg(-1) = \pi$ și deci soluțiile ecuației $x^4 + 1 = 0$ se obțin înmulțind $z = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ cu rădăcinile de ordinul al 4-lea ale unității $1, i, -1, -i$.

3) Soluțiile ecuației $x^4 - i = 0$ se determină înmulțind rădăcinile de ordinul al 4-lea ale unității cu $z = \sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{4} + i\sin\frac{\varphi}{4}\right)$, unde $r = |i| = 1$ și $\varphi = \arg i = \frac{\pi}{2}$. Așadar $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ și soluțiile ecuației binome date sunt $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $-\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$, $-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$.

12) a) Arătați că $-81 = 81(\cos\pi + i\sin\pi)$

b) Fie $a = -81$. Calculați rădăcinile de ordinul al patrulea din a, adică $z_k = \sqrt[4]{a}$, $k = \overline{0,3}$, utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$ pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 + 81 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^4 + 81 = 0$.

13) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 - 81 = 0$.

14) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^4 - 81 = 0$.

15) a) Arătați că $-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$

b) Fie $a = -32$. Calculați rădăcinile de ordinul al cincilea din a adică $z_k = \sqrt[5]{a}$, $k = \overline{0,4}$ utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$ pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^5 + 32 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^5 + 32 = 0$.

16) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^5 - 32 = 0$

17) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^5 - 32 = 0$

18) a) Arătați că $-625 = 625(\cos\pi + i\sin\pi)$.

b) Fie $a = -625$. Calculați rădăcinile de ordinul al patrulea din a, adică $z_k = \sqrt[4]{a}$, $k = \overline{0,3}$, utilizând formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = \overline{0, n-1}$ pentru $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 + 625 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^4 + 625 = 0$.

Ecuații de gradul al II-lea având coeficienții complecși

Să considerăm o ecuație de gradul al II-lea având coeficienți complecși

(9) $\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0.}$

Pentru orice număr $z \in \mathbb{C}$ putem scrie:

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Numărul $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ se numește *discriminantul* ecuației (9). Fie $\delta \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordinul al 2-lea a numărului complex Δ. Se mai folosește notația $\delta = \sqrt{\Delta}$, chiar dacă în cazul $\Delta \neq 0$ există două rădăcini distincte de ordinul al 2-lea ale lui Δ. Așadar avem $\delta^2 = \Delta$ și putem scrie $az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) =$

$= a\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right)$ și deci numărul $z \in \mathbb{C}$ este soluție a ecuației (9) dacă și numai dacă $z = \frac{-b + \delta}{2a}$, adică $z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sau, $z = \frac{-b - \delta}{2a}$, adică $z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

19) Fie ecuația de gradul al doilea: $x^2 - 8x - 3ix + 13 + 13i = 0$

a) Arătați că $\Delta = 3 - 4i$.

b) Determinați numerele reale u și v astfel încât $\sqrt{3 - 4i} = u + vi$

c) Verificați că $\sqrt{3 - 4i} = 2 - i$ și $\sqrt{3 - 4i} = -2 + i$

d) Determinați soluțiile ecuației date.

e) Verificați în două moduri (prin calcul direct și prin relațiile lui Viète) că

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 + 3i \\ x_1x_2 = 13 + 13i \end{cases}.$$

20) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 - (3 + 5i)x - (4 - 3i) = 0$.

Exercițiu rezolvat. Să se determine soluțiile din $\mathbb{C}$ ale ecuației $x^2 - 3ix - 3 + i = 0$.

Soluție. Avem $\Delta = b^2 - 4ac = (-3i)^2 - 4(-3 + i) = 3 - 4i$.

Să determinăm $\delta = u + iv \in \mathbb{C}$ astfel încât $\delta^2 = \Delta = 3 - 4i$. Așadar $(u + iv)^2 = 3 - 4i$, de unde $\begin{cases} u^2 - v^2 = 3 \\ 2uv = -4 \end{cases}$

Avem $u^2 + v^2 = |\delta|^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Din $u^2 - v^2 = 3$ și $u^2 + v^2 = 5$ rezultă $u^2 = 4$ și $v^2 = 1$. Așadar $u = \pm 2$, $v = \pm 1$ și cum $uv = -2 < 0$, una dintre valorile posibile pentru δ este $\delta = 2 - i$, cealaltă valoare fiind $-\delta = -2 + i$. Deci soluțiile din $\mathbb{C}$ ale ecuației propuse sunt $x_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$, adică $x_1 = \frac{3i + 2 - i}{2}$, deci $x_1 = 1 + i$ și $x_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$, adică $x_2 = \frac{3i - 2 + i}{2}$, deci $x_2 = -1 + 2i$.

Ecuații de gradul al II-lea având coeficienții reali

Considerăm cazul în care coeficienții ecuației (9) sunt numere reale. În acest caz discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ este un număr real. Dacă $\Delta \geqslant 0$ și $\delta = \sqrt{\Delta}$ este radicalul aritmetic al lui Δ, ecuația (9) are soluții reale

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dacă $\Delta < 0$, atunci $-\Delta > 0$ și putem lua $\delta = i\sqrt{-\Delta}$. În acest caz soluțiile ecuației (9) sunt numerele complexe conjugate

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

21) Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 + 3x + 3 = 0$

a) Arătați că $\Delta = -3$

b) Arătați că soluțiile ecuației date sunt

$$x_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } x_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Calculați $x_1 + x_2$ și x_1x_2.

d) Arătați că $x^2 + 3x + 3 = (x - x_1)(x - x_2)$.

EXEMPLE

1) Ecuația $3x^2 + 7x - 6 = 0$ are discriminantul $\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$ și $\delta = \sqrt{121} = 11$. Soluțiile ecuației sunt $x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{121}}{6}$, adică $x_1 = \dfrac{2}{3}$ și $x_2 = \dfrac{-7-\sqrt{121}}{6}$, adică $x_2 = -3$.

2) Ecuația $x^2 - 6x + 13 = 0$ are discriminantul $\Delta = 36 - 52 = -16 < 0$ și soluțiile ecuației sunt numerele complexe conjugate.
$x_1 = \dfrac{6+i\sqrt{16}}{2}$, adică $x_1 = 3 + 2i$ și $x_2 = \dfrac{6-i\sqrt{16}}{2}$, adică $x_2 = 3 - 2i$.

Ecuații bipătrate

O ecuație de forma

(10) $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0}$ se numește *ecuație bipătrată*. Pentru rezolvarea unei ecuații bipătrate se face substituția $y = x^2$ și se obține ecuația de gradul al II-lea,

(11) $\boxed{ay^2 + by + c = 0 \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0}$

Dacă y_1 și y_2 sunt soluțiile ecuației (11), x_1, x_2 soluțiile ecuației binome $x^2 - y_1 = 0$, iar x_3, x_4 soluțiile ecuației binome $x^2 - y_2 = 0$, atunci x_1, x_2, x_3, x_4 sunt soluțiile ecuației bipătrate (10). Cum $y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ și $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, atunci soluțiile ecuației bipătrate (10) sunt

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

După cum se observă, soluțiile ecuației bipătrate sunt exprimabile prin radicali (în funcție de coeficienții ecuației).

Observație. Ecuația bipătrată este un caz particular al unei ecuații de forma

(12) $\boxed{ax^{2n} + bx^n + c = 0 \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*.}$

Făcând substituția $y = x^n$ se obține ecuația $ay^2 + by + c = 0$. Dacă y_1, y_2 sunt soluțiile ecuației $ay^2 + by + c = 0$, atunci cele $2n$ soluții ale ecuației (12) sunt soluțiile ecuațiilor binome $x^n - y_1 = 0$ și $x^n - y_2 = 0$.

Exerciții rezolvate.

1) Să rezolvăm ecuația bipătrată $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Soluție. Notăm cu $y = x^2$ și avem ecuația $y^2 - 2y - 3 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 3$ și $y_2 = -1$. Ecuația binomă $x^2 - 3 = 0$ are soluțiile $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, iar ecuația binomă $x^2 + 1 = 0$ are soluțiile $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Rezultă că soluțiile ecuației bipătrate $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ sunt $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i$ și $-i$.

2) Să rezolvăm ecuația bipătrată $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$.

Soluție. Notând $y = x^2$ obținem ecuația $y^2 + 6y + 25 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -3 + 4i$, $y_2 = -3 - 4i$. Pentru a rezolva ecuația binomă $x^2 - (-3 + 4i) = 0$ căutăm pe x sub forma $x = u + iv$ cu $u, v \in \mathbb{R}$. Din $(u + iv)^2 = -3 + 4i$ rezultă $\begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ 2uv = 4 \end{cases}$. Se obțin soluțiile $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ și $u_2 = -1$ și $v_2 = -2$ de unde $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$. Analog se arată că ecuația binomă $x^2 - (3 + 4i) = 0$ are soluțiile $x_3 = 1 - 2i$ și $x_4 = -1 + 2i$.

22) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
a) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
b) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$;
c) $x^2 - 2x + 9 = 0$.

23) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
b) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$;
c) $x^2 - 2x + 9 = 0$.

24) Fie ecuația bipătrată $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$.
a) Rezolvați ecuația $y^2 + 2y - 3 = 0$.
b) Rezolvați ecuația $x^4 = 1$.
c) Rezolvați ecuația $x^4 = -3$, scriind $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.
d) Rezolvați ecuația bipătrată.

25) Fie ecuația bipătrată $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$
a) Rezolvați ecuația $y^2 - 7y + 6 = 0$.
b) Rezolvați ecuația $x^2 = 1$.
c) Rezolvați ecuația $x^2 = 6$.
d) Rezolvați ecuația bipătrată.

26) Să se rezolve ecuația bipătrată:
$x^8 + 5x^4 - 36 = 0$.

27) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ următoarele ecuații bipătrate:
a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;
b) $x^4 - (3 + 5i)x^2 - (4 - 3i) = 0$.
c) $x^4 - a(a + b)x^2 + a^3b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
d) $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 + b^4 = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
e) $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$.
f) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.
g) $x^6 - (1 + i)x^3 + i = 0$.

Ecuații reciproce

Ecuațiile algebrice de forma

(13) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

(14) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

(15) $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,

unde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ se numesc *ecuații reciproce* respectiv de gradul al 3-lea, al 4-lea și al 5-lea.

O ecuație algebrică de grad n,

(16) $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ a_i \in \mathbb{C}, i = \overline{0, n}$.

se numește *ecuație reciprocă* dacă $a_{n-i} = a_i$ pentru $i = \overline{0, n}$ (adică coeficienții egali depărtați de extreme sunt egali).

Ecuația reciprocă de gradul I este $ax + a = 0$ cu $a \neq 0$, iar cea de gradul al II-lea este de forma $ax^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$ și determinarea soluțiilor acestora nu ridică probleme.

O verificare directă arată că ecuațiile reciproce de grad impar admit soluția $\alpha = -1$. Împărțind polinoamele $aX^3 + bX^2 + bX + a$ și $aX^5 + bX^4 + cX^3 + cX^2 + bX + a$ prin $X + 1$, de exemplu, folosind schema lui Horner

a	b	b	a	
a	$b-a$	a	0	-1

a	b	c	c	b	a	
a	$b-a$	$c-b+a$	$b-a$	a	0	-1

se obțin câturile $aX^2 + (b - a)X + a$, respectiv $aX^4 + (b - a)X^3 + (c - b + a)X^2 + (b - a)X + a$.

Rezultă că ecuațiile reciproce (13) și (15) pot fi scrise

(13′) $(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$

(15′) $(x + 1)(ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b + a)x^2 + (b - a)x + a) = 0$.

Așadar rezolvarea ecuației reciproce de gradul al III-lea revine la a rezolva următoarea ecuație de gradul al II-lea

(13″) $ax^2 + (b - a)x + a = 0$ iar rezolvarea ecuației reciproce de gradul al V-lea revine la rezolvarea următoarei ecuații reciproce de gradul al IV-lea

(15″) $ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b + a)x^2 + (b - a)x + a = 0$,

Rămâne să clarificăm cum se determină soluțiile ecuației reciproce de gradul al IV-lea.

(14) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Cum $a \neq 0$, rezultă că soluțiile ecuației (14) sunt diferite de zero. Putem deci să împărțim termenii ecuației (14) prin x^2 și se obține

(14′) $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$.

Notăm cu $y = x + \frac{1}{x}$ și se observă că $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Ecuația (13′) se mai scrie

(16) $ay^2 + by + c - 2a = 0$.

Dacă y_1 și y_2 sunt soluțiile ecuației (16) atunci soluțiile ecuației (14) sunt soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - y_1 x + 1 = 0$ și soluțiile x_3, x_4 ale ecuației $x^2 - y_2 x + 1 = 0$.

28) Fie ecuația reciprocă $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

a) Verificați că $x_1 = -1$ este soluție a ecuației date.

b) Arătați că $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(2x^2 + x + 2)$.

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $2x^2 + x + 2 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă dată.

29) Fie ecuația reciprocă $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$

a) Verificați că $x_1 = -1$ este soluție a ecuației date.

b) Arătați că $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(2x^2 + 3x + 2)$

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $2x^2 + 3x + 2 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă dată.

30) Fie ecuația reciprocă $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$

a) Împărțiți ecuația dată la $x^2 (x \neq 0)$ și verificați dacă ați obținut ecuația următoare.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

b) Notând $x + \frac{1}{x} = y$, calculați $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $y^2 + 3y - 4 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 - x + 1 = 0$.

e) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 + 4x + 1 = 0$.

f) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă dată.

31) Să se rezolve următoarele ecuații reciproce:

a) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

b) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

c) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

d) $2x^3 - (1 + i)x^2 - (1 + i)x + 2 = 0$.

e) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$.

Indicație: a), e). Împărțiți ecuația la $x^2 (x \neq 0)$ și faceți substituția $x + \frac{1}{x} = y$.

b), c), d). Verificați că $x_1 = -1$ este soluție a ecuației date și după ce dați factor comun pe $x + 1$, obțineți o ecuație reciprocă de grad par.

Exerciții rezolvate.

1) Rezolvați ecuația $3x^3 + x^2 + x + 3 = 0$.

Soluție. Se observă că ecuația este o ecuație reciprocă de gradul al III-lea. Admite deci soluția $x_1 = -1$ și poate fi scrisă sub forma: $(x + 1)(3x^2 - 2x + 3) = 0$

Soluțiile ecuației $3x^2 - 2x + 3 = 0$ sunt $\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$ și $\frac{1-2\sqrt{2}i}{3}$.

Deci, soluțiile ecuației date sunt: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$ și $x_3 = \frac{1-2\sqrt{2}i}{3}$.

2) Rezolvați ecuația reciprocă $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$.

Soluție. Împărțind prin x^2 putem scrie $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+x+\frac{1}{x}+1=0$ și notând cu $y=x+\frac{1}{x}$, avem $2y^2 + y - 3 = 0$. Soluțiile ecuației $2y^2 + y - 3 = 0$ sunt $y_1 = 1$ și $y_2=-\frac{3}{2}$. Soluțiile ecuației date sunt soluțiile ecuației $x+\frac{1}{x}=1$ și ale ecuației $x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$. Aceste ecuații se mai scriu $x^2 - x + 1 = 0$ și $2x^2 + 3x + 2 = 0$.

Obținem soluțiile $x_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ x_3=\frac{-3+i\sqrt{7}}{4},\ x_4=\frac{-3-i\sqrt{7}}{4}$.

3) Rezolvați ecuația reciprocă $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

Soluție. Ecuația dată admite soluția $x = -1$ și atunci ecuația poate fi scrisă astfel:

$(x + 1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) = 0$.

Ecuația $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ este reciprocă de gradul al IV-lea. Împărțind cu x^2 și notând cu $y=x+\frac{1}{x}$, se obține $y^2 + y = 0$, de unde $y_1 = 0$ și $y_2 = -1$. Ecuația $x+\frac{1}{x}=0$ are soluțiile i și $-i$, iar ecuația $x+\frac{1}{x}=-1$ are soluțiile $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Așadar $-1,\ i,\ -i,\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ sunt soluțiile ecuației date.

1. Determinați rădăcinile pătrate ale următoarelor numere complexe: $i,\ 1 + i,\ -3 + 4i,\ \frac{1+i}{1-i}$.

2. Determinați rădăcinile cubice ale următoarelor numere complexe: $-i,\ 1 + i,\ 2 - 11i,\ 4\sqrt{2}(-1+i)$.

3. Calculați $(2 + i)^3$ și determinați rădăcinile cubice ale lui $2 + 11i$.

4. Determinați rădăcinile de ordinul al 4-lea ale numărului complex $3 + 4i$.

5. Fie $z=-\sqrt{5}-i\sqrt{15}$. Calculați z^8 și rădăcinile pătrate ale lui z.

6. Calculați $|z|$ și $\arg z$ pentru fiecare dintre numerele complexe z cu proprietatea $z^5 + 1 = 0$. Determinați valorile lui $\cos\frac{\pi}{5}$ și $\cos\frac{3\pi}{5}$.

7. Determinați numerele complexe z cu proprietatea $z^6=\bar{z}^2$.

8. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $x^2 + (3 + 2i)x + 5 + i = 0$;

b) $x^2-2ix-\sqrt{3}=0$;

c) $(1 + i)x^2 - (5 + i)x + 6 + 4i = 0$.

9. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

b) $x^6 + (2i - 1)x^3 - 1 - i = 0$;

c) $ix^4 + (1 - i)x^2 - 1 = 0$.

10. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația:

$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^3+\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^2+\left(\frac{x-i}{x+i}\right)+1=0$.

11. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;

b) $x^4 - (3 + i)x^2 + 3i = 0$;

c) $x^4 - (3 + 5i)x^2 - 4 + 3i = 0$.

12. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $x^4 - a(a + b)x^2 + a^3b = 0$;

b) $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 + b^4 = 0$ unde $a, b \in \mathbb{R}$.

13. Discutați natura soluțiilor ecuațiilor următoare, în funcție de parametrul $m \in \mathbb{R}$.

a) $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 5 = 0$;

b) $(m - 1)x^4 - mx^2 + m = 0$.

14. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;
b) $x^6 - (1 + i)x^3 + i = 0$.

15. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce
a) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;
b) $2x^3 - (1 + i)x^2 - (1 + i)x + 2 = 0$.

16. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce
a) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;
b) $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$.

17. Dacă o ecuație reciprocă admite pe 1 ca soluție, atunci aceasta este multiplă.

18. Dacă x este o soluție a unei ecuații reciproce, atunci și $\frac{1}{x}$ este soluție a acesteia.

19. Demonstrați că orice ecuație reciprocă de grad impar admite pe -1 ca soluție.

20. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^8 + 5x^4 - 36 = 0$.

21. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația
$(x + 2)(x + 3)(x + 4) = (2x + 1)(3x + 1)(4x + 1)$.

22. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația
$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) - 2 = 0$.

23. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația
$(x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x + 3) + 3 = 0$.

24. Arătați că ecuația
$x^2 - 2(a + b + c)x + 3(ab + bc + ca) = 0$, are toate soluțiile reale.

Indicație. $\Delta = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geqslant 0$.

25. Precizați natura soluțiilor ecuației bipătrate $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 5 = 0$ în funcție de parametrul $m \in \mathbb{R}$.

26. Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$,
$f = x^4 + x^3 - 29x^2 + ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel ca $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ să fie rădăcină a polinomului f și determinați soluțiile ecuației $f(x) = 0$ pentru valorile lui a, b obținute.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se consideră ecuațiile $x^4 + ax^2 + bx + 2 = 0$ și $x^3 - 3x + 2m = 0$, $a, b, m \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Rezolvați ecuațiile în cazul $a = -1$, $b = 2$ și $m = -1$.

(2p) b) Determinați a, b și m astfel încât ecuațiile să admită o soluție dublă comună.

(2p) **2.** Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ polinomul $f = (X^4 + X^2)^n + X^n + X^{3n}$ este divizibil cu $X^2 - X + 1$?

(1p) **3.** Determinați numărul de soluții reale ale ecuației
$x^4 + (a-2)x^3 - (2a+1)x^2 + (2-a)x + 2a = 0, a \in \mathbb{R}$.

(2p) **4.** Știind că x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $f(x) = x^3 + ax^2 + b = 0$, calculați valoarea expresiei $E = \frac{f(x_2 + x_3)}{x_1} + \frac{f(x_3 + x_1)}{x_2} + \frac{f(x_1 + x_2)}{x_3}$.

(1p) **5.** Rezolvați și discutați în raport cu parametru real m ecuația: $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = mx^2$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

1. Se consideră ecuația $(m+1)x^3 - (m^2 + 5m - 5)x^2 + (m^2 + 5m - 5)x - m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -1$.

(1p) a) Arătați că $\forall m \neq -1$, soluțiile ecuației sunt în progresie geometrică.

(2p) b) Notând cu x_2 soluția care nu depinde de m, determinați m astfel încât x_1, x_2, x_3 să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

(2p) c) Pentru $m = 2$, rezolvați ecuația.

(1p) **2.** Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației $x^3 - x^2 - 2x + 4 = 0$. Determinați un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grad minim care are ca rădăcină numărul $x_1^5 + x_2^3 + x_3^2$.

(1p) **3.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^{81} + X^{27} + X^9 + X^3 + X$ la $X^2 - 1$ să fie $aX + b$.

(1p) **4.** Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ având rădăcina $\sqrt[3]{2}$. Arătați că $(X^3 - 2) \mid f$.

(1p) **5.** Rezolvați și discutați în raport cu parametrul m ecuația: $\frac{(x+1)^5 + (x-1)^5}{(x+1)^3 + (x-1)^3} = m, m \in \mathbb{R}$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Test grilă

Pentru fiecare dintre exercițiile următoare, încercuiți varianta corectă de răspuns.

Se consideră polinoamele $f = X^6 + X^3 + 1$, cu rădăcinile $x_1, ..., x_6 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile y_1 și y_2.

1. Câtul împărțirii polinomului f la polinomul g este:

a) $X^4 - X^3 + 2X - 2$; b) $X^4 + X^3 - 2X - 2$;

c) $X^4 - X^3 - 2X - 2$; d) $X^4 + X^3 + 2X - 2$.

2. Restul împărțirii polinomului f la polinomul g este:

a) 1; b) $X + 1$; c) 3; d) $X + 2$.

3. Suma $f(y_1) + f(y_2)$ este:

a) 2; b) –2; c) –4; d) 6.

4. Suma $g(x_1) + ... + g(x_6)$ este:

a) –6; b) 6; c) 0; d) 2.

5. Numărul de rădăcini reale ale polinomului f este:

a) 0; b) 2; c) 4; d) 6.

Parcurgând „Elemente de algebră” ați dobândit următoarele competențe specifice?

1. Identificarea proprietăților operațiilor cu care este înzestrată o mulțime

2. Evidențierea asemănărilor și a deosebirilor dintre proprietățile unor operații definite pe mulțimi diferite și dintre calculul polinomial și cel cu numere

3.1. Determinarea și verificarea proprietăților structurilor algebrice, inclusiv verificarea faptului că o funcție dată este morfism sau izomorfism

3.2. Folosirea descompunerii în factori a polinoamelor, în probleme de divizibilitate și în rezolvări de ecuații

4. Utilizarea proprietăților operațiilor în calcule specifice unei structuri algebrice

5.1. Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea unor probleme de aritmetică

5.2. Determinarea unor polinoame, funcții polinomiale sau ecuații algebrice care verifică condiții date

6.1. Transferarea, între structuri izomorfe, a datelor inițiale și a rezultatelor, pe baza proprietăților operațiilor

6.2. Modelarea unor situații practice, utilizând noțiunea de polinom sau de ecuație algebrică

Elemente de analiză matematică

Primitive

Matematica între fizică și filozofie

Isaac Newton (matematician și fizician englez, 1642-1727)

Gottfried-Wilhelm Leibniz (matematician și filozof german, 1646-1716)

„Consider că obiectele matematice nu sunt formate din particule infinitezimale, ci determinate de o mișcare continuă; liniile sunt rezultate prin mișcarea continuă a punctelor, iar suprafețele sunt date de mișcarea continuă a liniilor.“

„Există o limită pe care viteza poate s-o atingă la capătul mișcării, dar pe care nu o poate depăși. Tot astfel, poate fi determinată valoarea limitei cantităților și rapoartelor care încep sau încetează și, deoarece această limită este certă, problema de a o determina este strict geometrică.“

„ … m-am mulțumit să explic infinitul prin incomparabil, adică să presupun cantități care sunt incomparabil mai mari sau mai mici decât ale noastre“.

„Se poate spune că infinitul și infinitul mic sunt atât de puternic fundamentate, încât rezultatele din geometrie sau din natură se comportă ca și cum ar fi realități perfecte … toate fiind supuse puterii rațiunii. Fără rațiune nu ar exista nici știință, nici lege, ceea ce ar contrazice natura principiului suprem“.

Probleme care conduc la noțiunea de integrală

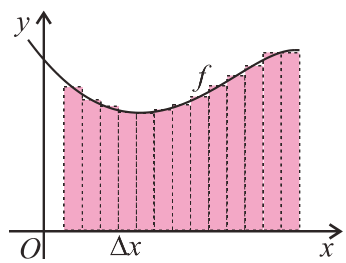
Calculul diferențial (cu derivate și integrale) a fost descoperit de Newton studiind mișcarea corpurilor și, în aceeași perioadă, de Leibniz, studiind geometria. Unele dintre notațiile introduse de Leibniz sunt folosite și astăzi.

Când un mobil se mișcă cu o viteză variabilă $v(t)$, spațiul ΔS parcurs în fiecare interval mic de timp Δt depinde de viteza pe care a avut-o mobilul în acest interval ($\Delta S = v(t)\cdot\Delta t$). Presupunem că în intervalul foarte mic de timp Δt mobilul a avut viteza relativ constantă $v(t)$. Pentru a găsi distanța totală parcursă de mobil trebuie să „adunăm“ toate distanțele parcurse cu viteze diferite în intervalele oricât de mici (infinitezimale), Δt.

♦ Remarcați diferența dintre ideea lui Newton despre linii și concepția că ele sunt mulțimi de puncte.

♦ Dați exemple de „cantități“ sau „rapoarte“ care pot fi supuse unui proces de trecere la limită.

Aria suprafeței dintre graficul unei funcții continue, pozitive și axa Ox se obține, în mod aproximativ, „însumând“ ariile dreptunghiurilor infinitezimale aflate între graficul funcției și axa Ox.

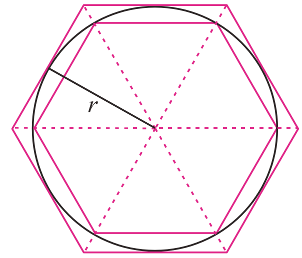


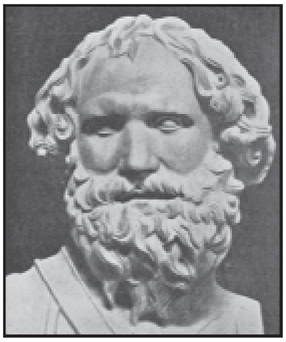
Prin figuri și mărimi „infinitezimale“ vom înțelege, în mod vag, figuri și mărimi care sunt „foarte mici“.

♦ Observați că, pentru Leibniz, noțiunea de infinit este o „realitate perfectă“ datorită consecințelor sale.

♦ Ce credeți că înțelege Leibniz prin *principiul suprem*?

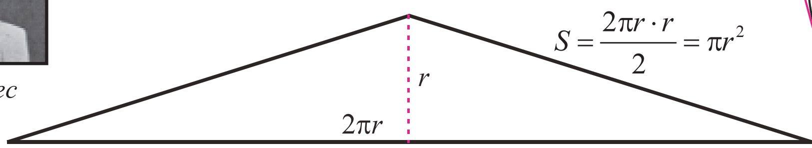
Arhimede a elaborat metode care au stat, două milenii mai târziu, la baza calculului integral. Pentru a calcula aria cercului, Arhimede a folosit poligoane regulate înscrise și circumscrise cercului, începând cu hexagonul regulat și dublând numărul laturilor până la poligoane cu 96 de laturi.



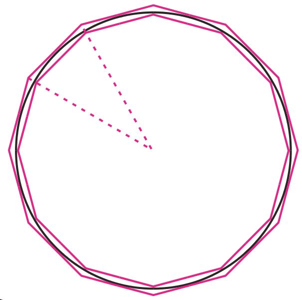


Arhimede, învățat grec (287-212 î.e.n.)

Să observăm că triunghiurile având ca bază o latură a poligonului circumscris și vârful în centrul cercului au înălțimea egală cu raza. Perimetrul poligonului circumscris este aproximativ egal cu circumferința. Rezultă că aria cercului, aproximată de aria poligonului circumscris, este egală cu aria unui triunghi cu baza cât circumferința și înălțimea cât raza.



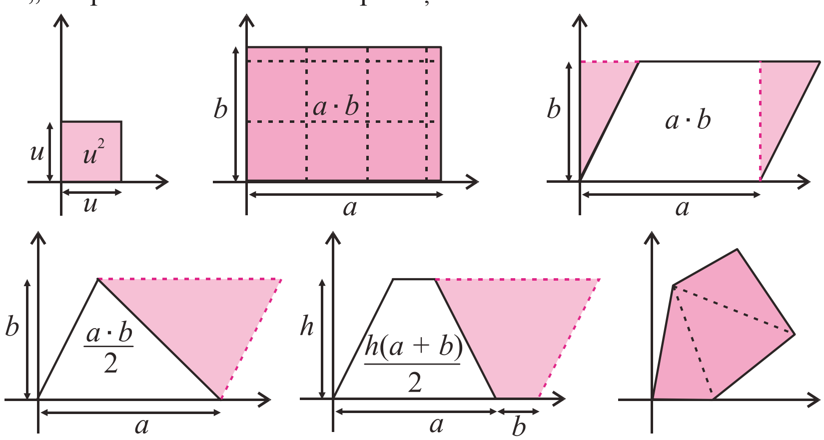
$$S = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$



Aproximarea unei figuri geometrice curbe cu pătrate și, mai general, cu poligoane, se numește *cuadratură*.

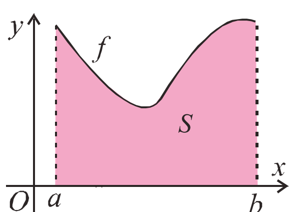
Instrumentul matematic care ne va ajuta să „adunăm“ mărimi infinitezimale este cel de *integrală*. Vom dezvolta teoria integralei pentru a calcula ariile unor suprafețe (plane) curbilinii, lungimile unor curbe, dar și pentru a modela, studia și rezolva probleme din fizică, tehnică, economie etc.

Pentru a măsura o suprafață, o vom compara cu suprafața unui pătrat. În mod intuitiv, aria unei suprafețe este numărul care arată câte pătrate sau fracțiuni de pătrat cu latura unitate „încap“ în toată această suprafață.



Pentru stabilirea ariei unei suprafețe vom încerca să o descompunem, sau să o aproximăm, cu alte figuri (poligoane) de arie cunoscută. Dintr-o figură geometrică mărginită de linii curbe, prin decupare nu rezultă numai un număr finit de poligoane.

Ne propunem să calculăm aria unei suprafețe mărginită de axa Ox și graficul unei funcții continue pozitive $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pentru a calcula această arie, notată $\int_a^b f(t)\,dt$, vom dezvolta un instrument matematic numit *integrală*.

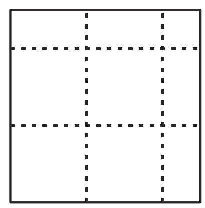


Cum calculăm arii de poligoane ?

Temă de sinteză

1) Care este numărul maxim de pătrate cu latura 1 care se pot decupa dintr-un pătrat cu latura 2 ?

Decupați și rearanjați bucățile unui pătrat cu latura 2,5 pentru ca să compuneți cât mai multe pătrățele unitate. Câte puteți obține?



2) Tăiați un trapez dreptunghic în două bucăți din care să alcătuiți un dreptunghi.

Găsiți mai multe metode pentru acest decupaj.

3) Calculați aria ΔABC cu laturile $a = 3$, $b = 4$ și ...

i) $m(\hat{C}) = 90°$ ii) $m(\hat{C}) = 120°$

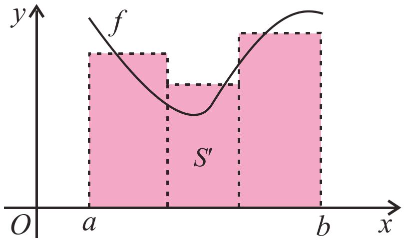
iii) $c = 5$ iv) $c = 6$

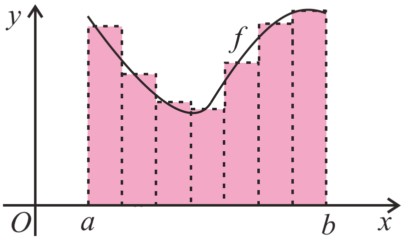
Indicație. Se pot folosi formulele:

$$S = \frac{ab\sin C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Putem forma din dreptunghiuri suprafața S' ca în figurile alăturate: intervalul $[a, b]$ se împarte în intervale mici, iar pe fiecare astfel de interval se construiește un dreptunghi care are ca înălțime o valoare oarecare a funcției f, luată pe acest interval. Dacă intervalele în care s-a împărțit $[a, b]$ sunt toate destul de mici, atunci S' aproximează bine suprafața căutată S.

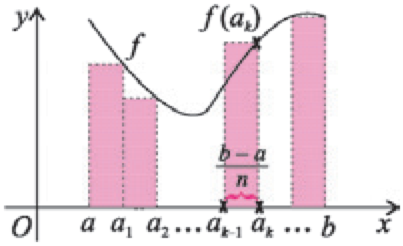




În cele ce urmează vom preciza acest procedeu pentru a obține formule de calcul.

Considerăm o funcție pozitivă și continuă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$. Împărțim $[a, b]$ în n intervale egale de lungime $\dfrac{b-a}{n}$, având capetele: $a_0 = a$, $a_1 = a + \dfrac{b-a}{n}$, ..., $a_n = a + n\cdot\dfrac{b-a}{n} = b$.

Construim dreptunghiurile având ca baze intervalele $[a_{k-1}, a_k]$ și înălțimi $f(a_k), k=\overline{1,n}$.

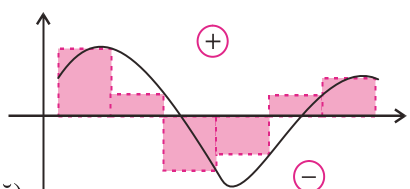


Aria suprafeței ocupată de toate aceste dreptunghiuri este:

$$S_n = f(a_1)\cdot\frac{b-a}{n}+\ldots+f(a_n)\cdot\frac{b-a}{n}=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}}$$

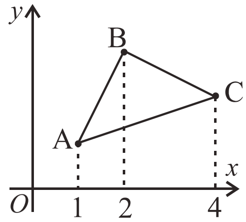
Dacă f nu este pozitivă, suma adună ariile dreptunghiurilor din semiplanul pozitiv și scade ariile dreptunghiurilor din semiplanul negativ (valoarea $f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ este negativă pe intervalele pe care f este negativă).

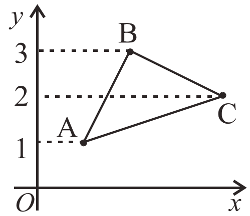


Acum putem enunța, dar fără a face și demonstrația, următoarea ...

Teoremă. Dacă funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci șirul $\left(S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\cdot\dfrac{b-a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la un număr, notat $\int_a^b f(x)dx$, pe care-l vom citi *integrala funcției f pe [a, b]*.

4) Calculați aria ΔABC în modurile sugerate de următoarele 3 reprezentări:





$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

Calculul ariilor unor suprafețe prin metoda cuadraturii.

5) Împărțiți fiecare dintre intervalele $[0, 2]$, $[-1, 3]$, $[4, 99]$, $[-8, -2]$ în cinci intervale egale și calculați lungimea acestor intervale și capetele lor.

6) Calculați aria acoperită de toate dreptunghiurile care au ca bază un interval obținut împărțind $[-1, 5]$ în 4 intervale egale și ca înălțime valoarea funcției în capătul din dreapta intervalului pentru:

i) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = x^2$

ii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$

iii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = \ln(x + 2)$

7) Calculați

$$\int_a^b 2t\, dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

dacă intervalul $[a, b]$ este:

i) $[0, x]$; ii) $[-1, 9]$; iii) $[-1, 1]$.

Reprezentați în plan suprafața cuprinsă între graficul funcției $t\mapsto 2t$ și axa Ox pe intervalul $[a, b]$ în fiecare caz.

Indicație. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

8) Calculați

$$\int_0^x t^2\, dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kx}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n}$$

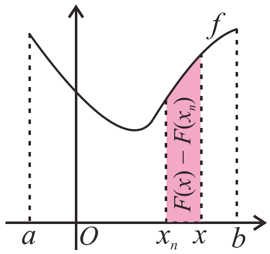
Reprezentați în plan suprafața cuprinsă între graficul funcției $t\mapsto t^2$ și axa Ox pe intervalul $[0, 3]$.

Indicație. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Metoda folosită de Arhimede ne conduce, conform teoremei precedente, la un calcul dificil: limita unui şir de sume. Acest calcul va fi evitat cu ajutorul derivatei. Rolul derivatei este prezentat în următoarea teoremă care va fi studiată în capitolele următoare.

Teoremă. Considerăm o funcţie continuă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ şi fie $F:[a, b]\to\mathbb{R}$, funcţia definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a, b]$. Atunci F este derivabilă şi $F'=f$.

Vom explica această teoremă. Considerăm şirul $(x_n)_n\to x$, $x\in(a, b]$. $F(x)-F(x_n)$ este aria trapezului curbiliniu format între graficul funcţiei f şi Ox pe intervalul $[x_n, x]$. Dacă împărţim aria trapezului la lungimea bazei, obţinem



$$\frac{F(x)-F(x_n)}{x-x_n}\underset{x_n\to x}{\to} f(x)\text{, adică } f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x)-F(x_n)}{x-x_n}=F'(x).$$

Funcţia F a cărei derivată este funcţia f se va numi primitiva funcţiei f. Studiul primitivelor este subiectul acestui capitol.

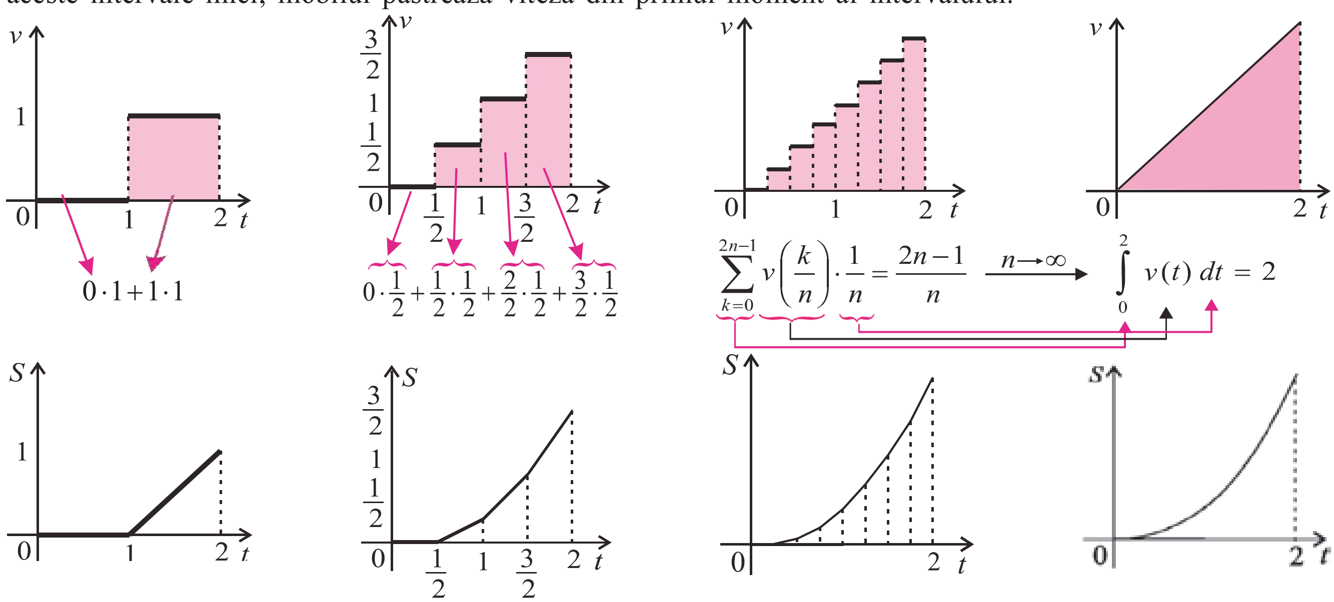
9) Fie funcţia $f:[a, b]\to\mathbb{R}$.
Calculaţi funcţia $F:[a, b]\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ şi $F'=f$, în următoarele cazuri:
i) $f:[0, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=3$
ii) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=x$
iii) $f:[-1, 3]\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2$

10) Fie funcţia $f:[a, b]\to\mathbb{R}$.
Găsiţi o funcţie $F:[a, b]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'=f$ în următoarele cazuri:
i) $f:[0, \pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$
ii) $f:[0, \pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$
iii) $f:[1, 10]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$
iv) $f:[-10, -1]\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{1}{x}$
v) $f:[-10, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=2x$
vi) $f:[-10, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$
vii) $f:[-10, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sin x$

Aplicaţie în fizică

Un mobil pleacă la ora 0 şi, în primele 2 secunde, se mişcă cu acceleraţia constantă a = 1m/s². Viteza mobilului la momentul t din intervalul [0, 2] este $v(t)=at=t$ (în m/s).

Să construim câteva modele care descriu aproximativ mişcarea mobilului şi să calculăm distanţa parcursă cu ajutorul acestor modele. Împărţim intervalul de timp [0, 2] în intervale tot mai mici. Considerăm că, pe aceste intervale mici, mobilul păstrează viteza din primul moment al intervalului.



În cadrul fiecărui model, sumele reprezintă distanţa parcursă în 2 secunde şi, totodată, aria de sub grafice.

Graficele din rândul al doilea reprezintă distanţa parcursă de mobil până la momentul $x\in[0, 2]$, adică primitiva funcţiei v, $F(x)=\int_0^x v(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}$. Se verifică uşor că funcţia F are ca derivată funcţia v.

Newton sau Leibniz nu au demonstrat importantele teoreme pe care le-au descoperit. Ei s-au mulțumit să constate că aceste teoreme se pot aplica în natură sau în geometrie. Au trecut circa 150 de ani pentru ca matematicianul Cauchy să demonstreze teoremele fundamentale ale analizei matematice.

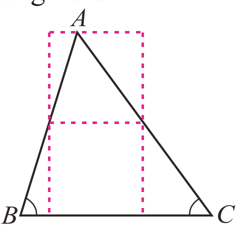
Demonstrația unei propoziții matematice trebuie să conțină raționamentele care ne conduc, pas cu pas, la convingerea că propoziția este adevărată. Acest drum este deschis acelor persoane care stăpânesc noțiunile, care se îndoiesc de fiecare afirmație și au nevoie de certitudini. Dacă nu ai înțeles o demonstrație, trebuie să mai zăbovești asupra ei, să verifici din nou fiecare etapă, să cauți exemplele simple în care se aplică. Vei înțelege numai după ce te vei fi familiarizat cu conceptele importante. Cel mai important este însă să poți folosi ce ai învățat în rezolvarea de exerciții și, mai târziu, în aplicații practice.

1. Care este cel mai mare număr de pătrate cu latura 1 care se poate obține dacă se decupează și se rearanjează bucățile unui pătrat cu latura 3,5 ? Ce proporție dintr-un pătrat unitar rămâne?

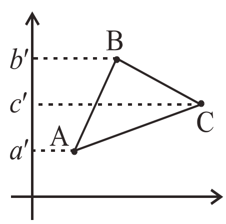
2. a) Tăiați un triunghi dreptunghic cu laturile 3, 4, 5 în două bucăți din care să formați un dreptunghi și calculați aria dreptunghiului. În câte moduri puteți face acest decupaj ?
b) Tăiați un triunghi cu baza 6 și înălțimea 4 în bucăți din care alcătuiți un dreptunghi. Calculați aria dreptunghiului, egală cu aria triunghiului.

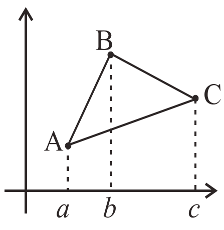
3. Calculați aria ΔABC cu laturile a, b, c dacă se cunosc latura a și unghiurile B și C.

Indicație. Fie h înălțimea din A. Avem $h\text{tg}B + h\text{tg}C = a$.



4. Calculați aria ΔABC în modurile sugerate de reprezentările următoare, dacă:
i) A(1, 1), B(–2, 3), C(4, –2)
ii) A(0, 0), B(–2, 3), C(2, –3)
iii) A(–1, –1), B(2, –1), C(–1, 2)

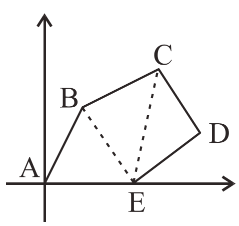


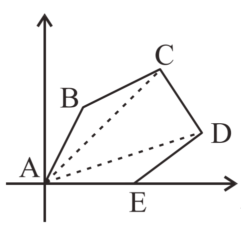


$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ b'-a' & c'-a'\end{vmatrix}$$

5. Calculați aria suprafeței pentagonului $ABCDE$ în modurile sugerate în reprezentările următoare, dacă:
i) $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(4, 4)$, $D(6, 1)$, $E(3, 0)$;
ii) $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(4, 3)$, $D(6, 1)$, $E(3, 0)$.

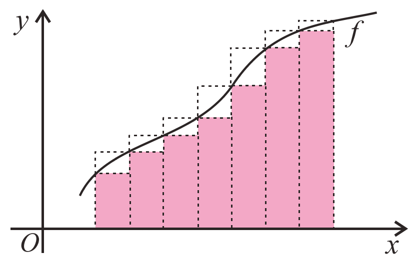
Propuneți alte moduri de împărțire a pentagonului.





6. Calculați diferența dintre ariile poligoanelor regulate cu n laturi, circumscrise și înscrise cercului de rază 1, pentru $n \in \{3, 4, 6, 12\}$.

7. Fie funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ crescătoare. Atunci
$$\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$
Formulați un enunț asemănător pentru o funcție descrescătoare.



8. Calculați $\sum_{k=1}^{6} f\left(a+k\frac{b-a}{6}\right)\cdot\frac{b-a}{6}$ pentru:

i) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x)=x$;

ii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x)=-x$;

iii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$;

iv) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x)=2^x$

v) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$

9. Calculați $\int_a^b t^3 dt=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^3\cdot\frac{b-a}{n}$.

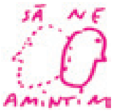
Indicație. $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

10. Fie funcția f: $[-3, 0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$. Determinați funcția $F(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,dt$ și derivata F'.

11. Fie funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$. Găsiți o funcție $F:[a, b]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'=f$ în următoarele cazuri:
i) f: $[-10, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$;
ii) f: $[-10, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$;
iii) f: $[-10, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Primitive și integrala nedefinită a unei funcții. Primitive uzuale

Temă de sinteză



I. *Reguli de derivare* (fără precizarea condițiilor în care au loc).

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(\lambda f)' = \lambda \cdot f',\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$
- $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

II. *Tabelul derivatelor funcțiilor elementare*

f	D_f	f'	$D_{f'}$
c (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$\log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$(0, \infty)$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(0, \infty)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\,x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{ctg}\,x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$

Definiție. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și funcțiile $f : I \to \mathbb{R}$, $F : I \to \mathbb{R}$. Funcția F se numește *primitivă* a lui f dacă:

(1) F este derivabilă; (2) $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.

Spunem că *o funcție f admite primitive pe intervalul I* dacă există o primitivă a funcției f.

Aceleași noțiuni se definesc și pentru funcțiile $f : I \to A$, $A \subset \mathbb{R}$.

1) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^7$. Funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^8}{8}$ este o primitivă a funcției f, deoarece F este derivabilă și $F' = f$.

2) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2^x$. Funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} + 17$ este o primitivă a funcției f.

3) Funcția derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$, este o primitivă a lui f'.

Teoremă. Fie I un interval și funcția $f : I \to \mathbb{R}$ care admite primitive. Dacă $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c$, $\forall\, x \in I$.

Demonstrație. Fie F_1, F_2 primitive ale funcției f. Atunci $\forall\, x \in I$, $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$, $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$.

O funcție cu derivata 0 pe un interval este constantă. Rezultă că $\exists\, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) - F_2(x) = c$, $\forall\, x \in I$. ■

Consecințe. Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval.

1. Dacă $F_0 : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci orice altă primitivă F a funcției f este de forma $F = F_0 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, dacă o funcție admite primitivă, atunci admite o infinitate de primitive și oricare două primitive ale funcției f diferă printr-o constantă.

2. Dacă f admite o primitivă, atunci oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$ și $a \in I$, există o primitivă F a lui f cu $F(a) = c$.

Demonstrăm **2.** Fie $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$ și $F_0 : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Funcția $F = F_0 - F_0(a) + c$ este o primitivă a lui f cu $F(a) = c$. ■

Observație. În teorema anterioară, este important faptul că domeniul de definiție este interval.

Fie $D = [0, 1] \cup [2, 3]$ și funcțiile $f(x) = x$,

$$F_0(x) = \frac{x^2}{2} \text{ și } F_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{x^2}{2} + 1, & x \in [2, 3] \end{cases} \text{ definite pe } D.$$

Avem $F_0' = F_1' = f$. Dar F_1 nu se poate scrie sub forma $F_1 = F_0 + c$, $c \in \mathbb{R}$; pe fiecare dintre intervalele $[0, 1]$ și $[2, 3]$ avem constante diferite: $F_1 = F_0$ pe $[0, 1]$ și $F_1 = F_0 + 1$ pe $[2, 3]$.

Putem determina primitive?

1) Determinați câte o primitivă pentru următoarele funcții definite pe $\mathbb{R}$:

$f_1(x) = 3x^3$; $f_2(x) = 3x^3 - x^2$;

$f_3(x) = 4x^3 + \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2}x + 1$; $f_4(x) = \sin x + 1$.

2) Determinați câte trei primitive pentru fiecare din următoarele funcții:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;

c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

d) $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

e) $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

f) $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

h) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3) Determinați primitiva F a funcției $f(x) = \cos x + \sin x$, cu $F(0) = 1$.

Indicație.

Primitivele funcției f sunt de forma $F(x) = \sin x - \cos x + c$, unde c este o constantă (deoarece $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$). Din condiția $F(0) = 1$ se determină c.

4) Determinați primitiva F a funcției $f(x) = -\cos x + \sin x$, cu $F(0) = 0$.

5) Determinați funcția F, dacă $F'(x) = e^{\sin x} \cos x$ și $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e + 3$.

Indicație. Se cere să alegem dintre primitivele funcției $f(x) = e^{\sin x} \cos x$, primitiva care are valoarea $e + 3$ pentru $x = \dfrac{\pi}{2}$. Deoarece derivata lui $\sin x$ este $\cos x$ și primitiva lui e^x este tot e^x, rezultă că primitivele lui f sunt de forma $F(x) = e^{\sin x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$.

Definiție.

Fie un interval I și o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor funcției f se notează prin $\int f(x)\,dx$ și se numește *integrala nedefinită a funcției f*.

Deci $\boxed{\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ este primitivă a funcției } f\}}$.

De notat că integrala nedefinită a unei funcții f este o mulțime de funcții, nu o funcție sau un număr.

Observații.

♦ Există funcții care nu admit primitive.

De exemplu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

♦ Putem nota argumentul funcției f cu t, s, u ... Integrala nedefinită se notează atunci $\int f(t)\,dt$, $\int f(s)\,ds$, $\int f(u)\,du$...

Pentru a lucra cu integrale nedefinite, vom stabili câteva reguli de calcul cu mulțimi de funcții:

Definiție.

Fie $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ două mulțimi nevide de funcții reale definite pe intervalul I și $\lambda \in \mathbb{R}$. Definim:

$\mathscr{A} + \mathscr{B} = \{ f + g \mid f \in \mathscr{A}, g \in \mathscr{B} \}$,

$f + \mathscr{A} = \{ f \} + \mathscr{A}$, unde $f : I \to \mathbb{R}$,

$\lambda + \mathscr{A} = \{ \lambda + f \mid f \in \mathscr{A} \}$,

$\lambda\mathscr{A} = \{ \lambda f \mid f \in \mathscr{A} \}$,

$\mathscr{A} \circ g = \{ f \circ g \mid f \in \mathscr{A} \}$, unde $g : J \to I$ este o funcție definită pe intervalul J.

Notăm $\mathscr{C}_I = \{ \varphi : I \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ este funcție constantă pe } I \}$.

Atunci când intervalul I este subînțeles, notăm $\mathscr{C} = \mathscr{C}_I$.

Observații. 1. $\mathscr{C} + \mathscr{C} = \mathscr{C}$ 2. $\lambda\mathscr{C} = \mathscr{C}$, pentru $\lambda \neq 0$.

Teoremă.

Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F, atunci $\int f(x)\,dx = F + \mathscr{C}$. Egalitatea se mai scrie $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathscr{C}$.

Demonstrație.

$\int f(x)\,dx = \{ G : I \to \mathbb{R} \mid G \text{ primitivă a funcției } f \} =$

$= \{ F + c \mid c \in \mathbb{R} \} = F + \{ \varphi : I \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ constantă} \} = F + \mathscr{C}$. ■

6) Verificați: a) $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + \mathscr{C},\ x \in (0, \infty)$.

7) Calculați următoarele integrale folosind numai formulele de derivare, știind că domeniul fiecărei funcții este un interval:

a) $\int \sin x\,dx$ b) $\int \cos x\,dx$

c) $\int \sin mx\,dx$ d) $\int \cos mx\,dx$

e) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$ f) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$

g) $\int e^x\,dx$ h) $\int e^{-x}\,dx$

8) Cu ajutorul definiției determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int (ax+b)^n\,dx,\ b, x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\int \dfrac{1}{x+a}\,dx,\ x > -a,\ a \in \mathbb{R}$;

c) $\int \dfrac{1}{2x-1}\,dx,\ x > \dfrac{1}{2}$;

d) $\int \sqrt[3]{4x^2}\,dx,\ x \in \mathbb{R}$;

e) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx,\ x > -1$;

f) $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx,\ x > -\dfrac{1}{2}$;

g) $\int \sin 2x\,dx,\ x \in \mathbb{R}$;

h) $\int e^{2x}\,dx,\ x \in \mathbb{R}$.

9) Determinați primitiva funcției $f(x) = x^2$, al cărei grafic conține punctul $M(2, 3)$.

Indicație. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ este o primitivă pentru f (avem $F'(x) = f(x)$). Determinăm c astfel încât $F(2) = 3$.

10) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F(x) = e^{-x}(a\cos 4x + b\sin 4x)$ să fie o primitivă a funcției $f(x) = e^{-x}\cos 4x$.

EXEMPLE

1) Calculăm $\int \cos x\, dx$. O funcție F derivabilă cu $F'(x) = \cos x$ este funcția $F(x) = \sin x$, deci $\int \cos x\, dx = \sin x + \mathscr{C}$.

2) $\int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă, $\int f'(x)\, dx = f(x) + \mathscr{C}$.

Să stabilim câteva reguli de calcul cu integrale nedefinite.

Teoremă.

Dacă f, $g : I \to \mathbb{R}$ admit primitive și $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcțiile $f + g$ și λf admit primitive și, în plus, au loc relațiile:

(1) $\int f(x)dx = \int f(x)dx + \mathscr{C}$

(2) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(3) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Demonstrație.

Fie F, $G : I \to \mathbb{R}$ primitive ale funcției f respectiv g. Atunci: $F + G$ este derivabilă pe I și $(F + G)' = F' + G' = f + g$, deci $f + g$ admite primitive pe I, iar $F + G$ este o primitivă a sa.

$\int (f(x) + g(x))\, dx = F + G + \mathscr{C} = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$.

λF este derivabilă, $(\lambda F)' = \lambda F' = f$; deci λf are primitiva λF.

$\int \lambda f(x)dx = \lambda F + \mathscr{C} = \lambda F + \lambda \mathscr{C} = \lambda(F + \mathscr{C}) = \lambda \int f(x)dx$. ■

EXEMPLE

1) $\int (x+1)\, dx = \int x\, dx + \int dx = \dfrac{x^2}{2} + x + \mathscr{C}$; $x \in \mathbb{R}$.

2) $\int \dfrac{1}{2x-1} dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{2}}\, dx = \dfrac{1}{2}\ln\left|x - \dfrac{1}{2}\right| + \mathscr{C}$

pentru $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ sau pentru $x \in \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

3) $\int \left(\dfrac{1}{x} - \cos x\right)dx = \int \dfrac{1}{x} dx - \int \cos x\, dx = \ln x - \sin x + \mathscr{C}$; $x > 0$.

O mulțime foarte importantă de funcții care admit primitive este dată în următoarea teoremă a cărei demonstrație va fi făcută în capitolul următor.

Teoremă.

O funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval

Indicație.

$F'(x) = e^{-x}[(4b - a)\cos 4x - (4a + b)\sin 4x]$.

Deoarece $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, obținem sistemul $\begin{cases} F'(0) = f(0) \\ F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$, cu $a = \dots$, $b = \dots$

11) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitive și $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

Arătați că funcția $g(x) = f(ax + b)$, $x \in \mathbb{R}$, admite primitive. În plus, dacă F este o primitivă a funcției f, atunci $G(x) = \dfrac{1}{a}F(ax + b)$, $x \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției g.

12) Determinați următoarele integrale nedefinite și precizați intervalele maxime de definiție ale lor:

a) $\int \left(x^2 - x + \dfrac{1}{x}\right)dx$; b) $\int \left(e^{2x} + 2\sqrt{x}\right)dx$;

c) $\int \dfrac{2x-1}{x^3} dx$; d) $\int (x^2 - \sin x)\, dx$;

e) $\int \dfrac{x-3}{x+5} dx$; f) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\, dx$;

g) $\int (e^{3x} - \sin 3x)\, dx$.

13) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Arătați că f admite primitive.

14) Arătați că funcția $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, admite primitive și găsiți o primitivă a sa.

Indicație. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Deoarece funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că admite primitive. Există

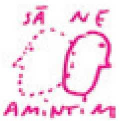
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + c, & x < 0 \end{cases},\ c \in \mathbb{R},$$

Observații.

♦ Teorema nu ne arată și cum calculăm primitivele unei funcții continue

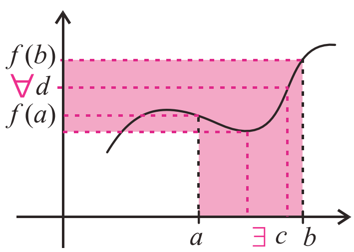
♦ Toate funcțiile elementare (polinomiale, radicali, exponențiale, logaritmi, trigonometrice) sunt continue pe orice interval din domeniul lor de definiție și, ca urmare, admit primitive.

♦ Reciproca teoremei nu este adevărată. Există funcții care admit primitive dar nu sunt continue.



Proprietatea lui Darboux.

Spunem că funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, are proprietatea lui Darboux dacă „$\forall\ [a, b] \subset I$ și $\forall\ d$ între $f(a)$ și $f(b)$, $\exists\ c \in [a, b]$ cu $f(c) = d$“.

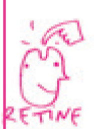


Cu alte cuvinte, o funcție cu proprietatea lui Darboux transformă orice subinterval din domeniu într-un interval.

Teoremă.
Derivata oricărei funcții derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Teoremă. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I, atunci funcția f are proprietatea lui Darboux pe I.

Consecință. Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă imaginea funcției f pe un subinterval $J \subset I$ nu este interval, atunci f nu admite primitive pe I.



Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$,

- Dacă f este continuă pe I, atunci f admite primitive pe I.
- Dacă f admite primitive pe I, atunci are proprietatea lui Darboux pe I.
- Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe I, atunci f nu admite primitive pe I.
- O funcție cu puncte de disconti-nuitate de speța I nu are primitive deoarece nu are proprietatea lui Darboux.

astfel încât $F'(x) = f(x)$. Se pune condiția ca F să fie continuă. Obținem $c = 0$. Deoarece F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, rezultă că F este o primitivă a lui f.

15) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x>1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$.

Arătați că f admite primitive și găsiți o primitivă a sa.

16) Demonstrați că următoarele funcții admit primitive și găsiți primitivele lor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x < -1 \\ \sin \pi x, & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}$;

17) a) Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.
b) Fie I un interval deschis. Demonstrați că $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, admite primitive pe I dacă și numai dacă I nu conține nici un număr întreg.

18) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2^x + 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.
a) Studiați monotonia funcției f.
b) Determinați $\operatorname{Im} f$.
c) Arătați că f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Primitive uzuale; tabel de integrale nedefinite

Cu ajutorul tabelului derivatelor obținem următoarea listă de integrale nedefinite importante; unele formule de integrare rezultă direct din formulele de derivare, alte formule sunt deduse prin aplicarea unor metode de integrare. Fiecare formulă este adevărată pe orice interval din mulțimea pe care este definită atât funcția f de sub semnul integral, cât și primitiva sa F.

1. $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathscr{C}\,,\ n\in\mathbb{N}\,,\ x\in\mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+\mathscr{C},\quad a\neq-1\,,\ x\in(0,+\infty)$

3. $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+\mathscr{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}^*$

4. $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+\mathscr{C},\quad a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\},\ x\in\mathbb{R}$

5. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+\mathscr{C},\ \ a\neq0,x\in\mathbb{R},\ x^2-a^2\neq0$

6. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathscr{C}\ ,\ a\neq0,x\in\mathbb{R}$

7. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+\mathscr{C}\quad,\ a\neq0,\ x^2\pm a^2>0$

8. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+\mathscr{C}\,,\ a>0,\ a^2-x^2>0$

9. $\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+\mathscr{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}$

10. $\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+\mathscr{C}\ \ ,\ x\in\mathbb{R}$

11. $\displaystyle\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+\mathscr{C},\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

12. $\displaystyle\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+\mathscr{C}\,,\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

13. $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\operatorname{ctg}x+\mathscr{C}\,,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

14. $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\operatorname{tg}x+\mathscr{C}\,,\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Formule facultative:

15. $\displaystyle\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+\mathscr{C}\,,\ a>0$

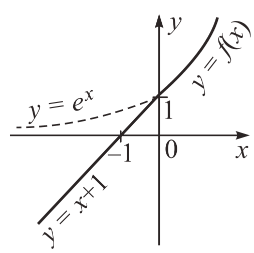
16. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+\mathscr{C},\ a>0.$

Aceste formule se verifică folosind proprietatea „ $\int f(x)\,dx=F(x)+\mathscr{C}\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$ “.

Observație. Formulele 15 și 16 din tabel **nu** trebuie să fie memorate. Trebuie doar să știm de unde să le luăm pentru a le putea folosi. Aceste formule vor fi deduse în capitolul următor, ca aplicație la metoda de integrare prin părți.

Exerciții rezolvate – teme de sinteză

1) Reprezentați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant0\\ e^x, & x>0\end{cases}$. Apoi arătați că f admite primitive și determinați o primitivă.



Soluție. Graficul lui f, redat în desenul alăturat, este format dintr-o semidreaptă de ecuație $y=x+1$ ($x\leqslant0$) și din graficul de ecuație $y=e^x$ ($x>0$).

$\lim\limits_{x\nearrow0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow0}f(x)=1=f(0)$; atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, prin urmare are o primitivă

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x, & \text{dacă } x\in(-\infty,0]\\ e^x+c, & \text{dacă } x\in(0;\infty)\end{cases}$, $c\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$. Impunem condiția ca F să fie continuă. Avem: $\lim\limits_{x\nearrow0}F(x)=0=F(0)$, $\lim\limits_{x\searrow0}F(x)=c+1$, deci $0=c+1$. Prin urmare,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x, \text{ dacă } x\in(-\infty;0]\\ e^x-1, \text{ dacă } x\in(0;\infty)\end{cases}$$. Verificăm derivabilitatea lui F pe $\mathbb{R}$.

Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$. Cum F este continuă pe $\mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\nearrow 0}F'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 0}F'(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}e^x=1$ rezultă că F este derivabilă în 0 și $F'(0) = 1 = f(0)$.

În concluzie, F este primitiva funcției f.

2) Calculați următoarele integrale: a) $\int(10x^4-8x^3+4x^2)dx=10\frac{x^5}{5}-\frac{8x^4}{4}+4\frac{x^3}{3}+\mathscr{C}=2x^5-2x^4+\frac{4x^3}{3}+\mathscr{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

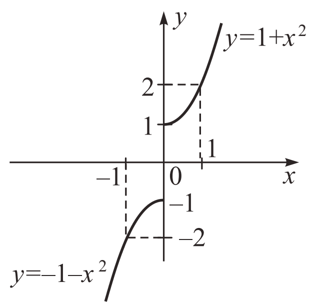
b) $\int\frac{3-x^2}{x}dx=3\int\frac{1}{x}dx-\int x\,dx=3\ln|x|-\frac{x^2}{2}+\mathscr{C}$; $x>0$ sau $x<0$.

c) $\int\sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\mathscr{C}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\mathscr{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

d) $\int\frac{5}{4x^2+9}dx=\frac{5}{4}\int\frac{1}{x^2+\frac{9}{4}}dx=\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+\mathscr{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

3) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$. Să arătăm că f nu admite primitive și să o reprezentăm grafic.

Soluție. Graficul lui f, redat în desenul alăturat, este format din două porțiuni de parabolă, de ecuații $y=-1-x^2$ ($x<0$) și $y=1+x^2$ ($x>0$), și dintr-un punct $O(0, 0)$. Mulțimea $f(\mathbb{R})$ este proiecția graficului pe axa Oy.

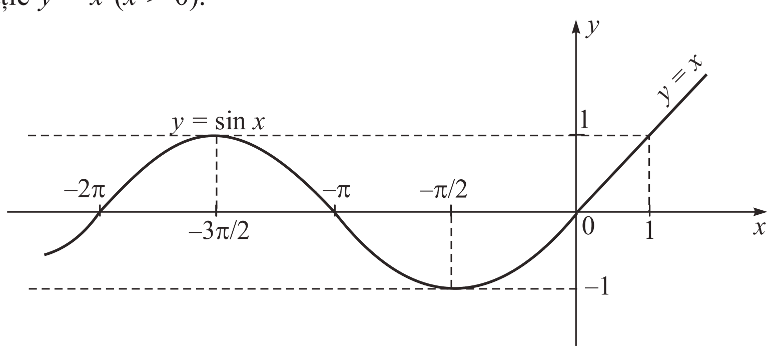


$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1-x^2, & x<0\end{cases};\quad f(\mathbb{R})=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\cup\{0\}$$ nu este interval, deci f nu admite primitive.

4) Determinați numărul a astfel încât funcția $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ x+a, & x>0\end{cases}$, $x\in\mathbb{R}$, să admită primitive. Apoi reprezentați grafic funcția astfel obținută.

Soluție. Avem: $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=a$; $f(0)=0$. Dacă $a = 0$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive. Dacă $a \neq 0$, atunci f are un punct de discontinuitate de speța I și, ca urmare, nu admite primitive. Așadar soluția problemei este $a = 0$.

Graficul, redat în desenul alăturat, este format dintr-o porțiune de sinusoidă ($y = \sin x$, $x \leqslant 0$) și din semidreapta de ecuație $y = x$ ($x > 0$).



PROBLEME PROPUSE

● **1.** Reprezentați grafic funcțiile de integrat și calculați următoarele integrale:

a) $\int (x+1)^2\,dx$; b) $\int \frac{x^3-x^2-x-2}{x^2}\,dx,\, x>0$;

c) $\int (x^2-e^x)\,dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}},\, x>0$; e) $\int \frac{dx}{x^2+4}$;

f) $\int \frac{1}{x^2-16}\,dx,\ x>4$; g) $\int \frac{5}{9-4x^2}\,dx,\ x<-\frac{3}{2}$.

● **2.** Determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,\ x>0$ b) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x-1}\right)dx,\ x>\frac{1}{3}$;

c) $\int \left(3^{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}\right)dx,\ x>1$; d) $\int \frac{1}{x^2-5x+6},\ x>3$;

e) $\int \frac{2x+1}{2x-1}\,dx,\ x>\frac{1}{2}$; f) $\int \frac{x}{3x-4}\,dx,\ x>\frac{4}{3}$;

g) $\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx,\ x<-1$; h) $\int \frac{x}{4x^2-9}\,dx,\ x<-\frac{3}{2}$;

i) $\int \frac{x^2-1}{x^2+4}\,dx$; j) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx,\ x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; l) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

●● **3.** Determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int \frac{1+\cos^4 x}{\cos^2 x}\,dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\int \frac{\sin x+\sin 2x}{\cos x}\,dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

● **4.** Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $f:(-1;\,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$;

b) $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}$;

c) $f:[0,\,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=|\sin x|$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|e^x-1|$.

● **5.** Utilizând definiția, calculați:

a) $\int e^x(x+1)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $\int (\cos x-x\sin x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $\int \left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)dx,\ x>0$;

d) $\int \frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x}\,dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

● **6.** Determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int \left(\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx,\ x>0$;

b) $\int \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx,\ x\in(-1,\,1)$;

c) $\int \left(\frac{1}{4x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx,\ x<-\frac{1}{2}$;

d) $\int \frac{dx}{x^2-1},\ x>1$;

e) $\int (\sin 2x-\cos 2x)^2\,dx$;

f) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2-1}\,dx,\ x\in(-1,\,1)$;

g) $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+4)}\,dx,\ x>1$;

h) $\int \frac{1}{4x^2-9}\,dx,\ x>\frac{3}{2}$.

●● **7.** Demonstrați că următoarele funcții admit primitive pe $\mathbb{R}$: a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

●● **8.** Demonstrați că următoarele funcții admit primitive și găsiți primitivele lor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9x^2+1}, & \text{dacă } x<0\\ e^x, & \text{dacă } 0\leqslant x\leqslant 1\\ e^{2x-1}, & \text{dacă } x>1\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\big|2x-|x-1|\big|$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max\{x^2-2x,\ x-2\}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x+1)e^{nx}+1}{e^{nx}+1}$.

●● **9.** Demonstrați că următoarele funcții admit primitive pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{1}{2x}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

10. Pentru ce $a \in \mathbb{R}$, funcțiile admit primitive?

a) $f(x)=\begin{cases}(\sin x+1)^{\frac{a}{x}}, & x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\\ 1, & x=0\\ x^x, & x>0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}e^{2x-1}, & x\leqslant 1\\ ax+1, & x>1\end{cases}$; f) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-3x}, & x\leqslant 0\\ \frac{\ln(1+ax)}{x}, & x>0\end{cases}$;

g) $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{a}{x}}, & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}$.

11. Demonstrați că următoarele funcții nu admit primitive pe $\mathbb{R}$: a) $f(x)=[x]-x$;

b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$.

12. Demonstrați că funcția $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

13. Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. Demonstrați că dacă f admite primitive pe $[a,c]$ și pe $[c,b]$, atunci f admite primitive pe $[a,b]$.

14. Fie $f, g: I\to\mathbb{R}$. Demonstrați că dacă f admite primitive pe I iar g este derivabilă cu derivata continuă, atunci funcția $f\cdot g$ admite primitive pe I.

Teste de evaluare

Testul 1

(2p) **1.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$ *nu* admite primitive. Reprezentați grafic funcția f pe intervalul $[-2, 8]$.

2. Calculați următoarele integrale nedefinite:

(1p) a) $\int\frac{x^2}{x-2}dx, x>2$;

(2p) b) $\int\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}\,dx,\ x>0$;

(2p) c) $\int\frac{6}{4x^2+9}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

(1p) d) $\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx,\ 0<x<\pi$.

(1p) **3.** Arătați că funcția următoare admite primitive și calculați o primitivă a ei:

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=15|x-2|\sqrt{x}$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

(2p) **1.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$, admite primitive, apoi reprezentați grafic această funcție.

2. Calculați următoarele integrale nedefinite:

(1p) a) $\int\frac{x-1}{x+1}dx, x>-1$;

(2p) b) $\int\sqrt[5]{x\sqrt{x}}\,dx, x>0$;

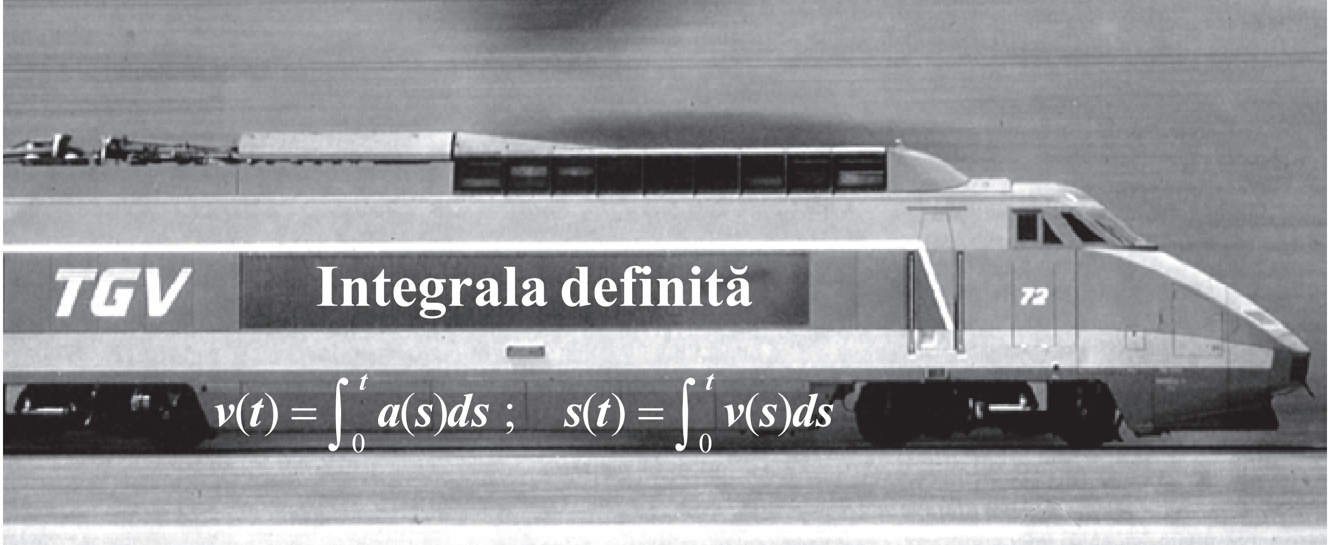
(2p) c) $\int\frac{20}{4x^2-25}dx, x>2$;

(1p) d) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$.

(1p) **3.** Arătați că funcția următoare admite primitive și calculați o primitivă a ei:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\cdot e^{|2x-4|}$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.



Integrale definite

Originile integralei definite pot fi urmărite încă din Antichitate și sunt legate de *probleme geometrice*, cum ar fi determinarea lungimii unei curbe, a ariei unei suprafețe, a volumului și centrului de greutate ale unui corp. Începând din secolul al XVI-lea, ideea de integrală definită începe să se cristalizeze și în legătură cu rezolvarea unor *probleme de fizică*, referitoare la studiul mișcărilor neuniforme, la determinarea masei și densității unei bare, la determinarea lucrului mecanic al unei forțe etc. Un moment important din istoria matematicilor s-a petrecut la sfârșitul secolului al XVII-lea, atunci când Leibniz și Newton au pus în evidență legătura profundă între noțiunea de integrală și noțiunea de derivată, exprimată prin celebra formulă $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ care le poartă astăzi numele. La clarificarea deplină a ideii de integrală s-a ajuns un secol mai târziu, prin contribuțiile matematicianului francez Augustin Cauchy (1789-1857), care a folosit sume integrale de un tip particular și prin contribuțiile matematicianului german Bernhard Riemann (1826--1866), care a introdus sumele integrale, ce-i poartă numele, utilizate până în prezent.

O trăsătură comună a exemplelor care au condus la introducerea conceptului de integrală este trecerea de la descrierea locală, instantanee a tendinței unui fenomen, realizată printr-un *proces de derivare*, la descrierea globală a fenomenului, realizată printr-un *proces de integrare*, care „însumează” comportamentul fenomenului în toate momentele (sau în toate punctele).

Diviziune, sistem de puncte intermediare, sumă Riemann.

Vom considera un interval închis și mărginit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Definiții. Se numește *diviziune* a intervalului $[a, b]$ un sistem ordonat de puncte $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Vom mai nota $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$.

Intervalele $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ se numesc *intervale parțiale* ale lui Δ, iar cea mai mare dintre lungimile acestor intervale se numește *norma diviziunii* Δ și se notează $\|\Delta\|$, deci

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

Simbolul Δ se citește *delta*.

1) Calculați norma diviziunilor următoare:

a) $\Delta = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right)$;

b) $\Delta = \left(-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, 1\right)$;

c) $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

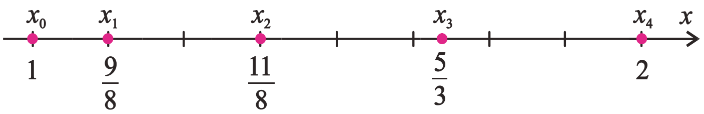
2) Calculați norma diviziunilor Δ ale intervalului $[a, b]$, unde $r = b - a$ și $n \geqslant 2$:

a) $\Delta = (a, b)$;

... de diviziune a intervalului [1, 2].

$\Delta = \left(1, \frac{9}{8}, \frac{11}{8}, \frac{5}{3}, 2\right)$; $[a, b] = [1, 2]$. Punctele lui Δ se notează $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{9}{8}$, $x_2 = \frac{11}{8}$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = 2$. Norma lui Δ este

$$\|\Delta\| = \max\left\{\frac{9}{8} - 1, \frac{11}{8} - \frac{9}{8}, \frac{5}{3} - \frac{11}{8}, 2 - \frac{5}{3}\right\} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$



Definiții. Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ diviziune a lui $[a, b]$. Se numește *sistem de puncte intermediare asociat diviziunii* Δ un sistem $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, ..., n\}$.

Se numește *sumă Riemann* (sau *sumă integrală*) asociată lui f, Δ și ξ numărul real $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$.

Explicit, $\sigma = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) + ... + f(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$.

Convenție. Dacă vrem să precizăm funcția f, diviziunea Δ sau sistemul ξ (citim *csi*), suma Riemann se notează σ_Δ sau $\sigma_\Delta(f\,;\,\xi)$ (citim *sigma indice delta de f și csi*).

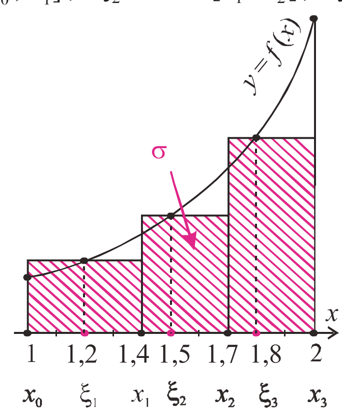
... de sumă Riemann.

Fie $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}[x^2 + (x-1)^2]$.

Fie $\Delta = (1; 1{,}4; 1{,}7; 2)$ și $\xi = (1{,}2; 1{,}5; 1{,}8)$.

Notăm: $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}4$; $x_2 = 1{,}7$; $x_3 = 2$;

$\xi_1 = 1{,}2 \in [x_0, x_1]$; $\xi_2 = 1{,}5 \in [x_1, x_2]$; $\xi_3 = 1{,}8 \in [x_2, x_3]$.



Suma Riemann asociată este:

$$\sigma = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) =$$
$$= f(1,2)(1{,}4 - 1) + f(1,5)(1{,}7 - 1{,}4) + f(1,8)(2 - 1{,}7) =$$
$$= 0{,}6265.$$

Suma Riemann σ reprezintă aria mulțimii formate din cele trei dreptunghiuri hașurate.

b) $\Delta = \left(a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+2b}{3}, b\right)$;

c) $\Delta_n = \left(a, a + \frac{r}{n}, a + 2\frac{r}{n}, ..., a + (n-1)\frac{r}{n}, b\right)$.

3) Scrieți o diviziune echidistantă cu pasul $\frac{1}{5}$ a intervalului $[a, b]$ în următoarele situații (pentru o diviziune echidistantă distanța dintre două puncte consecutive ale diviziunii este constantă și se numește *pas*):

a) $[0, 1]$; b) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

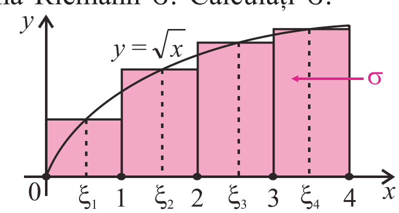
c) $[0, 2]$; d) $[-2; -0{,}2]$.

4) Scrieți o diviziune echidistantă a intervalului $[a, b]$ formată din 6 puncte, în următoarele situații:

a) $[0, 5]$; b) $[1, 5]$; c) $[0, 2]$; d) $\left[0, \sqrt{10}\right]$.

5) Fie funcția $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Fie diviziunea $\Delta = (0; 1; 2; 3; 4)$ și sistemul $\xi = (0{,}49; 1{,}44; 2{,}56; 3{,}61)$ de puncte intermediare asociat lui Δ.

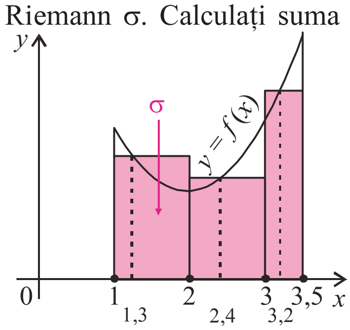
Reprezentați în plan subgraficul Γ_f și suma Riemann σ. Calculați σ.



Răspuns. $\sigma = 5{,}4$.

6) Considerăm funcția $f: [1; 3{,}5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$, diviziunea $\Delta = (1; 2; 3; 3{,}5)$ și sistemul de puncte intermediare $\xi = (1{,}3; 2{,}4; 3{,}2)$.

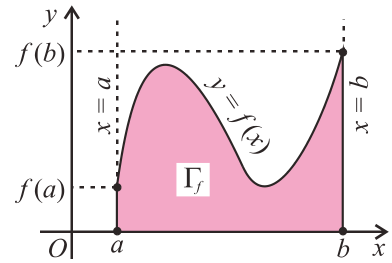
Reprezentați în plan subgraficul Γ_f și suma Riemann σ. Calculați suma σ.



Răspuns. $\sigma = 3{,}87$.

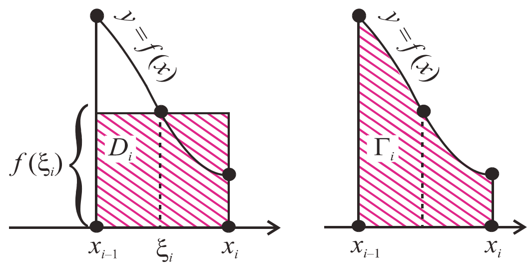
Interpretarea geometrică a sumelor Riemann și ideea de integrală definită

SĂ NE AMINTIM ... că una dintre problemele pe care teoria integralei și-a propus să o rezolve este determinarea ariei unei porțiuni din plan.



Definiție. Presupunem că funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă și pozitivă. Se numește *subgrafic* al funcției *f*, mulțimea $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ și } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

Simbolul Γ_f se citește *gama indice f*. Mulțimea Γ_f este delimitată de axa *Ox*, graficul lui *f* și dreptele de ecuații $x = a$, $x = b$. Ne punem problema să calculăm aria subgraficului funcției *f*. Aria unei figuri geometrice plane se poate obține aproximând figura cu un șir de suprafețe poligonale. Noi vom aproxima Γ_f cu reuniuni finite de dreptunghiuri. Pentru aceasta, vom lua o diviziune arbitrară $\Delta = (a = x_0 < ... < x_n = b)$ și un sistem de puncte intermediare $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ asociat lui Δ (cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$).

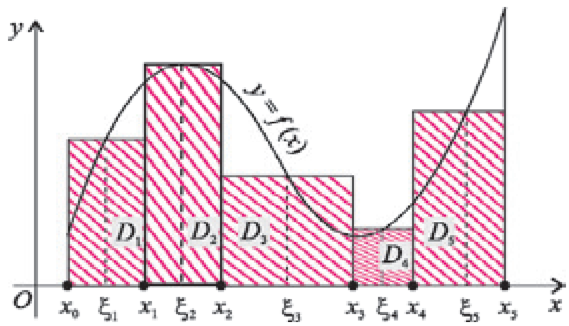


Pentru fiecare $i = 1, 2, ..., n$, să construim pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ un dreptunghi D_i de bază $x_i - x_{i-1}$ și de înălțime $f(\xi_i)$. Avem: aria$(D_i) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Se consideră că aria(D_i) aproximează aria(Γ_i), unde Γ_i este subgraficul funcției *f* pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$.

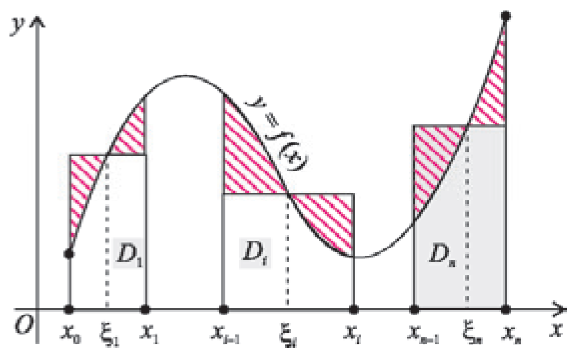
Reunind aceste dreptunghiuri, obținem o porțiune *D* a planului: $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Aria lui *D* este chiar suma Riemann:

$$\text{aria}(D) = \sum_{i=1}^{n} \text{aria}(D_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma_\Delta(f; \xi).$$



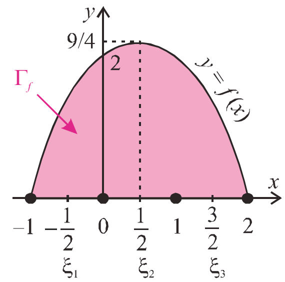
Mulțimea *D* este ilustrată pentru $n = 5$.

Se consideră că aria(*D*) aproximează aria(Γ_f). În mod intuitiv, cu cât toate bazele dreptunghiurilor D_i sunt mai mici, deci cu cât este mai mică norma $\|\Delta\|$, cu atât sunt mai mici porțiunile hașurate (desenul alăturat), prin care diferă *D* de Γ_f. Înseamnă că, pentru a aproxima din ce în ce mai bine aria lui Γ_f cu aria lui *D*, este necesar să luăm diviziuni Δ de normă din ce în ce mai mică. Aria lui Γ_f va fi tocmai numărul de care se apropie (către care converge) aria lui *D* atunci când norma $\|\Delta\|$ tinde la zero (se poate arăta că există $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât* pentru orice șir $(\Delta_n)_n$ de diviziuni de normă tinzând la zero și pentru orice șir $(\xi^n)_n$, cu ξ^n sistem asociat lui Δ_n ($n \in \mathbb{N}$), *să avem* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f; \xi^n) = \alpha$). Prin definiție, numărul α obținut prin acest procedeu va fi *aria* lui Γ_f. El se va numi *integrala Riemann* a lui *f* pe $[a, b]$ și se va nota



$$\alpha = \text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercițiu rezolvat. Să reprezentăm subgraficul Γ_f și să aproximăm aria (Γ_f) cu suma Riemann $\sigma_\Delta(f\,;\xi)$ pentru $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)(2 - x)$; $\Delta = (-1, 0, 1, 2)$; $\xi = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



Soluție. Subgraficul Γ_f este hașurat în desenul alăturat.
Avem: $\|\Delta\| = 1$; ξ este asociat lui Δ;

$$\sigma_\Delta(f\,;\xi) = f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 1 = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} + \frac{5}{4} = \frac{19}{4} = 4{,}75\,;$$

Funcție integrabilă și integrală definită

Definiții.

Fie o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că funcția f este *integrabilă* sau *integrabilă Riemann* pe intervalul $[a, b]$ dacă există un număr real I_f cu proprietatea: pentru orice șir $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și pentru orice șir $\left(\xi^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme de puncte intermediare, ξ^n asociat lui $\Delta_n (n \in \mathbb{N})$, șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f\,;\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la I_f.

Numărul I_f se numește *integrala* sau *integrala definită* sau *integrala Riemann* a funcției f pe intervalul $[a, b]$ și se notează

$$\int_a^b f(x)dx \ \text{ sau } \int_a^b f\,dx \ \text{ sau } \int_a^b f\,.$$

Observații și comentarii

♦ Explicit, $\Delta_n = \left(a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{k_n}^n = b\right)$, unde $k_n \in \mathbb{N}^*$ și $\xi^n = \left(\xi_1^n, \ldots, \xi_{k_n}^n\right)$, $\xi_i^n \in \left[x_{i-1}^n, x_i^n\right]$ pentru $1 \leqslant i \leqslant k_n$.

♦ Dacă f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci numărul I_f este unic și funcția f este mărginită pe $[a, b]$, adică există un număr real $M \geqslant 0$ astfel încât $\forall x \in [a, b]$ să avem $|f(x)| \leqslant M$.

♦ Simbolul $\int$ este o alungire a literei *S*, inițiala cuvântului „Sumă” și sugerează că procesul de integrare Riemann constă în „considerarea unor sume și supunerea acestor sume operației de trecere la limită”. Notația *dx* amintește de „diferența” $x_i - x_{i-1}$, iar simbolul $f(x)dx$ amintește de termenul $f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$.

♦ Integrala $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă un număr real. Denumirea ei de integrală „definită” se folosește prin opoziție cu denumirea de integrală „nedefinită”, integrala nedefinită $\int f(x)dx$ fiind o mulțime de funcții (mulțimea tuturor primitivelor lui f pe $[a, b]$).

♦ Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci definim și integralele $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ și $\int_a^a f(x)dx = 0$.

♦ Simbolul $\int_a^b f(x)dx$ se citește „integrală de la *a* la *b* din *f* de ics (simbol) de ics”. Semnul $\int$ se numește *semn de integrare*; *a* și *b* se numesc *limite de integrare* (*a* este *limita inferioară* și *b* este *limita superioară*); *f* se numește *funcția de integrat*; intervalul $[a, b]$ se numește *interval de integrare*; $x \in \mathbb{R}$ se numește *variabilă de integrare*. Variabila de integrare se poate nota și cu alte litere, cum ar fi $s, t, u, v, y, z \in \mathbb{R}$.

ATENȚIE

Variabila de integrare *nu* joacă nici un rol în definiția integralei și, de aceea, ea poate să lipsească:

$$I_f = \int_a^b f = \int_a^b f dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy\,.$$

O scriere de forma $\int_a^x f(x)dx$ nu are sens deoarece limita de integrare și variabila de integrare au roluri diferite și *nu* pot fi notate la fel. Integrala se poate scrie $\int_a^x f(t)dt$, cu $x \in [a, b]$, ceea ce va însemna că integrăm restricția $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ și $a \leqslant t \leqslant x$.

EXEMPLE

1) Fie un număr $c \in \mathbb{R}$ și fie funcția constantă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $\forall x \in [a, b]$. Vom arăta că f este integrabilă și $\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b-a)$.

Soluție. Fie o diviziune arbitrară $\Delta = (a = x_0 < \dots < x_n = b)$ și un sistem $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de puncte intermediare asociat lui Δ. Avem relațiile

$$\sigma_\Delta(f;\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c\cdot(x_i - x_{i-1}) = c\cdot(x_n - x_0) = c\cdot(b-a)$$

În continuare, vom face un raționament de trecere la limită. Fie un șir arbitrar $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și fie un șir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme de puncte intermediare, ξ^n asociat lui Δ_n $(n \in \mathbb{N})$. Rezultă că

$$\exists \lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f;\xi^n) = \lim_{n\to\infty} c\cdot(b-a) = c\cdot(b-a).$$

Conform definiției, f este integrabilă și $\int_a^b c\cdot dx = c\cdot(b-a)$.

2) Fie un număr $m \in \mathbb{N}^*$ și fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^m$, $\forall x \in [a, b]$. Vom arăta că f este integrabilă și $\int_a^b x^m dx = \dfrac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$.

Soluție. Derivata $f'(x) = m \cdot x^{m-1}$ este mărginită, deci $\exists M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leqslant M, \forall x \in [a, b]$.

Conform formulei creșterilor finite, $\forall x < y$ din $[a, b]$, $\exists c \in (x, y)$ astfel încât să avem

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)\cdot(x-y)| = |f'(c)|\cdot|x-y| \leqslant M\cdot|x-y|.$$

Fie primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ a lui f.

Fie o diviziune arbitrară $\Delta = (a = x_0 < \dots < x_n = b)$ și un sistem $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de puncte intermediare asociat lui Δ. Pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$, aplicăm formula creșterilor finite funcției F pe $[x_{i-1}, x_i]$ și deducem că $\exists z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât să avem

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(z_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(z_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Lui Δ îi asociem sistemul „*special*" de puncte intermediare $\zeta = (z_1, \dots, z_n)$ (citim *zeta*) și deducem relațiile

$$\sigma_\Delta(f;\zeta) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

$$|\sigma_\Delta(f;\xi) - (F(b) - F(a))| = |\sigma_\Delta(f;\xi) - \sigma_\Delta(f;\zeta)| = \left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) - f(z_i)]\cdot(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i) - f(z_i)|\cdot(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\cdot|\xi_i - z_i|\cdot(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\cdot\|\Delta\|\cdot(x_i - x_{i-1}) = M\cdot\|\Delta\|\cdot(b-a)$$

În continuare, vom face un raționament de trecere la limită. Fie un șir arbitrar $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și fie un șir arbitrar $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme de puncte intermediare, ξ^n asociat lui Δ_n $(n \in \mathbb{N})$. Avem inegalitatea $|\sigma_{\Delta_n}(f;\xi^n) - (F(b) - F(a))| \leqslant M\cdot(b-a)\cdot\|\Delta_n\|$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} M(b-a)\|\Delta_n\| = 0$, rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f;\xi^n) = F(b) - F(a)$.

Conform definiției, f este integrabilă și $\int_a^b x^m dx = F(b) - F(a) = \dfrac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$.

3) Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $\forall x \in [a, b]$. Vom arăta că f este integrabilă și

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos b + \sin a.$$

Soluție. Vom proceda ca în exemplul anterior.

Conform formulei creșterilor finite, $\forall x < y$ din $[a, b]$, $\exists c \in (x, y)$ astfel încât să avem

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)\cdot(x-y)| = |\cos c|\cdot|x-y| \leqslant 1\cdot|x-y| = |x-y|.$$

Fie primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\cos x$ a lui f. Fie o diviziune arbitrară $\Delta = (a = x_0 < \ldots < x_n = b)$ și un sistem $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de puncte intermediare asociat lui Δ. Pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, aplicăm formula creșterilor finite funcției F pe $[x_{i-1}, x_i]$ și deducem că $\exists z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât să avem

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(z_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(z_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Lui Δ îi asociem sistemul „*special*" de puncte intermediare $\zeta = (z_1, \ldots, z_n)$ și deducem relațiile:

$$\sigma_\Delta(f;\zeta) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a);$$

$$\left|\sigma_\Delta(f;\xi) - \left(F(b) - F(a)\right)\right| = \left|\sigma_\Delta(f;\xi) - \sigma_\Delta(f;\zeta)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i) - f(z_i)\right]\cdot(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|f(\xi_i) - f(z_i)\right|\cdot(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i - z_i\right|\cdot(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|\Delta\|\cdot(x_i - x_{i-1}) = \|\Delta\|\cdot(b-a).$$

În continuare, vom face un raționament de trecere la limită. Fie un șir arbitrar $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și fie un șir arbitrar $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme de puncte intermediare, ξ^n asociat lui $\Delta_n (n \in \mathbb{N})$. Avem inegalitatea $\left|\sigma_{\Delta_n}(f;\xi^n) - (F(b) - F(a))\right| \leqslant (b-a)\cdot\|\Delta_n\|$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(b-a)\cdot\|\Delta_n\| = 0$, rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f;\xi) = F(b) - F(a)$.

Conform definiției, f este integrabilă și $\int_a^b \sin x dx = F(b) - F(a) = -\cos b + \cos a$.

4) Vom arăta că funcția lui Dirichlet $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, \text{ pentru } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, *nu este integrabilă*.

Soluție. Fie un șir $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[0, 1]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$.

Dacă luăm sistemul ξ^n asociat lui Δ_n, format din numere raționale, atunci $\sigma_{\Delta_n}(g;\xi^n) = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(g;\xi^n) = 1$. Dacă luăm sistemul ξ^n asociat lui Δ_n, format din numere iraționale, atunci $\sigma_{\Delta_n}(g;\xi^n) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(g;\xi^n) = 0$. Deoarece limitele precedente sunt diferite, funcția g *nu* este integrabilă Riemann.

5) Vom arăta că funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ pentru } x \in (0, 1] \end{cases}$, *nu este integrabilă*.

Soluție. Avem $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{x} = \infty$, deci funcția f *nu* este mărginită. Conform observațiilor și comentariilor de la definiția integralei, funcția f *nu* este integrabilă.

6) Vom arăta că funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [-1, 0) \\ 1, \text{ dacă } x \in [0, 1] \end{cases}$ este integrabilă și *nu* admite primitive.

Soluție. $f([-1, 1]) = \{0, 1\}$ *nu* este interval, deci f *nu* are proprietatea lui Darboux, deci f *nu* admite primitive. Fie o diviziune $\Delta = (-1 = x_0 < \ldots < x_n = 1)$ și un sistem $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de puncte asociat lui Δ. Atunci $\exists k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ astfel încât $x_{k-1} < 0 \leqslant x_k$; $f(\xi_i) = 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant k - 1$ și $f(\xi_i) = 1$ pentru $k + 1 \leqslant i \leqslant n$. Rezultă:

$$\sigma_\Delta(f;\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = 0 + f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} 1\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) + 1 - x_k;$$

$$\left|\sigma_\Delta(f;\xi) - 1\right| = \left|f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) - x_k\right| \leqslant 1\cdot(x_k - x_{k-1}) + x_k \leqslant \|\Delta\| + \|\Delta\| = 2\|\Delta\|.$$

Luând un șir arbitrar $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[-1, 1]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și un șir arbitrar $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme de puncte intermediare, ξ^n asociat lui Δ_n, avem $\left|\sigma_{\Delta_n}(f;\xi^n) - 1\right| \leqslant 2\cdot\|\Delta_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{converge}} 0$.

Rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f;\xi^n) = 1$. Conform definiției, f este integrabilă și $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați norma diviziunilor următoare ($n \geqslant 2$, $r = b - a$):

a) $\Delta = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right)$;

b) $\Delta_n = \left(n, \sqrt{n^2+1}, \sqrt{n^2+2}, ..., \sqrt{n^2+2n}, n+1\right)$;

c) $\Delta = \left(a, \frac{3a+2b}{5}, \frac{2a+3b}{5}, b\right)$;

d) $\Delta_n = \left(a, a+\frac{r}{2^n}, a+2\frac{r}{2^n}, ..., a+(2^n-1)\frac{r}{2^n}, b\right)$.

2. Reprezentați în plan subgraficul Γ_f și suma Riemann $\sigma_\Delta = \sigma_\Delta(f;\xi)$; calculați σ_Δ, în următoarele situații:

a) $f:[1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2}$;

$\Delta = \left(1, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}, 2\right)$; $\xi = \left(\frac{10}{8}, \frac{12}{8}, \frac{15}{8}\right)$.

b) $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin^2 x$;

$\Delta = (0; 0{,}3; 0{,}8; 1{,}3; 1{,}8; 2{,}3; 2{,}8; \pi)$;

$\xi = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right)$.

c) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$;

$\Delta = (0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1)$;

$\xi = \left(\frac{2}{18}; \frac{4}{16}; \frac{7}{13}; \frac{8}{12}; \frac{9}{11}\right)$.

3. Reprezentați subgraficul Γ_f; reprezentați și calculați suma Riemann $\sigma_\Delta = \sigma_\Delta(f;\xi)$, în următoarele situații:

a) $f: [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2$;

$\Delta = (2; 2{,}1; 2{,}5; 2{,}8; 3\}$; $\xi = (2{,}1; 2{,}2; 2{,}7; 2{,}9)$;

b) $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$; $\Delta = (1; 1{,}2; 1{,}4; 1{,}6; 1{,}8; 2)$;

$\xi = \left(\frac{20}{17}; \frac{20}{16}; \frac{20}{14}; \frac{20}{11}\right)$.

c) $f: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$;

$\Delta = (-0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 1{,}5; 2)$; $\xi = \left(-\frac{1}{4}; 0{,}5; 1; 1{,}5; 2\right)$.

4. Folosind definiția integrabilității, arătați că au loc formulele următoare ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$):

a) $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a \quad (a > 0)$;

b) $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$;

c) $\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a$.

5. Folosind definiția integrabilității, arătați că au loc formulele următoare ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$):

a) $\int_a^b x^c dx = \frac{b^{c+1} - a^{c+1}}{c+1} \quad (a > 0; c \neq -1)$;

b) $\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a$;

c) $\int_a^b c^x dx = \frac{c^b - c^a}{\ln c} \quad (c > 0; c \neq 1)$.

6. Folosind definiția, arătați că funcția f este integrabilă și calculați integrala lui f, în următoarele situații:

a) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 2, & x \in (1, 2] \end{cases}$

b) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 2) \\ 3, & x = 2 \end{cases}$;

c) $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] + 1$; ($[x]$ este partea întreagă a lui x).

7. Folosind definiția, arătați că funcțiile următoare *nu* sunt integrabile:

a) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 2, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

b) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

c) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

Proprietăți ale integralei definite. Integrarea funcțiilor continue

Așa cum am văzut, verificarea directă a integrabilității unei funcții și calculul integralei cu ajutorul definiției, sunt activități destul de complicate. De aceea, vom da proprietăți care să le simplifice. Demonstrațiile, fiind laborioase sau în afara programei, vor fi omise. Rezultatele de la exemple și probleme propuse, din secțiunea precedentă, vor fi utilizate în mod uzual.

Vom considera un interval închis și mărginit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Teoremă. *Proprietatea de liniaritate a integralei.*

Dacă funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile și dacă $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, atunci funcția combinație liniară $\lambda f + \mu g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și avem $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)dx$.

Consecințe

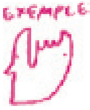
♦ În particular, $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$ și
$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

♦ Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcție polinomială, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $\forall x \in [a, b]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, atunci f este integrabilă și avem

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \int_a^b x^i dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i(b^{i+1} - a^{i+1})}{i+1}.$$

Într-adevăr, aplicăm proprietatea de liniaritate extinsă prin inducție la $n + 1$ funcții integrabile.

EXEMPLE



1) Să arătăm că există și să calculăm integrala $I = \int_1^2 (2x+3)^2 dx$.

Soluție. Funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ este funcție polinomială, deci este integrabilă și avem: $I = \int_1^2 (4x^2 + 12x + 9)dx = 4 \cdot \int_1^2 x^2 dx + 12 \cdot \int_1^2 x dx + \int_1^2 9dx =$

$$= \frac{4(2^3 - 1^3)}{3} + \frac{12(2^2 - 1^2)}{2} + 9(2-1) = 36 + \frac{1}{3}.$$

2) Să arătăm că există și să calculăm integrala $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Soluție. Avem identitatea $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezultă că funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ este combinație liniară a funcțiilor $f_1, f_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{2}$, $f_2(x) = \cos x$, care sunt integrabile (conform secțiunii precedente). Aplicând proprietatea de liniaritate, rezultă că f este integrabilă și avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Calculați următoarele integrale:

1) a) $\int_{-2}^{0} (1+x)dx$; b) $\int_0^3 (1+2x)dx$;

c) $\int_0^3 (2x-1)^2 dx$; d) $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1)dx$;

e) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^3 - x)dx$; f) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x(x^4 + 1)dx$;

g) $\int_0^1 x^2(x^2 - 1)^2 dx$; h) $\int_0^1 (x^2 + 1)^3 dx$.

2) a) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$; b) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$;

c) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$; d) $\int_0^1 \frac{2 + x^2}{1 + x^2} dx$;

e) $\int_1^e \frac{x+1}{x} dx$; f) $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x} dx$;

g) $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx$; h) $\int_{-2}^{-1} \frac{(x-1)^2}{x} dx$;

i) $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3} dx$; j) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2+5}{x^7} dx$;

k) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + x + 1}{x \cdot (x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x + (x^2+1)}{x \cdot (x^2+1)} dx$;

l) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x \cdot (x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-3x + 2(x^2+1)}{x \cdot (x^2+1)} dx$.

Indicații. Se aplică proprietatea de liniaritate. Pentru $a < b < 0$ aplicăm $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|b| - \ln|a|$.

Teoremă. *Proprietatea de aditivitate a integralei*

Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$. Atunci funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă f este integrabilă pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$. În plus, avem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

EXEMPLE

1) Să arătăm că există și să calculăm integrala $I = \int_{-1}^{3} |x^2 - 1| dx$.

Soluție. Pentru $x \in [-1, 1]$ avem $f(x) = -x^2 + 1$, deci f este funcție polinomială pe $[-1, 1]$, deci f este integrabilă pe $[-1, 1]$. Pentru $x \in [1, 3]$ avem $f(x) = x^2 - 1$, deci f este funcție polinomială pe $[1, 3]$, deci f este integrabilă pe $[1, 3]$. Conform proprietății de aditivitate, f este integrabilă și avem

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx + \int_1^3 (x^2-1)dx =$$

$$= -\frac{1^3-(-1)^3}{3} + 2 + \frac{3^3-1^3}{3} - 2 = 8.$$

2) Fie funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ x^6, \text{ dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$. Să se arate că f este integrabilă și să calculăm integrala $I = \int_0^2 f(x)dx$.

Soluție. Pentru $x \in [0, 1]$ avem $f(x) = x^2$ și pentru $x \in [1, 2]$ avem $f(x) = x^6$. Rezultă că f este funcție polinomială pe $[0, 1]$ și pe $[1, 2]$, deci f este integrabilă pe $[0, 1]$ și pe $[1, 2]$. Conform proprietății de aditivitate, f este integrabilă pe $[0, 2]$ și avem

$$I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^6 dx =$$

$$= \frac{1^3-0^3}{3} + \frac{2^7-1^7}{7} = 18 + \frac{10}{21}.$$

Definiție. Fie două funcții $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că $f \leqslant g$ (*f mai mic sau egal decât g*) dacă $\forall x \in [a, b]$ avem $f(x) \leqslant g(x)$. Spunem că f este *pozitivă* și scriem $f \geqslant 0$ dacă $\forall x \in [a, b]$ avem $f(x) \geqslant 0$.

Teoremă. *Proprietatea de monotonie a integralei*

Dacă funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile și dacă $f \leqslant g$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Consecințe

♦ Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă și pozitivă, atunci $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

♦ Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci se poate arăta că $|f|$ este integrabilă și în plus avem $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$ (*inegalitatea modulului pentru integrală*).

Într-adevăr, avem $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Conform proprietății de monotonie, obținem relațiile (echivalente cu inegalitatea din enunț):

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|.$$

Calculați următoarele integrale.

3) a) $\int_{\frac{1}{4}}^{4} \sqrt{x}dx$; b) $\int_1^4 x^2 \cdot \sqrt{x}dx$;

c) $\int_1^8 x \cdot \sqrt[3]{x}dx$; d) $\int_1^4 (x+1)\sqrt{x}dx$;

e) $\int_1^2 (x+\sqrt{x})^2 dx$; f) $\int_1^4 (x+\sqrt{x})^2 dx$;

g) $\int_1^{27} \sqrt[3]{x^2}dx$; h) $\int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

i) $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}dx$; j) $\int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$;

k) $\int_1^8 \left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx$; l) $\int_1^{32} \frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}dx$.

Indicații. Se aplică proprietatea de liniaritate. Termenii $\sqrt[n]{x}$ și $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ $(n \geqslant 2)$ se aduc la forma $x^{\frac{1}{n}}$ și $x^{-\frac{1}{n}}$. Formulă: $\int_a^b x^c dx = \frac{b^{c+1}-a^{c+1}}{c+1}$, $0 < a < b$, $c \neq -1$.

4) a) $\int_0^1 (x+e^x)dx$; b) $\int_0^1 (\sqrt{x}-2e^x)dx$;

c) $\int_0^1 \frac{e^{2x}-2}{e^x}dx$; d) $\int_{-1}^{1}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)dx$;

e) $\int_0^2 (2^{x+1}-2^x)dx$; f) $\int_0^2 \left(2^{x+1}-\frac{3}{2^x}\right)dx$;

g) $\int_{-2}^{0} \frac{2^{2x+2}-3}{2^x}dx$; h) $\int_0^1 \left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)^2 dx$;

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$;

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}dx$; l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

Indicații. Se aplică proprietatea de liniaritate. Termenii c^{mx+n} și $\frac{1}{c^x}$ se scriu sub forma $(c^m)^x \cdot c^n$ și $\left(\frac{1}{c}\right)^x$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z}$ și $c > 0$.

Pentru $a < b$, $c > 0$, $c \neq 1$ folosim formula $\int_a^b c^x dx = \frac{c^b - c^a}{\ln c}$.

• Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă și dacă există numerele reale $m \leqslant M$ astfel încât $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$, atunci, integrând, se deduc relațiile $m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M \cdot (b-a)$.

EXEMPLU

Să se arate că:

a) $1 + x \leqslant e^x$, $1+x^2 \leqslant e^{x^2}$ și $e^{x^2} \leqslant e^x$, $\forall x \in [0, 1]$;

b) $\frac{4}{3} \leqslant \int_0^1 e^{x^2} dx \leqslant e-1$.

Soluție. $\forall x \in [0, 1]$ avem $1 + x \leqslant e^x$ și $x^2 \leqslant x$, deci $1+x^2 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^x$. Conform proprietății de monotonie,

$$\frac{4}{3} = \int_0^1 (1+x^2)dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2} dx \leqslant \int_0^1 e^x dx = e-1.$$

Teoremă. *Integrabilitatea funcțiilor continue*
Orice funcție continuă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$.

EXEMPLE

1) Funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ este continuă, deci este integrabilă.

2) Funcția $f: [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$ este continuă, deci este integrabilă.

3) Funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$ este continuă, deci este integrabilă.

Teoremă. *Criteriul „special” de integrabilitate*
Fie două funcții $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$. Presupunem că g este continuă pe $[a, b]$ și $\forall x \in (a, b)$ avem $f(x) = g(x)$. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

EXEMPLU

Fie funcția $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \in [-1, 1) \\ 2, & x = 1 \\ x, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

Să arătăm că f este integrabilă și să calculăm integrala $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$. Apoi să reprezentăm subgraficul Γ_f a cărui arie este I.

Soluție. Funcția f este discontinuă în $x = 1$. Pe $[-1, 1]$, f diferă în punctul $x = 1$ de funcția continuă $g: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - x^2$. Pe $[1, 2]$, f diferă în punctul $x = 1$ de funcția continuă $h: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$. Conform criteriului „special”, f este integrabilă pe $[-1, 1]$ și pe $[1, 2]$. Conform proprietății de aditivitate, f este integrabilă pe $[-1, 2]$ și avem:

$$I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_1^2 h(x)dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 x dx = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}.$$

5) Arătați că funcțiile următoare sunt integrabile și calculați integralele lor. Reprezentați graficele și subgraficele funcțiilor de integrat.

a) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x^2, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

b) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ \sqrt{x}, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

c) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-1, 0] \\ e^{-x}, & x \in (0, 1] \end{cases}$;

d) $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$;

e) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|$;

f) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + |x-1|$;

g) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3 - 1|$;

h) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$.

Indicație. Funcțiile sunt continue și se aplică proprietatea de aditivitate.

6) Folosind criteriul „special”, arătați că funcțiile sunt integrabile și calculați integralele. Reprezentați graficele și subgraficele funcțiilor de integrat.

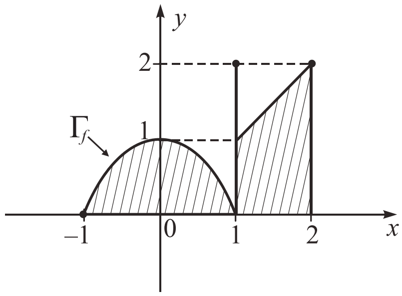
a) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 2] \\ x, & x \in (2, 4] \end{cases}$

b) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{x^2}, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

c) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$;

d) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cdot (x+1)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Subgraficul Γ_f este reprezentat ca mulțime hașurată în desenul alăturat; aria $(\Gamma_f) = \dfrac{17}{6}$.



7) Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele lor.

a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-2, 0] \\ x^2, & x \in (0, 2] \end{cases};$$

b) $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in (1, 4] \end{cases}$;

Exerciții rezolvate

1) Să arătăm că funcția $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + \cos 2x}$ este integrabilă și să calculăm integrala $I = \int_0^{2\pi} f(x)dx$. Apoi să reprezentăm subgraficul Γ_f a cărui arie este *I*.

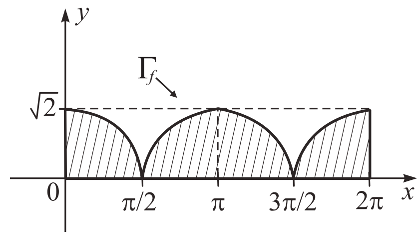
Soluție. Funcția *f* este continuă, deci *f* este integrabilă și avem $f(x) = \sqrt{2\cos^2 x} = \sqrt{2}|\cos x|$, $\forall x \in [0, 2\pi]$.

Explicităm modulul, aplicăm proprietatea de aditivitate și obținem $I = \sqrt{2} \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx \right] =$

$= \sqrt{2} \cdot \left[\sin\dfrac{\pi}{2} - \sin 0 - \left(\sin\dfrac{3\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{2} \right) + \sin 2\pi - \sin\dfrac{3\pi}{2} \right] =$

$= \sqrt{2} \cdot [1 + 2 + 1] = 4\sqrt{2}$.

Subgraficul Γ_f este reprezentat ca mulțime hașurată în desenul alăturat. Deoarece $f \geqslant 0$, avem aria $(\Gamma_f) = 4\sqrt{2}$.

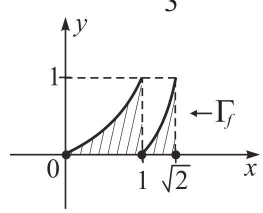


2) Să arătăm că funcția $f : [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - [x^2]$, ([*x*] este partea întreagă a lui *x*) este integrabilă și să calculăm integrala $I = \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx$. Apoi să reprezentăm subgraficul Γ_f a cărui arie este *I*.

Soluție. Funcția *f* este discontinuă în $x = 1$ și în $x = \sqrt{2}$. Pe [0, 1], *f* diferă în $x = 1$ de funcția continuă $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Pe $[1, \sqrt{2}]$, *f* diferă în $x = \sqrt{2}$ de funcția continuă $h : [1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 1$. Conform criteriului „special” și proprietății de aditivitate, *f* este integrabilă și

$$I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\sqrt{2}} f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^{\sqrt{2}} h(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 - 1)dx = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} - (\sqrt{2} - 1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Conform explicitării funcției *f*, subgraficul Γ_f este reprezentat ca mulțime hașurată în desenul alăturat. Deoarece $f \geqslant 0$, avem aria $(\Gamma_f) = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



PROBLEME PROPUSE

1. Calculați următoarele integrale definite. Reprezentați graficele funcțiilor de integrat și subgraficele lor (dacă $f \geqslant 0$).

a) $\int_0^{\sqrt{2}} x^5 dx$; b) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^5 dx$;

c) $\int_{-3}^{3} x^7 dx$; d) $\int_{-\sqrt{5}}^{-1} x^7 dx$;

e) $\int_0^2 (2x+3)dx$; f) $\int_{-1}^{1} (5-x)^2 dx$;

g) $\int_0^1 x^2(x-1)^3 dx$; h) $\int_{-2}^{2} (x^3+2x^2-3)dx$.

2. Calculați următoarele integrale definite. Reprezentați graficele și subgraficele funcțiilor de integrat.

a) $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$; b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$;

c) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x} dx$; d) $\int_1^2 \sqrt{x} dx$;

e) $\int_1^4 x\sqrt{x} dx$; f) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$;

g) $\int_1^4 \sqrt{x\sqrt{x}} dx$; h) $\int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

3. Calculați următoarele integrale definite. Reprezentați graficele și subgraficele funcțiilor de integrat.

a) $\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$; b) $\int_1^3 \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$;

c) $\int_1^8 \frac{5\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}} dx$; d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$;

e) $\int_{-1}^{1} e^x dx$; f) $\int_1^2 10^x dx$;

g) $\int_0^2 (\sqrt{2})^x dx$; h) $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

4. Calculați următoarele integrale definite. Reprezentați graficele și subgraficele funcțiilor de integrat.

a) $\int_{-2}^{2} |x| dx$; b) $\int_{-2}^{2} |x^3| dx$;

c) $\int_0^3 |x-1| dx$; d) $\int_{-1}^{2} |2x-1| dx$;

e) $\int_{-2}^{2} |x^6-1| dx$; f) $\int_{-2}^{2} (|x|-|x-1|) dx$;

g) $\int_0^3 (|x-1|+|x-2|) dx$; h) $\int_{-5}^{1} \sqrt{x^2+4x+4} dx$.

5. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele lor. Reprezentați graficele funcțiilor de integrat și subgraficele lor (dacă $f \geqslant 0$).

a) $f: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \in [0, 1] \\ (x-1)^3, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

b) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{x^2+1}, & x \in (0, 1] \end{cases}$;

c) $f: [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1+\cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$;

d) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|-|x-1|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$;

e) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \min\{|x|, |x-1|\},\ x \in [-2, 2]$;

f) $f: [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \max\{x^2, 2^x\},\ x \in [0, 4]$.

6. Calculați următoarele integrale definite. Reprezentați graficele funcțiilor de integrat și subgraficele lor (dacă $f \geqslant 0$).

a) $\int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) dx$; b) $\int_0^{2\pi} \arccos(\cos x) dx$;

c) $\int_0^{2\pi} \arcsin(\sin x) dx$; d) $\int_0^{2\pi} |\arcsin(\cos x)| dx$.

7. Reprezentați în plan subgraficul Γ_f și calculați aria lui Γ_f, pentru următoarele funcții:

a) $f: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3$;

b) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$;

c) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - |x|$;

d) $f: [-1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

8. Reprezentați în plan subgraficul Γ_f și calculați aria lui Γ_f, pentru următoarele funcții:

a) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4}{|x+1|+|x-1|}$;

b) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = |\sin x - \cos x|$;

c) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + |\sin x|$;

d) $f: [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \max\{2 - x^2, \sqrt{x}\}$.

9. Reprezentați în plan și calculați aria mulțimilor următoare:

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 \text{ și } x + y \leqslant 2\}$;

b) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ y \leqslant \sin x \text{ și } y \leqslant \cos x\right\}$;

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 - x \text{ și } xy \geqslant x - 1\}$.

10. Arătați că funcțiile următoare sunt integrabile și calculați integralele lor. Reprezentați graficele funcțiilor de integrat și subgraficele lor (dacă $f \geqslant 0$).

a) $f: [-2, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x)$;

b) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$;

c) $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = x - [x]$;

d) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cdot [2x]$;

e) $f: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$;

f) $f: \left[\frac{1}{5}, 5\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$;

g) $f: [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - [x^2]$;

h) $f: [1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{\operatorname{sgn}(x-2)}$.

11. Arătați că funcțiile următoare sunt integrabile și calculați integralele lor. Reprezentați graficele funcțiilor de integrat și subgraficele lor (dacă $f \geqslant 0$).

a) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \end{cases}$;

b) $f: [-2, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2, 1) \\ 3x - 1, & x \in [1, 4] \end{cases}$;

c) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0] \\ e^x, & x \in (0, 1] \end{cases}$;

d) $f: [1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{|x - 2|}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$.

12. Arătați că funcțiile următoare sunt integrabile și calculați integralele lor. Reprezentați graficele funcțiilor de integrat și subgraficele lor (dacă $f \geqslant 0$).

a) $f: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^6 - 1}{|x^2 - 1|}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$;

b) $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\cos 2x|}{\cos x - \sin x}, & x \neq \frac{\pi}{4} \\ 2, & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$;

c) $f: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$;

d) $f: [-5, 0] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x}{1 + x}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$.

13. Stabiliți următoarele inegalități:

a) $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \leqslant \sqrt{2}$;

b) $\sqrt{3} \leqslant \int_2^5 \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}\, dx \leqslant \sqrt{6}$;

c) $0 \leqslant \int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\, dx \leqslant 1 - \dfrac{1}{e}$.

Indicație. Se folosesc marginile funcțiilor.

14. Stabiliți următoarele inegalități:

a) $\dfrac{2}{3} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2} dx \leqslant \dfrac{\pi}{4}$;

b) $2\sqrt{e} \leqslant \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{1 - x^2} dx \leqslant 1 + e$;

c) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \leqslant \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$, unde

$f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Indicație. a) $1 + y \leqslant e^y$ luăm $y = -x^2$ și $y = x^2$.

Deducem $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{1 + x^2}$.

b) și c) Se folosesc marginile funcțiilor $e^{x^2} + e^{1 - x^2}$ și f.

Proprietatea de medie a integralei. Existența primitivelor unei funcții continue

Ca aplicație a integralei definite, vom stabili că orice funcție continuă pe un interval, admite primitive.

Teoremă. *Proprietatea de medie a integralei*

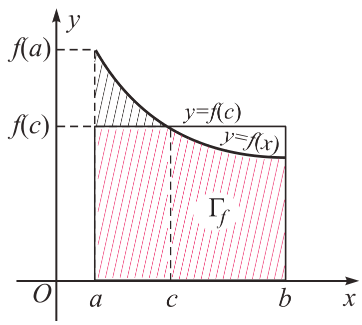
Fie un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci există un punct $c \in [a, b]$ astfel încât să avem $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Demonstrație. Deoarece f este continuă pe intervalul închis și mărginit $[a, b]$, mulțimea valorilor lui f este tot interval închis și mărginit, $f([a, b]) = [m, M]$, unde $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leqslant M$.

Pentru orice $x \in [a, b]$ avem $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Aplicând proprietatea de monotonie a integralei, obținem

$m\cdot(b-a) = \int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx = M\cdot(b-a)$, deci $m \leqslant \mu \overset{def}{=} \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx \leqslant M$.

În consecință, $\mu \in [m, M]$, deci μ este valoare a lui f, deci $\exists c \in [a, b]$ astfel încât $\mu = f(c)$. ■



Remarcă. Numărul $\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$ se numește *valoare medie* a lui f pe $[a, b]$, iar teorema arată că aceasta este atinsă de f într-un punct $c \in [a, b]$.

Interpretare geometrică. Dacă în plus $f \geqslant 0$, atunci subgraficul Γ_f (porțiunea hașurată din desenul alăturat) are aceeași arie cu dreptunghiul de bază $b - a$ și înălțime $f(c)$.

Fie funcția $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să găsim $c \in [0, 3]$ astfel încât $\int_0^3 f(x)dx = 3f(c)$.

Soluție. Avem $\int_0^3 x^2 dx = \frac{3^3}{3} = 3^2 = 3c^2$. Rezultă că $c = \sqrt{3}$. Valoarea medie a lui f este $\mu = f(c) = 3$.

Teoremă. *Existența primitivelor unei funcții continue*

Fie un interval $I \subset \mathbb{R}$, un punct $a \in I$ și o funcție continuă $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci funcția $F : I \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in I$, este o primitivă a funcției f.

Demonstrație.

Observăm că $\forall x \in I$, f este continuă pe $[a, x]$, deci este integrabilă pe $[a, x]$ și deci $\exists F(x) \in \mathbb{R}$. Fie $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, arbitrari. Presupunem $x_0 < x$. Conform proprietății de aditivitate, avem

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Conform teoremei de medie pentru f pe $[x_0, x]$, există și alegem $c_x \in [x_0, x]$ astfel încât să avem

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^x f(t)dt = f(c_x).$$

Deoarece f este continuă și $x_0 \leqslant c_x \leqslant x$, rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} c_x = x_0$ și $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} f(c_x) = f(x_0)$.

Rezultă că F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$. Deoarece x_0 este arbitrar în I, rezultă că F este derivabilă și $F' = f$, deci F este primitivă a lui f. ■

Formula Leibniz-Newton

Formula lui Leibniz (1646-1716) și Newton (1642-1727) exprimă legătura profundă dintre integrală și derivată și reprezintă un instrument principal de calcul al integralelor.

Teoremă. *Formula Leibniz-Newton*

Fie un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Presupunem că funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă și admite o primitivă $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci are loc egalitatea $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Diferența $F(b) - F(a)$ se notează $F(x)\big|_a^b$ sau $F\big|_a^b$ (citim „$F(x)$ luat de la a la b”).

Demonstrație

Fie o diviziune arbitrară $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$, $n \in \mathbb{N}^*$, a intervalului $[a, b]$.

Pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$, aplicăm formula creșterilor finite funcției F pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ și obținem un punct $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ cu proprietatea

$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ (deoarece $F' = f$).

Lui Δ îi asociem sistemul „*special*” de puncte intermediare $\zeta = (z_1, ..., z_n)$ (citim *zeta*) și avem $\sigma_\Delta(f; \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) = F\big|_a^b.$$

În continuare, facem un raționament de trecere la limită. Luăm un șir $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, luăm sistemul „*special*” de puncte intermediare ζ^n, asociat lui Δ_n, astfel încât $\sigma_{\Delta_n}(f; \zeta^n) = F\big|_a^b$.

Conform definiției integralei, rezultă că

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f; \zeta^n) = \lim_{n\to\infty} F\big|_a^b = F\big|_a^b = F(b) - F(a). \blacksquare$$

Consecință

Dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă și admite o primitivă $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ (în particular dacă f este continuă), atunci, folosind formula precedentă și continuitatea lui F, avem

$$\lim_{x \searrow a} \int_x^b f(t)dt = \lim_{x \searrow a}(F(b) - F(x)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt,$$

$$\lim_{x \nearrow b} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \nearrow b}(F(x) - F(a)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarcă

Pentru calculul integralelor cu ajutorul formulei Leibniz-Newton, este util să ne reamintim primitivele principalelor funcții uzuale. De asemenea, pentru calculul unor integrale, este util să ne reamintim și câteva formule trigonometrice.

Folosind formula Leibniz-Newton, calculați următoarele integrale.

1) a) $\int_0^1 (x-1)^5 dx$; b) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$;

c) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^5} dx$; d) $\int_1^3 \frac{2}{3x-1} dx$;

e) $\int_0^5 \frac{3x-1}{3x+1} dx$; f) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx$;

g) $\int_0^2 \frac{x^2-4}{x^2+4} dx$; h) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$.

2) a) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$; b) $\int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx$;

c) $\int_0^{12} \sqrt{2x+1} dx$; d) $\int_0^4 (2x+1)\sqrt{2x+1} dx$;

e) $\int_0^1 x\sqrt[3]{x} dx$; f) $\int_0^5 x\sqrt{3x+1} dx$;

g) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{5x+1}} dx$; h) $\int_0^3 \frac{1}{(5x+1)\sqrt{5x+1}} dx$;

i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; j) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

3) a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)^2 dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x \cdot \cos x) dx$.

Indicații. $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x)\sin x$; $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\cos x$; $\sin x + x \cdot \cos x = f'(x)$.

4) a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$;

c) $\int_0^1 (e^x + xe^x) dx$; d) $\int_1^2 (\ln x + 1) dx$.

Indicații. $4\sin^4 x = (1 - \cos 2x)^2$; $4\cos^4 x = (1 + \cos 2x)^2$; $e^x + x \cdot e^x = f'(x)$; $\ln x + 1 = g'(x)$.

Tabel de integrale nedefinite

În acest tabel, atunci când *nu* se specifică altfel, fiecare funcție de integrat se consideră definită pe orice „*interval maxim*” pe care au sens operațiile indicate în expresia funcției. Constantele sunt $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ și variabila reală este x. Formulele se verifică prin derivare:

1. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathscr{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

2. $\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + \mathscr{C}$, $a \neq -1$, $x \in (0, +\infty)$

3. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R}^*$

4. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + \mathscr{C}$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}$

5. $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + \mathscr{C}$, $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$, $x^2 - a^2 \neq 0$

6. $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + \mathscr{C}$, $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$

7. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \mathscr{C}$, $a \neq 0$, $x^2 \pm a^2 > 0$

8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + \mathscr{C}$, $a > 0$, $a^2 - x^2 > 0$

9. $\int \sin x \, dx = -\cos x + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R}$

10. $\int \cos x \, dx = \sin x + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R}$

11. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

12. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

13. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

14. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Formule facultative:

15. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \dfrac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \mathscr{C}$, $a > 0$

16. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \dfrac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \cdot \arcsin \dfrac{x}{a} + \mathscr{C}$, $a > 0$.

Aceste formule se verifică folosind proprietatea „ $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathscr{C} \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ “.

Formule trigonometrice importante (fără a mai preciza condițiile în care au loc)

Vom considera două numere reale arbitrare x și y.

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

2. $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

3. $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

4. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$; $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

5. $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

6. $\sin x + \sin y = 2\sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \sin \dfrac{x-y}{2}$

7. $\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

$\sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

Aplicarea formulei Leibniz-Newton, pe baza rezultatelor din tabel.
Toate funcțiile pe care le integrăm aici sunt continue, deci integrabile.

1) Să calculăm integrala $I=\int_2^4 x^3dx$.

Funcția $f:[2,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, admite primitiva $F:[2,4]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^4}{4}$.

$$I=F(x)\Big|_2^4=F(4)-F(2)=\frac{4^4}{4}-\frac{2^4}{4}=60.$$

2) Să calculăm integrala $I=\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x^3}dx$

Funcția $f:[-2,-1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$, admite primitiva $F:[-2,-1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}=-\dfrac{1}{2x^2}$.

$$I=F(x)\Big|_{-2}^{-1}=F(-1)-F(-2)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=-\frac{3}{8}.$$

3) Să calculăm integrala $I=\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{x-1}dx$.

Funcția $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, admite primitiva $F:[-2,0]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln|x-1|$.

$$I=F(x)\Big|_{-2}^{0}=F(0)-F(-2)=\ln 1-\ln 3=-\ln 3.$$

4) Să calculăm integrala $I=\int_0^1(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})dx$.

Conform proprietății de liniaritate, funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=x^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}$, admite primitiva

$F:[0,1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{2}{3}(\sqrt{x^3}-\sqrt{(1-x)^3})$. Verificarea se face prin derivare.

$$I=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=\frac{2}{3}(1-0)-\frac{2}{3}(0-1)=\frac{4}{3}.$$

5) Să calculăm integrala $I=\int_{-8}^{0}\sqrt[3]{x}dx$.

Funcția $f:[-8,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, admite primitiva $F:[-8,0]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}=\dfrac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}$.

$$I=F(x)\Big|_{-8}^{0}=F(0)-F(-8)=\frac{3}{4}(0-\sqrt[3]{8^4})=-\frac{3}{4}\cdot 16=-12.$$

6) Să calculăm integrala $I=\int_1^2\dfrac{1}{\sqrt{5x^2-4}}dx$. Transformăm funcția de integrat astfel încât să aplicăm o formulă din tabel.

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\right|\Bigg|_1^2=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_1^2=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

7) Să calculăm integrala $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

Conform tabelului, $I=\dfrac{1}{2}\cdot(x\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\cdot\arcsin 1=\dfrac{\pi}{4}$.

8) Să calculăm integrala $I=\int_0^2\sqrt{3x^2+4}dx$.

Transformăm funcția de integrat astfel încât să aplicăm o formulă din tabel.

$$I=\sqrt{3}\cdot\int_0^2\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left[x\cdot\sqrt{x^2+\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{4}{3}}\right)\right]\Bigg|_0^2=4+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\ln(2+\sqrt{3}).$$

9) Să calculăm integrala $I=\int_0^\pi\sin^2 x\,dx$.

Folosim identitatea $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x$, liniaritatea integralei și consultăm tabelul.

$$I=\int_0^\pi\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi\cos 2xdx=\frac{x}{2}\Big|_0^\pi-\frac{1}{4}\cdot\sin 2x\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2};\quad\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right)'=\cos 2x\right).$$

10) Să calculăm integrala $I=\int_0^\pi\operatorname{tg}\frac{x}{3}dx$.

Consultând tabelul, $\int\operatorname{tg}t\,dt=-\ln(\cos t)+\mathscr{C}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ și ținând seama că $\left(\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{3}$, avem

$$I=-3\cdot\ln\left(\cos\frac{x}{3}\right)\Big|_0^\pi=-3\cdot\left(\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\ln(\cos 0)\right)=-3\cdot\ln\frac{1}{2}=3\cdot\ln 2$$

Verificarea primitivei: $\left(-3\cdot\ln\left(\cos\frac{x}{3}\right)\right)'=-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Exerciții rezolvate.

Calculați următoarele integrale:

1) $\int_0^{12}x\sqrt{2x+1}dx=\sqrt{2}\cdot\int_0^{12}x\sqrt{x+\frac{1}{2}}dx=\sqrt{2}\int_0^{12}\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x+\frac{1}{2}}dx=\sqrt{2}\int_0^{12}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dx-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{12}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}dx=$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}+1}\Bigg|_0^{12}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^{12}=\frac{1}{10}\cdot\sqrt{(2x+1)^5}\Big|_0^{12}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(2x+1)^3}\Big|_0^{12}=391+\frac{11}{15}.$$

2) $\int_{-1}^1\left|e^{2x}-1\right|dx=\int_{-1}^0(1-e^{2x})dx+\int_0^1(e^{2x}-1)dx=\left(x-\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right)\Big|_{-1}^0+\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2x}-x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot(e^{-2}+e^2)-1$.

3) $I=\int_{-1}^1\frac{\left|x-|x|\right|}{1+|x|}dx$. Explicităm modulele și aplicăm aditivitatea și liniaritatea integralei.

$$I=\int_{-1}^0\frac{|x+x|}{1-x}dx+\int_0^1\frac{|x-x|}{1+x}dx=\int_{-1}^0\frac{-2x}{1-x}dx+\int_0^1 0dx=2\int_{-1}^0\frac{x}{x-1}dx=2\int_{-1}^0\frac{x-1+1}{x-1}dx=$$

$$=2\int_{-1}^0\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx=2\cdot\int_{-1}^0 1dx+2\int_{-1}^0\frac{1}{x-1}dx=2x\Big|_{-1}^0+2\cdot\ln|x-1|\Big|_{-1}^0=2-2\ln 2.$$

4) $\int_0^1\frac{x^2}{x^2-4}dx=\int_0^1\frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx=\int_0^1 1dx+4\int_0^1\frac{1}{x^2-2^2}dx=1+4\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_0^1=1-\ln 3$.

5) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{x^2-2}dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{x^2-(\sqrt{2})^2}dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}-\frac{2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}=\sqrt{6}-\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\,dx=-\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+\ln(\cos 0)=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}$.

7) $\int_0^\pi\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int_0^\pi\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx=\int_0^\pi\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}dx=\int_0^\pi(1-\sin x)dx=(x+\cos x)\Big|_0^\pi=\pi-2$.

8) Arătați că funcția f : [0, 1] → ℝ, $f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}, & x\in(0,1]\end{cases}$ este integrabilă și calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

Amplificând cu conjugata, $f(x)=\dfrac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}=1+\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in(0,1]$. Dar $f(0)=2=1+\sqrt{1-0^2}$, deci $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in[0,1]$. Funcția f este continuă, deci integrabilă și avem

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1+\sqrt{1-x^2})dx=\int_0^1 1dx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\cdot\left[x\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right]\Big|_0^1=1+\frac{\pi}{4}.$$

9) Arătați că funcția f : [–1, 2] → ℝ, $f(x) = (9 - x^2)^{\operatorname{sgn}(x-1)}$ este integrabilă și calculați $\int_{-1}^2 f(x)dx$. Funcția semn, $\operatorname{sgn}(x - 1) = -1$ pentru $x \in [-1, 1)$, $\operatorname{sgn}(1 - 1) = 0$ și $\operatorname{sgn}(x - 1) = 1$ pentru $x \in (1, 2]$. Rezultă că $f(x)=\dfrac{1}{9-x^2}$ pentru $x \in [-1, 1)$, $f(1) = 1$ și $f(x) = 9 - x^2$ pentru $x \in (1, 2]$.

Funcția f este discontinuă în $x = 1$. Pe [–1, 1], funcția f diferă de funcția continuă g : [–1, 1] → ℝ, $g(x)=\dfrac{1}{9-x^2}$ în punctul $x = 1$. Pe [1, 2], funcția f diferă de funcția continuă h : [1, 2] → ℝ, $h(x) = 9 - x^2$ în punctul $x = 1$. Conform criteriului „*special*” de integrabilitate, f este integrabilă pe [–1, 1] și pe [1, 2]. Conform proprietății de aditivitate, f este integrabilă pe [–1, 2] și

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_1^2 h(x)dx=\int_{-1}^1\frac{1}{9-x^2}dx+\int_1^2(9-x^2)dx=$$

$$=-\int_{-1}^1\frac{1}{x^2-3^2}dx+\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=-\frac{1}{6}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_{-1}^1+\frac{20}{3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{20}{3}.$$

10) Arătați că funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$ este integrabilă și calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Folosind descompunerea $f(x)=\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\cdot\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ și regula lui l’Hospital, se arată că $\exists\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{3}$. Fie funcția continuă $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & x=0\\ f(x), & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$. Funcția f diferă de funcția g în punctul $x = 0$. Conform criteriului „*special*”, f este integrabilă și $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$. Ultima integrală se calculează printr-un proces de trecere la limită, permis de consecința formulei Leibniz-Newton. Pentru $0<x<\frac{\pi}{2}$ avem

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(-\operatorname{ctg} t+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_x^{\frac{\pi}{2}}=\operatorname{ctg} x+\frac{2}{\pi}-\frac{1}{x}=\frac{2}{\pi}+\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}.$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_x^{\frac{\pi}{2}} g(t)dt=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=\dfrac{2}{\pi}$, deoarece, aplicând regula lui l’Hospital, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x\cdot\sin x}{2x}=0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

Calculați următoarele integrale:

1. a) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x+1)^5dx$;

b) $\int_{-2}^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{2x-1}{2x+1}dx$; d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+x}{x^2-1}dx$.

2. a) $\int_{1}^{3}\frac{x^2}{x+1}dx$; b) $\int_{-2}^{0}\frac{x+5}{(x+4)^3}dx$;

c) $\int_{0}^{3}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$; d) $\int_{0}^{3}\frac{1}{|x-2|+1}dx$.

3. a) $\int_{1}^{64}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[3]{x}}dx$; b) $\int_{-\frac{7}{3}}^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-3x}dx$;

c) $\int_{\frac{4}{5}}^{7}\sqrt[5]{5x-3}dx$; d) $\int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{(5x-4)^3}}dx$.

4. a) $\int_{0}^{3}x\sqrt{x+1}dx$; b) $\int_{0}^{4}|x-1|\sqrt{x}dx$;

c) $\int_{2}^{5}\frac{x^2}{x^2-1}dx$; d) $\int_{0}^{2}\frac{x^2+1}{x^2+4}dx$.

5. a) $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; b) $\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}dx$;

c) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$; d) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$.

6. a) $\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{3}dx$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\,dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$; d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

7. a) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$; b) $\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^2 x\,dx$; d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\cdot\cos x\,dx$.

8. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele lor.

a) $f:[-2, 8]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}, & x\in[-2, 2]\\ \sqrt{2x}, & x\in(2, 8]\end{cases}$;

b) $f:\left[-\frac{1}{4}, 2\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x+1}, & x\in\left[-\frac{1}{4}, 0\right]\\ \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, & x\in(0, 2]\end{cases}$;

c) $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}\,x, & x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\\ \mathrm{ctg}\,x, & x\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$;

d) $f:\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\min\{\mathrm{tg}\,x, \mathrm{tg}^2x\}$.

9. Arătați că funcțiile următoare sunt integrabile și calculați integralele lor.

a) $f:\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2+\mathrm{sgn}(x)}{\cos^2 x}$;

b) $f:[0, \sqrt{3}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\mathrm{sgn}(x-1)}{x^2+1}$;

c) $f:[0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)^{\mathrm{sgn}(x-1)}$;

d) $f:[-2, 0]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+1}{|x^2-1|}, & x\neq-1\\ 2, & x=-1\end{cases}$.

10. Arătați că funcțiile următoare sunt integrabile și calculați integralele lor.

a) $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\mathrm{ctg}\,x, & x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x=0\end{cases}$;

b) $f:[0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in[0, 1)\\ 0, & x=1\end{cases}$;

c) $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}+\mathrm{tg}\,x, & x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\\ 0, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$;

d) $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}-\frac{1}{\cos^2 x}, & x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\\ -\frac{1}{3}, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea funcțiilor raționale

Definiție. O *funcție rațională f*, definită pe un interval *I*, este de forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\forall x\in I$, unde $P, Q\in \mathbb{R}[X]$ și $Q(x)\neq 0$ pe *I*.

Pentru a calcula integrala definită a unei funcții raționale, va fi suficient să știm să calculăm o primitivă a sa, urmând apoi să aplicăm formula Leibniz-Newton.

Deci ne vom ocupa în cele ce urmează de metodele de calcul ale integralelor nedefinite ale funcțiilor raționale.

SĂ NE AMINTIM ... câteva integrale nedefinite ale unor funcții raționale importante. Intervalul de definiție al acestor integrale este inclus în domeniul funcției. Formulele se verifică prin derivare.

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathscr{C},\ n\in\mathbb{N};\qquad \int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+\mathscr{C}$$

$$\int x^{-n}\,dx=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}+\mathscr{C},\ n\in\{2, 3, 4, ...\}.$$

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathscr{C};\qquad \int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+\mathscr{C}$$

$$\int\frac{P'(x)}{P(x)}\,dx=\ln|P(x)|+\mathscr{C},\ \text{unde } P\in\mathbb{R}[X],\ P(x)\neq 0,\ \forall x\in I.$$

$$\int\frac{P'(x)}{1+P^2(x)}\,dx=\operatorname{arctg}P(x)+\mathscr{C},\ \text{unde } P\in\mathbb{R}[X].$$

Formulă facultativă

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right]+\mathscr{C},\ a>0$$

EXEMPLU

$$\int\frac{14x^6}{4x^{14}-4x^7+2}dx=\int\frac{(2x^7-1)'}{1+(2x^7-1)^2}dx=\operatorname{arctg}(2x^7-1)+\mathscr{C}$$

Definiție. O funcție rațională se numește *funcție rațională simplă* dacă are una din formele:

(1) $f(x)=P(x)$, $P\in\mathbb{R}[X]$

(2) $f(x)=\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $A, a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$

(3) $f(x)=\dfrac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$, $A, B, a, b\in\mathbb{R}$, $\Delta=a^2-4b<0$, $n\in\mathbb{N}^*$

Importanța funcțiilor raționale simple rezultă din următoarea...

Teoremă. Orice funcție rațională se poate descompune, în mod unic, în sumă de funcții raționale simple.

EXEMPLU

$$\frac{-4x^3+9x^2-5x+16}{(x^2+1)(x-2)^2}=\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{5}{x-2}.$$

Verificați egalitatea prin aducere la același numitor.

1) Calculați următoarele integrale nedefinite și precizați un interval de definiție:

a) $\int(x^5-2x+1)\,dx$; b) $\int\left(x^3-\dfrac{3}{x}\right)dx$;

c) $\int\dfrac{3x^2}{x^3-1}dx$; d) $\int\dfrac{x^5-2x+1}{x^3}dx$;

e) $\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx$; f) $\int\dfrac{2x}{1+x^4}dx$;

g) $\int\dfrac{2x}{(1+x^2)^3}dx$; h) $\int\dfrac{x^7-3x^4+1}{x^2+1}dx$;

i) $\int\left(2x^2+3-\dfrac{5}{x}\right)dx$;

j) $\int\left(2x^5+x-\dfrac{5}{x^2+1}\right)dx$;

k) $\int\dfrac{12x^3-x+2}{3x^4-\dfrac{x^2}{2}+2x-\sqrt{2}}dx$;

l) $\int\dfrac{6x-1}{1+(3x^2-x+5)^2}dx$;

m) $\int\dfrac{2x-3}{x^4-6x^3+11x^2-6x+2}dx$.

2) Aplicați teorema împărțirii cu rest pentru împărțirea polinomului *P* la polinomul *Q* și apoi descompuneți funcția $f=\dfrac{P}{Q}$ în funcții raționale simple.

a) $P=(X-1)^3$, $Q=X$

b) $P=(X-1)^3$, $Q=X+2$

c) $P=(X-1)^3$, $Q=X^2-1$

d) $P=(X^2-X+1)^2$, $Q=(X-1)^3$

e) $P=X^4-1$, $Q=X^3$

f) $P=X^5-X+1$, $Q=-3X^2$

g) $P=(X-1)^3$, $Q=X+1$

h) $P=X^6+2$, $Q=X+1$

i) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=X+1$

j) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=(X+2)^2$

k) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=X^2(X+2)^2$

l) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=\dfrac{1}{2}X^2$

Pentru a integra funcțiile raționale este suficient să știm:
I. cum descompunem o funcție rațională în funcții raționale simple;
II. cum integrăm funcțiile raționale simple.

Să tratăm pe rând aceste două cerințe.

I. Descompunerea în funcții raționale simple – temă de sinteză

Fie $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)},\ P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Conform teoremei împărțirii cu rest, există și sunt unice polinoamele $C,\ R\in\mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x)=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ și $\text{grad}R<\text{grad}Q$. Pentru a descompune $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ în funcții raționale simple, descompunem polinomul Q în factori ireductibili, care pot fi numai de gradul I (de forma $x-a$) sau de gradul II (de forma x^2+ax+b, cu $a^2-4b<0$). Distingem mai multe cazuri în care este necesar să determinăm coeficienții reali A, B, C, ... de la numărătorul funcțiilor raționale simple.

Dacă $\text{grad}Q=1$, atunci $\dfrac{R(x)}{x-a}=\dfrac{A}{x-a}$ (pentru $Q(x)=x-a$).

Dacă $\text{grad}Q=2$, putem avea una dintre următoarele situații:

- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^2}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}$ (pentru $Q(x)=(x-a)^2$);
- $\dfrac{R(x)}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$ ($a\neq b$, $Q(x)=(x-a)(x-b)$);
- $\dfrac{R(x)}{x^2+ax+b}=\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ ($Q(x)=x^2+ax+b$, $a^2-4b<0$).

Dacă $\text{grad}Q=3$, putem avea una dintre următoarele situații:

- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^3}=\dfrac{A}{(x-a)^3}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-a}$ (pentru $Q(x)=(x-a)^3$);
- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^2(x-b)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}+\dfrac{C}{x-b}$ ($Q(x)=(x-a)^2(x-b)$);
- $\dfrac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$;
- $\dfrac{R(x)}{(x^2+ax+b)(x-c)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}+\dfrac{C}{x-c}$.

Dacă $\text{grad}Q=4$, putem întâlni mai multe situații dintre care vom prezenta numai două:

- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^2(x^2+bx+c)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}+\dfrac{Cx+D}{x^2+bx+c}$;
- $\dfrac{R(x)}{(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}+\dfrac{Cx+D}{x^2+cx+d}$.

Celelalte cazuri se obțin considerând toate descompunerile posibile ale unui polinom de gradul IV în factori ireductibili de gradul I și II. De fiecare dată când unul dintre factori apare la o putere $n>1$ vom considera toate funcțiile raționale simple care au la numitor acel factor la o putere $k\leqslant n$, $k\in\mathbb{N}$.

m) $P=X^5-X^2-4X+2,\ Q=\sqrt{2}X-1$

n) $P=X^5-X^2-4X+2,\ Q=X-\sqrt{2}$

3) Descompuneți în funcții raționale simple:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-6x^2+11x-6}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4-2x^2+1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^4+x^2+1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{(x^2+1)(x-2)^2}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-x+7}{(x+1)^3x}$

Indicații.

a) $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,

$$\frac{1}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Aducem la același numitor și identificăm coeficienții termenilor de același grad.

Obținem sistemul $\begin{cases}A+B+C=0\\5A+4B+3C=0\\6A+3B+2C=1\end{cases}$

cu soluțiile $A=\dfrac{1}{2},\ B=-1,\ C=\dfrac{1}{2}$,

ca urmare, $f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}=...$

b) $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$.

$$\frac{x^2+x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

Prin identificare obținem sistemul

$$\begin{cases}A+C=0\\A+B-C+D=1\\-A+2B-C-2D=1\\-A+B+C+D=1\end{cases}$$

cu soluțiile $A=0,\ B=\dfrac{3}{4},\ C=0,\ D=\dfrac{1}{4}$.

c) $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

$$\frac{x-1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

d) $\dfrac{x^2-2}{(x^2+1)(x-2)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{(x-2)^2}+\dfrac{D}{x-2}$

e) $\dfrac{x^3-x+7}{(x+1)^3x}=\dfrac{A}{(x+1)^3}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{x}$

Pentru calcularea coeficienților care apar la numărătorul funcțiilor raționale simple, sunt două metode:

Metoda I.

Identificarea coeficienților polinoamelor obținute prin aducerea la același numitor a funcțiilor raționale.

Metoda II.

Dăm valori necunoscutei în ecuația obținută după aducerea la același numitor a funcțiilor raționale.

Exerciții rezolvate.

Să descompunem în funcții raționale simple următoarele funcții:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$;

Soluții. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, deci $\dfrac{x}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$; obținem $x=A(x-3)+B(x-2)$.

Metoda I. Avem $x=x(A+B)-3A-2B$. Identificăm coeficienții polinoamelor; obținem $\begin{cases}A+B=1\\3A+2B=0\end{cases}$, de unde $A=-2$, $B=3$ și $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

Metoda II. În identitatea $x=A(x-3)+B(x-2)$, dăm lui x, pe rând, valorile $x=2$ și $x=3$: $\begin{cases}2=A(2-3)+B(2-2)\\3=A(3-3)+B(3-2)\end{cases}$. Obținem $B=3$ și $A=-2$, de unde $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$

Soluții. Avem $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$; $\dfrac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$. Prin aducere la același numitor obținem $x+1=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$.

Metoda I.

$x+1=x^2(B+C)+x(A-3B-2C)-2A+2B+C$,

de unde $\begin{cases}B+C=0\\A-3B-2C=1\\-2A+2B+C=1\end{cases}$. Rezolvăm sistemul și obținem $A=-2$, $B=-3$, $C=3$,

$f(x)=-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-2)}$.

Metoda II. Dăm lui x, pe rând, valorile 0, 1, 2 în identitatea $x+1=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$.

Obținem sistemul $\begin{cases}1=A(-2)+B(-1)(-2)+C(-1)^2\\2=A(-1)+B\cdot 0+C\cdot 0\\3=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 1^2\end{cases}$.

Soluția sistemului este $A=-2$, $B=-3$, $C=3$,

$f(x)=-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-2)}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-x^3+x-1}$.

Soluții. $x^4-x^3+x-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$. Avem $\dfrac{1}{x^4-x^3+x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$,

$1=A(x+1)(x^2-x+1)+B(x-1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)$.

Metoda I. Identificăm coeficienții în ecuația $1=x^3(A+B+C)+x^2(-2B+D)+x(2B-C)+A-B-D$

Obținem $\begin{cases}A+B+C=0\\-2B+D=0\\2B-C=0\\A-B-D=1\end{cases}$, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{-1}{6}$, $C=\dfrac{-1}{3}$, $D=\dfrac{-1}{3}$

Rezultă $f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{6(x+1)}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

Metoda II. Dăm lui x valorile 1, –1 și $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, care este o soluție a ecuației $x^2-x+1=0$. Obținem $\begin{cases}1=A\cdot 2\\1=B\cdot(-2)\cdot 3\\1=\left(C\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+D\right)\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}\end{cases}$, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{6}$, $C=-\dfrac{1}{3}$, $D=-\dfrac{1}{3}$

$f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{6(x+1)}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

II. Integrarea funcțiilor raționale simple.

♦ $$\boxed{\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)\,dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots + a_0 x + \mathscr{C}}.$$

♦ $$\boxed{\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \mathscr{C},\ n \in \{2, 3, 4, \dots\}}.$$

♦ $$\boxed{\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + \mathscr{C}}.$$

♦ *Calculul integralelor* $\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}dx$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(x^2+ax+b)'}{x^2+ax+b}dx + \left(B - \frac{1}{2}Aa\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+ax+b) + \frac{2B-aA}{\sqrt{|\Delta|}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{|\Delta|}} + \mathscr{C}.$$

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+ax+b) + \frac{2B-aA}{\sqrt{|\Delta|}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{|\Delta|}} + \mathscr{C}}.$$

Nu trebuie să reținem această formulă, ci doar modul de calcul.

♦ *Integrale de forma* $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^2}dx$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

Vom calcula integrala cu ajutorul unor integrale mai simple:

1) $\int \frac{t}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \mathscr{C}$

2) $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \mathscr{C}$, conform formulelor recapitulative.

3) $\int \frac{pt+q}{(t^2+1)^2}dt = p\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} + q\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{-p+qt}{2(1+t^2)} + \frac{q}{2}\operatorname{arctg} t + \mathscr{C}$

4) $\int f(pt+q)\,dt = \frac{1}{p}F(pt+q) + \mathscr{C}$, $\forall f$ continuă și $F \in \int f(t)\,dt$

5) $\int \frac{pt+q}{(t^2+r^2)^2}dt = \frac{1}{r^3}\int \frac{p\frac{t}{r} + \frac{q}{r}}{\left[\left(\frac{t}{r}\right)^2 + 1\right]^2}dt = \frac{1}{r^2}F\left(\frac{t}{r}\right)$, cu $F \in \int \frac{ps + \frac{q}{r}}{(s^2+1)^2}ds$

6) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^2}dx = 8\int \frac{A(2x+a) + 2B - aA}{\left[(2x+a)^2 + |\Delta|\right]^2}dx = 8F(2x+a) + \mathscr{C}$,

unde $F \in \int \frac{pt+q}{(t^2+r^2)^2}dt$, $p = A$, $q = 2B - aA$, $r = \sqrt{|\Delta|}$.

4) Calculați integralele următoare și verificați prin derivare obținut rezultatul:

a) $\int (x^3 - 7)\,dx$ b) $\int \left(-\frac{1}{2}x^{100} - \sqrt{2}\right)dx$

c) $\int \frac{-2\,dx}{(x-2)^2}$ d) $\int \frac{3\,dx}{(x+3)^5}$

e) $\int \frac{dx}{(3x-2)^5}$ f) $\int \frac{dx}{x+1}$

g) $\int \frac{-3\,dx}{3x-2}$ h) $\int \frac{dx}{x^2+1}$

i) $\int \frac{dx}{x^2 + \sin^2 a}$ j) $\int \frac{dx}{x^2 + \operatorname{tg}^2 a}$

k) $\int \frac{dx}{4x^2+1}$ l) $\int \frac{2\,dx}{4x^2+3}$

m) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ n) $\int \frac{3x+5}{x^2+x+1}dx$

o) $\int \frac{2x-3}{x^2 - 2x\cos a + 1}dx$ p) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+2}$

q) $\int \frac{(-x+1)\,dx}{x^2+2x+2}$ r) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

s) $\int \frac{dx}{(4x^2+1)^2}$ t) $\int \frac{dx}{(4x^2+3)^2}$

u) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$ v) $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}$

x) $\int \frac{(-x+2)\,dx}{(4x^2+1)^2}$ y) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2x+5)^2}$

5) Calculați integralele nedefinite ale următoarelor funcții raționale:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+5}$

c) $f: (a, b) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{(a-b)x}{x^2 - (a+b)x + ab}$

d) $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)(x+3)}$

e) $f: (0, 3) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^3 - 9x}$

f) $f: (3; \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x(x^2-1)(x^2-9)}$

g) $f: (1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^4+1}{(x-1)^2}$

Exerciții rezolvate.

1) Să calculăm: $\int \frac{dx}{x^4-x^3+x-1}$, $0<x<1$ și $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4-x^3+x-1}$.

Soluție. $x^4 - x^3 + x - 1 = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)$. Descompunem în funcții raționale simple:

$$f(x)=\frac{1}{x^4-x^3+x-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{6(x+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1};\ \int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{6}\ln(x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx .$$

$$\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\mathscr{C} .$$

Rezultă: $\int f(x)\,dx=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-x)^3}{x^3+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\mathscr{C}$ și $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^4-x^3+x-1}=\frac{1}{6}\ln\frac{7}{18}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{9}$.

2) Calculați: $I=\int_0^1\frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2}dx$.

Soluție. $\int\frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+4x+5)'}{(x^2+4x+5)^2}dx-3\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}-3\mathscr{I}$, unde $\mathscr{I}=\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$.

$$\mathscr{I}=\int\frac{dx}{\left[(x+2)^2+1\right]^2}=F(x+2)+\mathscr{C}\text{ , unde } F\in\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+\mathscr{C} .$$

$$\mathscr{I}=\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+\frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+4x+5}+\mathscr{C}$$

$$\int\frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2}dx=-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}-3\mathscr{I}=-\frac{1}{2}\frac{3x+7}{x^2+4x+5}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+\mathscr{C}\text{ . Rezultă } I=\frac{1}{5}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7} .$$

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați integralele nedefinite ale următoarelor funcții raționale:

a) $f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}$, $x>2$

b) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}$, $x<-1$

c) $f(x)=\frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$

2. Calculați următoarele integrale definite:

$\int_{-1}^{0}\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^3(x+2)}dx$; $\int_0^1\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}dx$;

$\int_0^2\frac{x^2-1}{x^3+5x^2+8x+4}dx$; $\int_1^2\frac{x^2+2}{x(x^2+1)(x^2+4)}dx$;

$\int_{-3}^{-2}\frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx$; $\int_0^1\frac{3x-2}{x^3+2x^2+2x+1}dx$;

$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$; $\int_3^4\frac{x^2-x+1}{x^4-8x^2+12}dx$;

$\int_2^3\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2-6x+10)}dx$.

3. Calculați:

a) $\int_2^3\frac{x^2}{x^2-1}dx$;

b) $\int_1^2\frac{2x+1}{x^2(x+1)}dx$;

c) $\int_0^2\frac{x^2}{1+|x-1|}dx$.

4. Calculați: $\int\frac{(x+3)dx}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$, pe un interval pe care $x(x+2)(x+4)(x+6)\neq 0$

5. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f'(x)=m\cdot g(x)$ și $g'(x)=n\cdot f(x)$, m, n constante nenule.

a) Calculați $\int\frac{f(x)dx}{af(x)+bg(x)}$, pe un interval pe care $af(x)+bg(x)\neq 0$.

b) Aplicație: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$.

Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea prin părți și schimbarea de variabilă

Metodele de calcul urmăresc transformarea unor integrale „complicate“ în integrale care să poată fi calculate mai ușor.

Vom considera două intervale I, $J \subset \mathbb{R}$ și două variabile de integrare $x \in I$, $t \in J$.

Vom mai considera două funcții f, $g : I \to \mathbb{R}$ continue și o funcție $\varphi : J \to I$ derivabilă, cu derivata $\varphi' : J \to \mathbb{R}$ continuă.

Teoremă. *Formula de integrare prin părți.*

Presupunem că funcțiile f, $g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele f', $g' : I \to \mathbb{R}$ continue. Fie două numere a, $b \in I$.

Atunci: $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$.

Demonstrație.

Formula de derivare a produsului a două funcții derivabile, $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ \forall x \in I$, arată că funcția produs $f \cdot g$ este o primitivă a funcției $f' \cdot g + f \cdot g'$.

Folosind formula Leibniz-Newton și liniaritatea integralei, obținem $(f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx =$ $= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$, adică

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx. \ \blacksquare$$

Observații.

♦ Uneori, se folosește *scrierea pur formală* $f'(x)\,dx = df(x)$, care face ca relația să capete un aspect simetric:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x).$$

♦ Formula se aplică ori de câte ori funcția de integrat se poate descompune în produsul a două „părți“ $f(x)$ și $g'(x)$, alese astfel încât $\int_a^b g(x)f'(x)\,dx$ să fie mai ușor de calculat.

♦ Formula de integrare prin părți pentru integrala nedefinită

Presupunem că f și g sunt derivabile și cu derivatele continue. Conform formulei de integrare prin părți, pentru orice a, $x \in I$ avem

$$\int_a^x f(t) \cdot g'(t)dt = f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^x g(t) \cdot f'(t)dt.$$

Deoarece x este arbitrar, conform teoremei de existență a primitivei unei funcții continue, formula precedentă se scrie

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx,\ x \in \mathrm{I}}.$$

EXEMPLU

Să se calculeze integrala $\mathcal{I} = \int_0^1 xe^{2x}\,dx$.

Soluție. Luăm funcția $f(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Rezultă

1) Calculați următoarele integrale cu ajutorul formulei de integrare prin părți:

a) $\int_1^2 \ln x dx$; b) $\int_0^1 \ln(3x+1)dx$;

c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$; d) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_1^2 (\ln x)(x)'dx$;

b) $\int_0^1 (\ln(3x+1))(x)'dx$;

c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} x)(x)'dx$;

d) $\int_0^{\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}\right)' dx$.

2) Calculați următoarele integrale cu ajutorul formulei de integrare prin părți:

a) $\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$;

b) $\int_0^{2\pi} x \cos x\,dx$;

c) $\int_1^2 x \ln x\,dx$;

d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x \arcsin x\,dx$.

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_0^{2\pi} x\,(-\cos x)'dx$;

b) $\int_0^{2\pi} x\,(\sin x)'dx$;

c) $\int_1^2 \ln x \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx$;

d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx$.

3) Calculați următoarele integrale cu ajutorul formulei de integrare prin părți:

a) $\int_0^1 x2^x\,dx$;

b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

că $g'(x) = e^{2x}$, deci putem lua $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$. Înseamnă că am făcut alegerea: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$, $a=0$, $b=1$. Funcțiile f și g verifică ipotezele din teoremă. Rezultă

$$\mathscr{I}=\int_0^1 xe^{2x}dx=\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\cdot(x)'dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

Calculul lui I poate fi prezentat schematic astfel:

$f(x) = x$, $g'(x) = e^{2x}$; $f'(x) = 1$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

$$\mathscr{I}=\int_0^1 \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^{2x}}_{g'}dx=\underbrace{x}_{f}\underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{g}\Bigg|_0^1-\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{g}\cdot\underbrace{1}_{f'}\,dx.$$

Teoremă. *Formula de schimbare de variabilă.*
Presupunem că funcția $\varphi : J \to I$ este derivabilă, cu derivata continuă și funcția $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă. Fie două numere $\alpha, \beta \in J$. Atunci: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx$.
Se fac schimbările, de variabilă și de simbol,

$\varphi(t) = x$ și $\varphi'(t)dt = dx$, $t \in J$ și $x \in I$.

Demonstrație.
Constatăm că $\varphi(\alpha), \varphi(\beta) \in I$. Funcția f fiind continuă, admite o primitivă $F : I \to \mathbb{R}$, deci $F' = f$. Formula de derivare a funcției compuse, $(F\circ\varphi)'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, $\forall t\in J$, arată că $F\circ\varphi$ este o primitivă a funcției $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.
Conform formulei Leibniz-Newton, aplicată de două ori, avem

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=F\circ\varphi\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}=$$

$$=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx. \blacksquare$$

Observații.

♦ Schimbând rolul variabilelor x și t, formula se mai scrie

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(t)\,dt.$$

Se fac schimbările, de variabilă și de simbol,

$\varphi(x)=t$ și $\varphi'(x)\,dx=dt$, $x\in J$ și $t\in I$.

♦ Dacă trebuie să transformăm integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, unde $a, b \in I$, atunci, „*citind invers formula*“, trebuie ca a și b să fie valori ale lui φ, adică trebuie ca să existe $\alpha, \beta \in J$ astfel încât $\varphi(\alpha) = a$ și $\varphi(\beta) = b$. În acest caz,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Se fac schimbările, de variabilă și de simbol,

$x = \varphi(t)$ și $dx = \varphi'(t)dt$, $t \in J$ și $x \in I$.

c) $\int_1^2 x\ln\frac{x+1}{x}dx$;

d) $\int_0^1 x^3\operatorname{arctg}x\,dx$.

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_0^1 x\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)'dx$;

b) $\int_1^e \ln x\left(-\frac{1}{x}\right)'dx$;

c) $\int_1^2 \ln\frac{x+1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx$;

d) $\int_0^1 \operatorname{arctg}x\left(\frac{x^4}{4}\right)'dx$.

4) Calculați integralele următoare cu ajutorul a două integrări prin părți:

a) $\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$; b) $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$;

c) $\int_{-1}^1 x^2e^{2x}dx$; d) $\int_{-1}^1 x^2e^{-x}dx$.

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_0^\pi x^2(-\cos x)'dx$; b) $\int_0^\pi x^2(\sin x)'dx$;

c) $\int_{-1}^1 x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$; d) $\int_{-1}^1 x^2\left(-e^{-x}\right)'dx$.

5) Calculați integralele următoare, folosind formula de integrare prin părți:

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$; b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}x\operatorname{ctg}^2x\,dx$;

c) $\int_0^{2\pi}e^x\sin x\,dx$; d) $\int_0^{2\pi}e^x\cos x\,dx$.

Indicații.

a) $\frac{1}{\sin^2 x}=(-\operatorname{ctg}x)'$;

b) $\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$;

c), d) se integrează de două ori prin părți.

♦ Folosind „*scrierea pur formală*“ $d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$, formula de schimbare de variabilă devine $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

♦ Formula de schimbare de variabilă pentru integrala nedefinită

Presupunem că $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă și $\varphi : J \to I$ este derivabilă, cu derivata continuă. Conform formulei de schimbare de variabilă, pentru orice α, $t \in$ ($y \in J$, $x \in I$) avem

$$\boxed{\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)dy = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx}.$$

Deoarece t este arbitrar, conform teoremei de existență a primitivei unei funcții continue, formula precedentă se scrie

$$\boxed{\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right) \circ \varphi}.$$

Dacă φ este inversabilă, atunci, compunând cu φ^{-1}, avem

$(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt) \circ \varphi^{-1} = \int f(x)dx$.

EXEMPLE

1) Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

Apoi reprezentăm subgraficul Γ_f, a cărui arie este I.

Soluție. Avem $(\cos x + \sin x)' = \cos x - \sin x$, deci integrala are forma $\mathscr{I} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x}(\cos x + \sin x)'dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$.

Luăm: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$; $\varphi(x) = \cos x + \sin x = t$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

$f(t) = \frac{1}{t}$, $\forall t \in (0, \infty)$. Funcțiile care rezultă, $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to (0, \infty)$ și $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, verifică ipotezele din teoremă: φ este derivabilă, cu derivata continuă și f este continuă. Făcând schimbările, de variabilă și de simbol, $\varphi(x) = \cos x + \sin x = t$ și $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx = (\cos x - \sin x)dx = dt$, obținem

$$\mathscr{I} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/4)} f(t)\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt = \ln t \Big|_1^{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}.$$

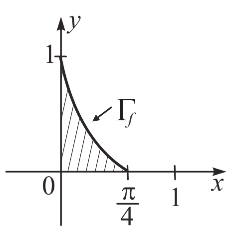
Calculul lui I poate fi prezentat schematic astfel:

$$\mathscr{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx \;\left|\; \begin{array}{c} \cos x + \sin x = t,\ t \in (0, \infty) \\ (\cos x + \sin x)'dx = dt \end{array} \;\right|\; \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{array}$$

$$\mathscr{I} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt = \ln\sqrt{2}.$$

Pentru grafic, calculăm derivatele $f'(x) = -2(\cos x + \sin x)^{-2} < 0$ și $f''(x) \geqslant 0$.

Subgraficul Γ_f este reprezentat de mulțimea hașurată din desenul alăturat. Avem aria $(\Gamma_f) = \ln\sqrt{2}$.



6) Uitlizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1}dx$;

b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}dx$;

c) $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$;

d) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}dx$;

e) $\int_0^1 \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}dx$;

f) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$;

g) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)e^x dx$.

Indicații.

a), b), d), f) $x^2 = t$; c) $x^3 + 1 = t$;

e) $x - \frac{1}{2} = t$; g) $\ln x = t$; h) $e^x \sin x = t$.

7) Utilizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2x\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{1 - \cos x}dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \sin x}dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos x}dx$;

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

Indicații. a) $\cos x = t$; b) $\sin x = t$;

c) $\cos x = t$; d) $\text{ctg}\frac{x}{2} = t$; e) $\frac{\pi}{2} - x = t$;

f) $\cos x = t$; g) $\sin x = t$; h) $\cos x = t$.

8) Utilizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^6 x}dx$;

2) Să calculăm integrala $\mathscr{I}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Soluție. Notăm $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}$, $\forall x\in(0,1]$. Pentru a scăpa de radicali, facem schimbarea de variabilă $x=\varphi(t)=\sin^2 t$, $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Avem: $\varphi(t)\in(0,1]$, $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$; funcția $\varphi:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to(0,1]$ este derivabilă, cu derivata continuă; numerele $\frac{1}{2}$ și 1 sunt valori ale lui φ și anume, pentru $t=\frac{\pi}{4}$, $x=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$ și pentru $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$; $dx=\varphi'(t)dt=2\sin t\cos t dt$. Aplicând teorema, rezultă

$$\mathscr{I}=\int_{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t+\sin t}\cdot 2\sin t\cos t\,dt=$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t+1}dt=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)\,dt=2(t+\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2};$$

$$\left(\frac{\cos^2 t}{1+\sin t}=1-\sin t\right).$$

Calculul lui I poate fi prezentat schematic astfel:

$$\mathscr{I}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}dx\;\left|\;\begin{array}{l} x=\sin^2 t,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \\ dx=(\sin^2 t)'dt=2\sin t\cos t\,dt\end{array}\;\right|\;\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=1\end{array}$$

$$\mathscr{I}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t+\sin t}2\sin t\cos t\,dt=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}.$$

Aplicație. *Funcții pare și funcții impare* – **teme de sinteză**

Fie un număr $a>0$, o funcție continuă $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ și integrala $\mathscr{I}=\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$.

Făcând schimbarea de variabilă $x=-t$, $\forall\, t\in[-a,0]$, avem

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{a}^{0}f(-t)\cdot(-1)\,dt=-\int_{a}^{0}f(-t)dt=\int_{0}^{a}f(-t)dt=\int_{0}^{a}f(-x)\,dx.$$

Dacă f este *funcție pară* ($f(-x)=f(x)$, $\forall\, x\in[-a,a]$), atunci

$$\mathscr{I}=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}f(-x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{a}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx.$$

Dacă f este *funcție impară* ($f(-x)=-f(x)$, $\forall\, x\in[-a,a]$), atunci $\mathscr{I}=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}f(-x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=$

$$=-\int_{0}^{a}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=0.$$

c) $\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$;

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx$

Indicații. a), b) $\operatorname{tg}x=t$; c) $\cos x=t$; d) $\cos x+\sin x=t$.

9) Arătați că avem relațiile:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x\,dx$;

b) $\int_{0}^{1}x^a(1-x)^b\,dx=\int_{0}^{1}x^b(1-x)^a\,dx$ $(a,b>0)$

Indicații. Se fac schimbările de variabilă:

a) $x=\frac{\pi}{2}-y$; b) $x=1-y$.

10) Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}2\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$. Arătați că f este continuă și calculați $\int_{0}^{1}f(x)dx$.

Indicație. Se simplifică fracția cu $\sqrt{x}-1$ și se face schimbarea de variabilă $x=t^2$.

11) Fie funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\in(0,1]\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

Arătați că f este continuă și calculați $\int_{0}^{1}f(x)dx$.

Indicație. Se amplifică fracția cu conjugata numărătorului, se simplifică, se notează $\sqrt{x+1}=t$ și se face schimbarea de variabilă $x=t^2-1$.

12) Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$,

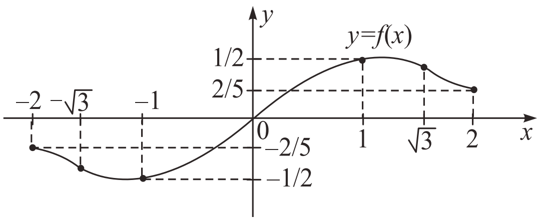
$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}, & x\in[-1,1]\setminus\{0\}\\ 2, & x=0\end{cases}$.

Arătați că f este continuă și calculați $\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

1) $\int_{-2}^{2} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$.

Într-adevăr, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, este funcție impară.

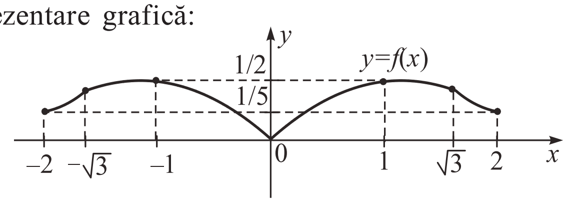
Pentru a reprezenta grafic funcția, stabilim semnele derivatelor $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ și $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Graficul lui f este simetric față de O și este reprezentat în figura următoare.



2) $\int_{-2}^{2} \frac{|x|}{1+x^2} dx = 2\int_{0}^{2} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{0}^{2} \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2)\Big|_0^2 = \ln 5$.

Într-adevăr, $f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, este funcție pară.

Deoarece graficul lui f este simetric față de axa Oy și f coincide cu funcția precedentă pe $[0, 2]$, rezultă următoarea reprezentare grafică:



Aplicație. *Funcții periodice* – **temă de sinteză**

Fie un număr $T > 0$ și o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $\forall\, x \in A$ să avem $x \pm T \in A$. Fie o funcție continuă $f : A \to \mathbb{R}$, periodică de perioadă T (adică $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x \in A$). Atunci $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ și $\forall\, a, b \in A$, $a < b$, astfel încât $[a, b] \subset A$, avem

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Într-adevăr, în prima integrală se face schimbarea de variabilă $x = y + nT$, $\forall\, y \in [a, b]$.

Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_0^{\pi} |\sin 5x| dx$ și să reprezentăm subgraficul funcției de integrat.

Rezolvare. Făcând schimbarea de variabilă $x = \frac{t}{5}$, $\forall t \in [0, 5\pi]$, avem $\mathscr{I} = \int_0^{5\pi} |\sin t| \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \cdot \int_0^{5\pi} |\sin t| dt$.

Funcția $f(t) = |\sin t|$, $\forall t \in \mathbb{R}$, este periodică de perioadă $T = \pi$. Conform proprietății de aditivitate a integralei și aplicației 2, avem:

$$\mathscr{I} = \frac{1}{5}\left[\int_0^{\pi}|\sin t|dt + \int_{\pi}^{2\pi}|\sin t|dt + \int_{2\pi}^{3\pi}|\sin t|dt + \int_{3\pi}^{4\pi}|\sin t|dt + \int_{4\pi}^{5\pi}|\sin t|dt\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|dt = \frac{1}{5}\cdot\sum_{i=0}^{4}\int_0^{\pi}|\sin t|dt = \frac{1}{5}\cdot 5\int_0^{\pi}\sin t\, dt = -\cos t\Big|_0^{\pi} = 2.$$

Indicație. Se amplifică fracția cu conjugata numitorului și se face schimbarea de variabilă $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\mathscr{I} = \int_{-1}^{1} (1 + \sqrt{1-x^2})\, dx = 2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$.

13) Utilizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+3} dx$; b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$;

c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$; d) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

Indicații. Se fac schimbările de variabilă: a), b) $x = t^2$; c), d) $x = \sin^2 t$. Se obțin integralele:

a) $\int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+3} dt$;

b) $\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t} dt$;

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\, dt$;

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\sin t)\sin t\, dt$.

14) Calculați integralele următoare:

a) $\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1+x}}{2+x} dx$; b) $\int_0^3 \frac{1}{3+\sqrt{1+x}} dx$;

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos x} dx$.

Indicații.

a), b) Se notează $\sqrt{1+x} = t$ și se face schimbarea de variabilă $x = t^2 - 1$.

c) Se notează $e^x = t$ și se face schimbarea de variabilă $x = \ln t$.

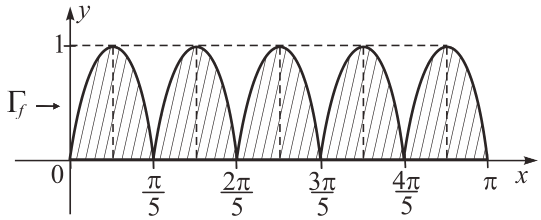
d) Se notează $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ și se face schimbarea de variabilă $x = 2\mathrm{arctg}\, t$.

15) Calculați integralele următoare:

a) $\int_{-2}^{2} \frac{x^9}{1+x^2+x^4} dx$; b) $\int_{-1}^{1} |x| e^{x^2} dx$.

Indicații. Funcții: a) impară; b) pară.

Subgraficul funcției $g(x)=|\sin 5x|,\ \forall x\in[0,\ \pi]$ este hașurat în figura următoare și are aria 2.



16) Calculați integralele următoare:

a) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4|x|+4}dx$;

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin|2x|\,dx$.

Indicație. Funcțiile de integrat sunt pare.

Exerciții rezolvate.

1) Să calculăm integrala $\mathscr{I}=\int_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Soluție. Fie funcția (continuă) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ \forall x\in(0,\infty)$. Facem schimbarea de variabilă $x=\varphi(t)=t^2,\ \forall t\in(0,\infty)$; funcția $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ este derivabilă, cu derivata continuă; pentru $t=1$ avem $x=1$ și pentru $t=\sqrt{e}$ avem $x=e$; $dx=\varphi'(t)dt=2tdt$. Aplicând formula de schimbare de variabilă, rezultă $\mathscr{I}=\int_{\varphi(1)}^{\varphi(\sqrt{e})}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln(t^2)}{t}2t\,dt=4\int_1^{\sqrt{e}}\ln t\,dt$. Utilizând metoda integrării prin părți (evident, ipotezele se verifică), deducem că $\mathscr{I}=4\int_1^{\sqrt{e}}(\ln t)(t)'dt=4t\ln t\Big|_1^{\sqrt{e}}-4\int_1^{\sqrt{e}}t\cdot(\ln t)'dt=2\sqrt{e}-4\int_1^{\sqrt{e}}1dt=4-2\sqrt{e}$.

„Părțile“ au fost: $g(t)=\ln t$, $h'(t)=1$; $g'(t)=\frac{1}{t},\ h(t)=t\quad(t>0)$.

2) Să calculăm integrala $\mathscr{I}=\int_0^{\pi}x\cdot\sin x\,dx$.

Soluție. Luăm „părțile“: $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$; $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$ ($x\in\mathbb{R}$). Aplicând formula de integrare prin părți (evident, ipotezele se verifică), deducem că

$$\mathscr{I}=\int_0^{\pi}x\cdot(-\cos x)'dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)(x)'dx=\pi+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

3) Să calculăm integrala $\mathscr{I}=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{(x+1)^2}dx$.

Soluție. Fie „părțile“: $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2},\ \forall x\in[0,1]$. Rezultă:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2};\quad\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}+\mathscr{C}\ \text{ și luăm }\ g(x)=-\frac{1}{x+1}.$$

Aplicăm formula de integrare prin părți (evident, ipotezele se verifică) și obținem

$$\mathscr{I}=\int_0^1(\operatorname{arctg}x)\left(-\frac{1}{x+1}\right)'dx=-\frac{\operatorname{arctg}x}{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}\right)(\operatorname{arctg}x)'dx=-\frac{\pi}{8}+\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx.$$

Folosind metoda coeficienților nedeterminați, obținem descompunerea în fracții simple:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)\qquad\left(A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}\right).$$

Deoarece $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$, rezultă

$$\mathscr{I}=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 2.$$

4) Să calculăm integrala $\mathscr{I}=\int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}dx$.

Soluție. Integrala se poate calcula descompunând funcția de integrat în fracții simple. Observând însă că funcția de integrat se poate aduce la forma

$$f(x)=\frac{x^5}{x^3+1}=\frac{x^3\cdot x^2}{x^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{x^3+1}\cdot(x^3)',\ \forall x\in[0,1],$$

integrala se calculează, mai simplu, cu schimbarea de variabilă $\varphi(x)=x^3=t$, cu $x, t\in[0, 1]$.

Funcția $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ este derivabilă, cu derivata continuă; $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este continuă; $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Făcând schimbările, de variabilă și de simbol, $\varphi(x)=x^3=t$ și $\varphi'(x)dx=3x^2dx=dt$ rezultă

$$\mathscr{I}=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)}\frac{x^3}{x^3+1}\cdot 3x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{t}{t+1}dt=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{3}(t-\ln(t+1))\Big|_0^1=\frac{1}{3}(1-\ln 2).$$

5) Să calculăm integrala $\mathscr{I}=\int_{1/5}^5\frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

Soluție. Deoarece *nu* putem găsi o primitivă a funcției de integrat, vom apela la un artificiu de calcul. Vom face schimbarea de variabilă $x=\varphi(y)=\frac{1}{y}$, cu $x,y\in\left[\frac{1}{5},5\right]$. Funcția $\varphi:\left[\frac{1}{5},5\right]\to(0,\infty)$ este derivabilă, cu derivata continuă; funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$ este continuă; $\frac{1}{5}=\varphi(5)$ și $5=\varphi\left(\frac{1}{5}\right)$;

$dx=\left(\frac{1}{y}\right)'dy=-\frac{1}{y^2}dy$. Rezultă: $\mathscr{I}=\int_{\frac{1}{5}}^5 f(x)dx=\int_{\varphi(5)}^{\varphi\left(\frac{1}{5}\right)}f(x)dx=\int_5^{\frac{1}{5}}f(\varphi(y))\varphi'(y)dy=$

$$=\int_5^{\frac{1}{5}}\frac{\ln\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=-\int_5^{1/5}\frac{-\ln y}{y^2+1}dy=\int_5^{1/5}\frac{\ln y}{1+y^2}dy=-\int_{1/5}^5\frac{\ln y}{1+y^2}dy=-\int_{1/5}^5\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\mathscr{I}.$$

La sfârșit, am scris limitele de integrare în ordine crescătoare (cu schimbarea semnului integralei) și am înlocuit variabila y cu variabila x.

Se obține ecuația $\mathscr{I}=-\mathscr{I}$, care are soluția unică $\mathscr{I}=0$, deci $\mathscr{I}=0$.

6) Să calculăm integrala $I=\int_{-1}^1|x|\cdot(\arcsin x)^2dx$.

Soluție. Funcția de integrat este pară, deci $I=2\int_0^1 x\cdot(\arcsin x)^2dx$.

Formula de integrare prin părți *nu* se aplică deoarece funcția *nu* este derivabilă în 1.

Facem schimbarea de variabilă $x=\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ și avem $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin t\cdot\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin 2t dt$.

Integrăm de două ori prin părți și obținem $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cdot\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)'dt=-\frac{t^2\cos 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cos 2t dt=\frac{\pi^2}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)'dt=$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{t\cdot\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{2}dt=\frac{\pi^2}{8}+0+\frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}.$$

7) *Deducerea formulei facultative* $\boxed{I=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2a^2}\cdot\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right]+\mathscr{C},\ a>0.}$

Soluție. Aplicăm formula de integrare prin părți (observație) și obținem

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int\frac{1}{x^2+a^2}\cdot(x)'dx=\frac{x}{x^2+a^2}-\int x\cdot\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)'dx=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=$$

$$=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{1}{x^2+a^2}dx-2a^2\cdot J.$$

Rezolvăm și avem $I=\frac{1}{2a^2}\cdot\left[\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{1}{x^2+a^2}dx\right]=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]+\mathscr{C}$.

8) *Deducerea formulei facultative.* $\boxed{I=\int\sqrt{x^2+a}dx=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a}+a\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|]+\mathscr{C},\ a\neq 0}$, unde funcția $f(x)=\sqrt{x^2+a}$ este definită pe un interval I pe care $x^2+a>0$.

Soluție. Avem $I=\int\sqrt{x^2+a}dx=\int\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx+a\cdot\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx+a\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$

Ultima integrală nedefinită se calculează prin părți:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int x\cdot(\sqrt{x^2+a})'dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}dx=x\sqrt{x^2+a}-I.$$

Prin urmare avem $I=x\sqrt{x^2+a}-I+a\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$, de unde $2I=x\sqrt{x^2+a}+a\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+\mathscr{C}$.

9) *Deducerea formulei facultative.* $\boxed{I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}\right]+\mathscr{C},\ a>0}$.

Soluție. Formula are loc pe intervalul $(-a, a)$. Avem

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\cdot\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}dx}=a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Ultima integrală nedefinită se calculează prin părți:

Prin urmare avem $I=a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-I$, de unde $2I=a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}+\mathscr{C}$.

Aplicație.

Considerăm un mobil care se mișcă în intervalul de timp $[0, u]$ cu viteza $v(t)$, accelerația $a(t)$ și parcurge în primele t (secunde) distanța $s(t)$, $t\in[0, u]$. Care este relația dintre accelerația, viteza și spațiul parcurs de acest mobil?

Să studiem câteva exemple simple:

1) Mișcarea cu viteză constantă v. Avem $v(t)=v$ constant pe un interval $[0, u]$. Accelerația mobilului la momentul t este $a(t)=v'(t)=0$. În intervalul $[0, t]$ mobilul parcurge spațiul $s(t)=\int_0^t v(x)dx=\int_0^t vdx=v\cdot t$. Avem $s'(t)=v(t)=v$.

2) Mișcarea unui mobil cu accelerație constantă $a(t)=a$, $t\in[0, u]$. Avem: $v(t)=\int_0^t a(x)dx=\int_0^t adx=at$, $v'(t)=a$; $s(t)=\int_0^t v(x)dx=\int_0^t ax\,dx=\frac{at^2}{2}$; $s'(t)=v(t)=at$.

Este cazul căderii corpurilor în câmp gravitațional. Accelerația gravitațională pe Terra este constantă $g\cong 9{,}8$ m/s^2. Viteza obiectului după t secunde este $v(t)=gt$ și distanța parcursă de obiect după t secunde de cădere liberă este $s(t)=\frac{gt^2}{2}$.

1. Aplicând metoda de integrare prin părți, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\cdot\mathrm{tg}^2 x\,dx$;

c) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(1+\cos x)\,dx$.

2. Aplicând metoda de integrare prin părți, calculați următoarele integrale:

a) $\int_1^3(x^2+1)e^{x-1}dx$; b) $\int_0^2 e^x\cdot\min\{1, x^2\}dx$;

c) $\int_0^{\pi}(x\cdot\sin x)^2\,dx$; d) $\int_0^{\pi}(x\cdot\cos x)^2\,dx$.

3. Aplicând metoda de integrare prin părți, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$; b) $\int_0^{\pi}e^{x}\cdot\cos x\,dx$;

c) $\int_1^e\sin(\ln x)dx$; d) $\int_1^e\cos(\ln x)dx$.

4. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$; b) $\int_{e^e}^{e^3}\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)e^x\,dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

5. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+\cos x + \sin x} dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$;

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x} dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{\sin^6 x} dx$.

6. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx$; b) $\int_0^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$;

c) $\int_0^1 \frac{1+2\sqrt{x}}{1+x} dx$; d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$.

7. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$; b) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$;

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}} dx$; d) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$.

8. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \arcsin x\, dx$; b) $\int_0^1 \arccos x\, dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}} dx$.

9. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^5+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-2|x|+2} dx$;

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin^4 x} dx$; d) $\int_{-1}^1 |x^3| e^{-x^2} dx$.

10. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\arcsin x|\, dx$; b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\operatorname{arc\,tg} x|\, dx$;

c) $\int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{x^6+1} dx$; d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x|}{4-\sin^2 x} dx$.

Indicații: Se va studia paritatea funcțiilor.

11. Calculați următoarele integrale ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $\int_0^{\pi} |\sin nx|\, dx$; b) $\int_0^{\pi} \arcsin|\sin nx|\, dx$.

Indicații: $nx = t$ și explicitarea modulelor.

12. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x+1} dx$; b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x+1} dx$;

c) $\int_0^1 x\sqrt{1-\sqrt{x}}\, dx$; d) $\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$.

13. Calculați următoarele integrale ($a > 0$):

a) $\int_0^a \frac{x^4+a^2x^2}{x^3+a^3} dx$; b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$;

c) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

14. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\cos x|}{1+\cos x} dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x - \sin x|}{1+\cos x+\sin x} dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{2-3\sin^2 x} dx$.

15. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-1}^1 x \cdot \arccos x\, dx$; b) $\int_0^1 x^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} x\, dx$;

c) $\int_0^1 \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx$; d) $\int_0^1 \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Indicații: a) $x = \cos t$; b), c), d) integrare prin părți.

16. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele indicate:

a) $\int_{-1}^1 f(x)dx$, $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{1-\sqrt{1-x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

b) $\int_0^1 f(x)dx$; $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \end{cases}$

c) $\int_0^2 f(x)dx$; $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \max\{\ln(1+x), \ln(1+x^2)\}$, $\forall x \in [0, 2]$.

17. Calculați următoarele integrale ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $\int_{-2}^2 \sqrt{|x^2-1|}\, dx$; b) $\int_0^1 x \cdot \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx$;

c) $\int_{-1}^0 \sqrt{4x^2+4x+4}\, dx$; d) $\int_0^1 \frac{1-n\sqrt{x}}{1+n\sqrt{x}} dx$.

18. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$; b) $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;

c) $\int_{-1}^1 (x-1)\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\, dx$; d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{x}\, dx$.

19. Calculați următoarele integrale ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $\int_0^{\pi} \frac{1}{5-4\sin x}\, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin 2x}\, dx$;

c) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\, dx$; d) $\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos nx\, dx$.

20. Calculați următoarele integrale ($a > 0$):

a) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)\, dx$;

c) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx$; d) $\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2}\, dx$.

21. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\pi} \frac{x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\, dx$.

22. Aplicând metoda integrării prin părți, stabiliți o relație între integralele I_n și $I_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$ și calculați I_0, I_1, I_2, I_3, în următoarele cazuri:

a) $\mathscr{I}_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx$;

b) $\mathscr{I}_n = \int_0^1 x^{2n}\cdot\sqrt{1-x^2}\, dx$;

c) $\mathscr{I}_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x\, dx$;

d) $\mathscr{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1} x}\, dx$.

23. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie $\mathscr{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Stabiliți o relație între I_n și I_{n-2} ($n \geqslant 2$) și calculați I_0, I_1, I_2, I_3.

24. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie $\mathscr{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx$. Stabiliți o relație între I_n și I_{n-1} ($n \geqslant 2$) și calculați I_0, I_1, I_2, I_3.

Teste de evaluare

Test 1

(2p) **1.** Fie funcția $f: [0; 3] \to \mathbb{R}$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}, & \text{dacă } x \in (0, 3] \\ 2 & ,\text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Arătați că f este continuă și calculați integrala $\int_0^3 f(x)\, dx$.

(2p) **2.** Calculați integrala $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)}\, dx$.

(2p) **3.** Calculați integrala $\int_0^5 \ln(x+|x-2|)\, dx$.

(2p) **4.** Calculați integrala $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x|}{3+\sin^2 x}\, dx$.

(1p) **5.** Calculați integrala $\int_0^9 e^{\sqrt{x}}\, dx$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Test 2

(2p) **1.** Fie funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , \text{dacă } x = 1 \end{cases}.$$

Arătați că f este continuă și calculați $\int_0^1 f(x)\, dx$.

(2p) **2.** Calculați integrala $\int_2^3 \frac{x+1}{x(x-1)^2}\, dx$.

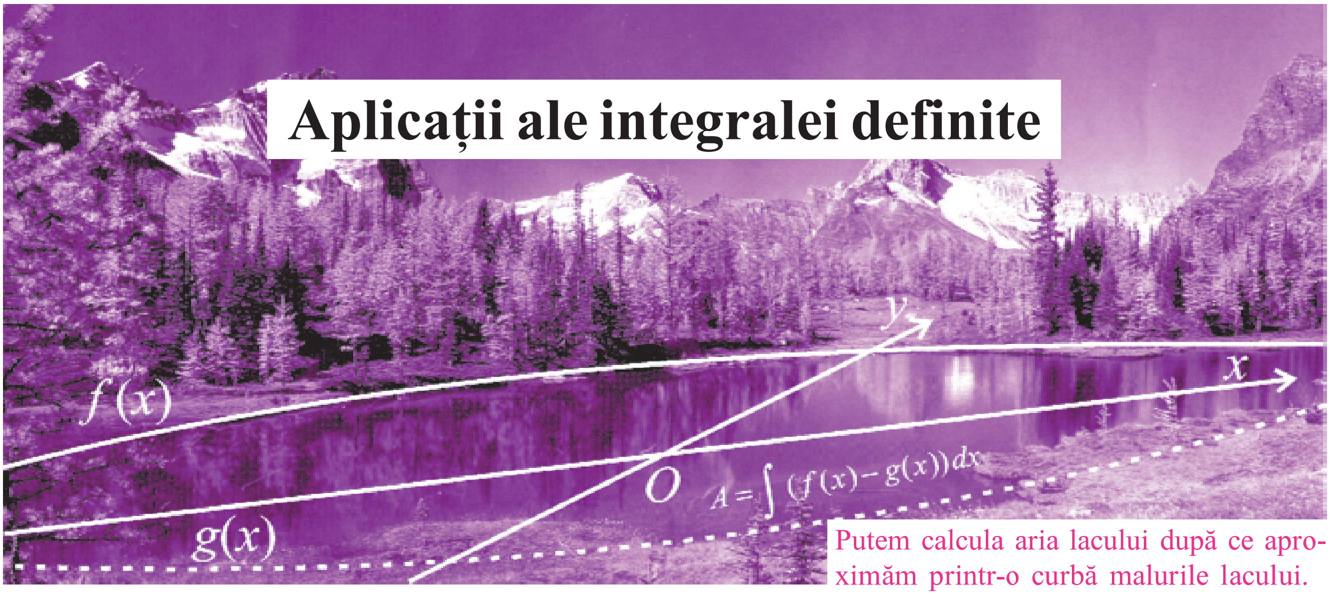
(2p) **3.** Calculați integrala $\int_0^3 x\cdot e^{x+|x-1|}\, dx$.

(2p) **4.** Calculați integrala $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$.

(1p) **5.** Calculați integrala $\int_{-1}^1 x\cdot\arcsin x\, dx$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Aplicații ale integralei definite



Putem calcula aria lacului după ce aproximăm printr-o curbă malurile lacului.

Aria unei suprafețe plane

În acest paragraf ne propunem să prezentăm o aplicație importantă a integralei definite și anume calculul ariei unor suprafețe plane.

Știm, din lecțiile de geometrie plană, să calculăm arii pentru poligoane.

Cu ajutorul tehnicilor dezvoltate la integrala Riemann, vom arăta că dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci mulțimea

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ și } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

numită subgraficul lui f, are arie, mai precis avem următoarea teoremă:

Teorema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcție continuă, atunci Γ_f are arie și aria suprafeței Γ_f este $\int_a^b f(x)dx$.

Demonstrație

Fie $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b)$, $n \geqslant 1$ un șir de diviziuni astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

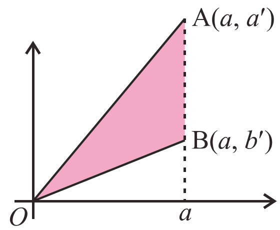
Pentru $(\xi^n)_{n\geqslant 1}$, $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_{p_n}^n)$, sistem de puncte intermediare asociat lui Δ_n, suma

$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \sum\limits_{i=1}^{p_n} f\left(\xi_i^n\right)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de forma:

$\left[x_{i-1}^n, x_i^n\right] \times \left[0, f(\xi_i^n)\right]$, deci intuitiv, pentru diviziuni de normă tinzând la zero, obținem aproximări ale ariei mulțimii Γ_f. Cum f continuă, deci integrabilă Riemann, prin trecere la limită obținem:

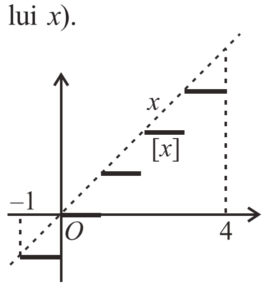
$$\text{aria}(\Gamma_f) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \int_a^b f(x)dx.$$

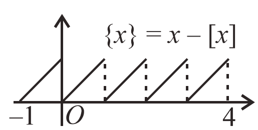
1) Calculați cu ajutorul integralei aria ΔOAB, unde $A(a, a')$, $B(a, b')$



Indicație. OA este graficul funcției $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a'}{a}x$.

2) Calculați aria subgraficului funcției $\{x\} = x - [x]$ pe $[-1, 4]$ (unde $\{x\}$ este partea fracționară și $[x]$ este partea întreagă ale lui x).





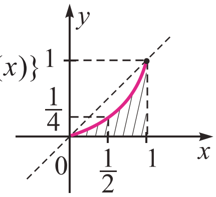
3) Calculați cu ajutorul sumelor Riemann și separat, prin formula Leibniz-Newton, aria suprafeței dintre graficele funcțiilor $x \mapsto x$ și $x \mapsto x^2$, între intersecțiile acestor grafice.

EXEMPLU

Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$

$\Gamma_f = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ și } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

și reprezintă suprafața hașurată din figura alăturată (fig. 1) vom avea:



$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Fig. 1

Putem extinde teorema 1 pentru situații mai generale și anume:

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcții continue cu proprietatea că $f(x) \leqslant g(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$.

Considerăm mulțimea:

$$\boxed{\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ și } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}},$$

adică *mulțimea cuprinsă între graficele celor două funcții și dreptele verticale $x = a$ și $x = b$.*

EXEMPLU

Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g(x) = \sqrt{x}$. Știm că f și g sunt continue și $g(x) \geqslant f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$ și avem:

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ și } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\},$$

suprafață reprezentată în figura 2.

Pentru calculul ariei suprafeței $\Gamma_{f,g}$ vom utiliza următorul rezultat.

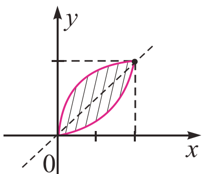


Fig. 2

Teorema 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât $f(x) \leqslant g(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$. Atunci

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

Demonstrație.

Fie $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b)$ un șir de diviziuni astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Pentru $(\xi^n)_{n\geqslant 1}$, $\xi^n = \left(\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_{p_n}^n\right)$ sistem de puncte intermediare asociat lui Δ_n, suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \left(g\left(\xi_k^n\right) - f\left(\xi_k^n\right)\right) \cdot \left(x_k^n - x_{k-1}^n\right)$$

reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de forma:

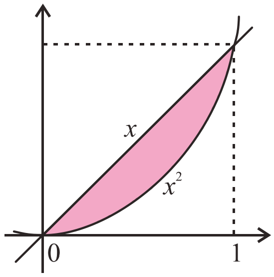
$\left[x_{k-1}^n, x_k^n\right] \times \left[f\left(\xi_k^n\right), g\left(\xi_k^n\right)\right]$ și deci intuitiv pentru diviziuni cu norma tinzând la zero, obținem aproximări ale ariei mulțimii $\Gamma_{f,g}$, iar prin trecere la limită, obținem:

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(g(\xi_k^n) - f(\xi_k^n)\right)\left(x_k^n - x_{k-1}^n\right) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx. \ ■$$

EXEMPLU

Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, 1]$

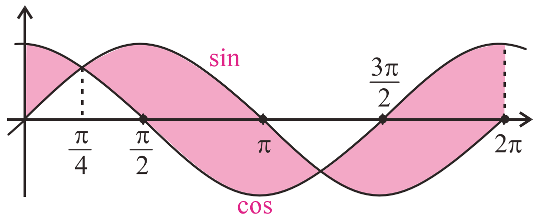
$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Indicație. Se calculează abscisele punctelor de intersecție ale graficelor.

4) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor sin și cos pe intervalul $[0, 2\pi]$.

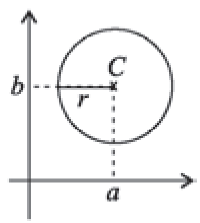
Indicație. Se calculează abscisele punctelor de intersecție ale graficelor. Se stabilesc intervalele pe care $\sin x > \cos x$ pentru a explicita $|\sin x - \cos x|$.



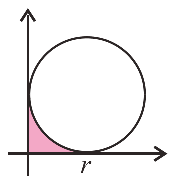
5) Explicitați funcțiile ale căror grafice descriu cercul $\mathcal{C}(C, r)$:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Calculați aria cercului $\mathcal{C}(C, r)$.



6) Calculați aria suprafeței hașurate.



7) Calculați integrala $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ prin schimbarea de variabilă $x = r \cos t$.

8) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor f, g dacă

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$, $x \in [1, 3]$;

b) $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, $x \in [0, 2]$;

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $x \in [-1, 1]$.

Aplicație. *Aria cercului* – **temă de inteză**

Reamintim că cercul de centru O și rază r, $r > 0$ reprezintă locul geometric al punctelor din plan aflate la distanța r de punctul O.

Notăm $\mathscr{C}(0, r)$ cercul de centru O și rază r care are ecuația carteziană generală:

$$\mathscr{C}(O, r): x^2 + y^2 = r^2$$

și trecând la ecuația explicită

$$\mathscr{C}(O, r): \ y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

deducem că aria $\left(\mathscr{C}(O, r)\right) = \text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right)$, unde:

$$f, g : [0, r] \to \mathbb{R}, \ f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \ \text{ și } \ g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Vom demonstra că:

$$\boxed{\text{aria } (\mathscr{C}(O, r)) = \pi r^2}$$

$$\text{aria}(\mathscr{C}(O, r)) = \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2}))dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx =$$

$$= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Cu ajutorul schimbării de variabilă $x = r\sin t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, deducem:

$$\text{aria}(\mathscr{C}(0, r)) = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cos t dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = 4r^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\right) =$$

$$= 4r^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = r^2 \cdot \pi.$$

Aplicație. *Aria elipsei* – **temă de sinteză**

Elipsa reprezintă locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor față de două puncte fixe, numite focare, constantă.

Știm din clasa a XI-a că ecuația carteziană generală a elipsei este:

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Utilizând ecuațiile explicite: $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ deducem că aria $(\mathscr{E}) = \text{aria } (\Gamma_{f,g})$, unde

$$f, g : [-a, a] \to \mathbb{R}, \ f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \ \text{ iar } \ g(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Vom demonstra că:

$$\boxed{\text{aria}(\mathscr{E}) = \pi ab.}$$

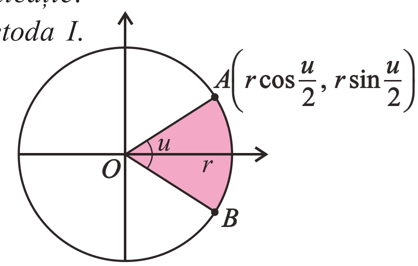
$$\text{aria}(\mathscr{E}) = \text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_{-a}^{a} (g(x) - f(x))dx = \int_{-a}^{a} \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx =$$

$= \dfrac{2b}{a} \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{4b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Utilizând schimbarea

9) Într-un cerc de rază r, considerăm două raze care fac unghiul u (în radiani). Aria sectorului de cerc dintre cele două raze este $\dfrac{ur^2}{2}$.

Indicație.

Metoda I.



Sectorul de cerc AOB este situat între graficele funcțiilor $f, g : [0, r] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{tg}\dfrac{u}{2}, & x \leqslant r\cos\dfrac{u}{2} \\ \sqrt{r^2 - x^2}, & x > r\cos\dfrac{u}{2} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} -x\,\text{tg}\dfrac{u}{2}, & x \leqslant r\cos\dfrac{u}{2} \\ -\sqrt{r^2 - x^2}, & x > r\cos\dfrac{u}{2} \end{cases}.$$

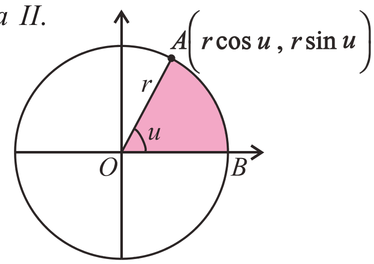
$$S = \int_0^r (f(x) - g(x))\,dx =$$

$$= 2\int_0^{r\cos\frac{u}{2}} x\,\text{tg}\frac{u}{2}dx + 2\int_{r\cos\frac{u}{2}}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2\text{tg}\frac{u}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{r\cos\frac{u}{2}} + 2r^2\int_{\frac{u}{2}}^{0} (-\sin^2 t)\,dt =$$

$$= r^2\frac{\sin u}{2} + r^2\int_0^{\frac{u}{2}} (1 - \cos 2t)\,dt = \ldots$$

Metoda II.



Aria sectorului de cerc AOB este subgraficul funcției pozitive $h : [0, r] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x\,\text{tg}\,u, & x \leqslant r\cos u \\ \sqrt{r^2 - x^2}, & x \geqslant r\cos u \end{cases}.$$

$$S = \int_0^{r\cos u} x\,\text{tg}\,u\,dx + \int_{r\cos u}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \ldots$$

de variabilă $x = a\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ obținem:

$$\text{aria}(\mathcal{E}) = \frac{4b}{a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt = 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= 4ab \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \right) = 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = 4ab \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= ab\pi .$$

Observație. Elipsa de semiaxe a și b se poate obține prin proiecția unui cerc de rază a pe un plan care face cu planul cercului unghiul α, cu $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Ca urmare, aria elipsei este produsul dintre aria cercului și cosinusul unghiului dintre plane, deci:

$$\pi a^2 \cdot \cos\alpha = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab .$$

10) Calculați aria determinată de cercul $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 2$, dreapta $y = \sqrt{7}x$ și semiaxa Ox, cu $x > 0$.

11) Calculați aria suprafeței determinată de elipsa $\mathcal{E}$: $4x^2 + 9y^2 = 36$, dreapta $y = \frac{2\sqrt{5}}{3}x$ și semiaxa Ox, cu $x > 0$.

PROBLEME PROPUSE

I. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ pentru:

1. $f, g : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

2. $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

3. $f, g : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$.

4. $f, g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

5. $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$.

6. $f, g : [0\ , 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$.

7. $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$.

8. $f, g : [1, \mathrm{e}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = x - 1$.

9. $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3^{-x} + \frac{2}{3}$.

10. $f, g : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

II. 1. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabola de ecuație $y^2 = 9x$ și dreapta de ecuație $y = 9x$.

2. Interiorul cercului $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 16$ este despărțit de parabola de ecuație $y^2 = 4x$ în două regiuni. Să se găsească aria fiecăreia dintre ele.

3. Interiorul elipsei $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ este despărțit de dreapta: $y = 2x - 2$ în două regiuni. Să se găsească aria fiecăreia dintre ele.

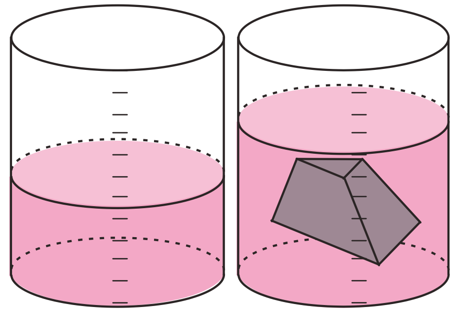
4. Interiorul elipsei $\mathcal{E} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ este despărțit de cercul $\mathcal{C} : (x - 5)^2 + y^2 = 25$ în două regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia dintre ele.

5. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între hiperbola: $\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ și dreapta de ecuație $d : y = x - 4$, pentru $x > 0$.

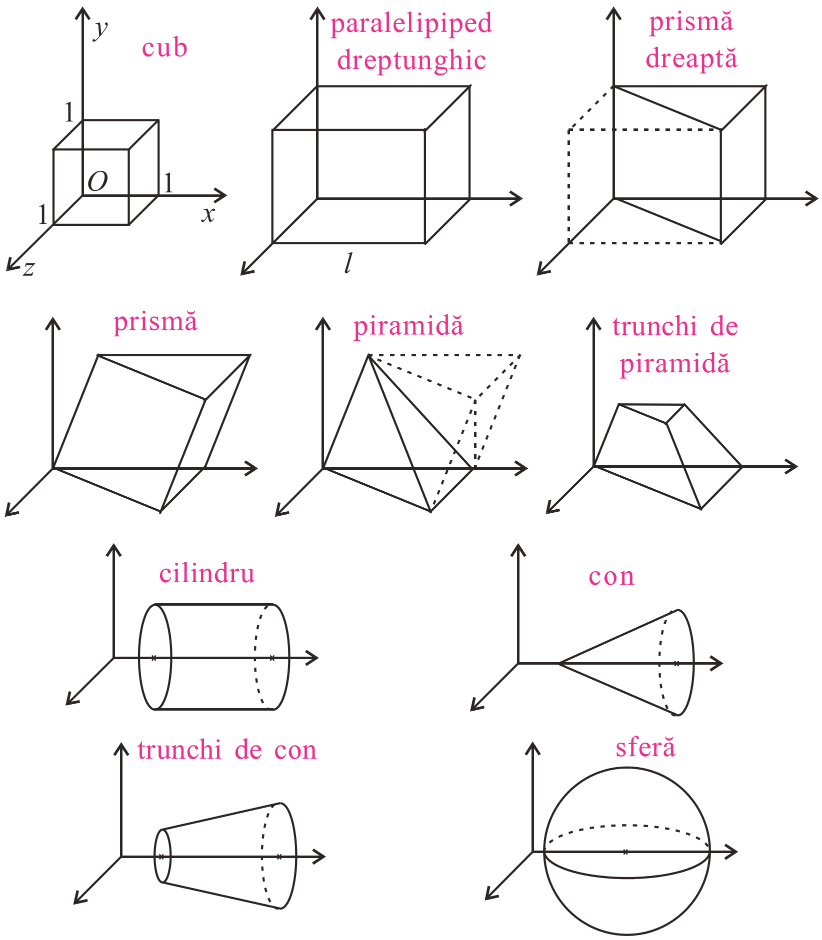
6. Să se calculeze aria cuprinsă între parabolele de ecuații: $y^2 = 3x$ și $y = 4x^2$.

Volumul unui corp de rotație

În mod intuitiv, volumul unui corp (în spațiul tridimensional) este numărul care arată câte cuburi și fracțiuni de cub cu latura unitate „încap“ (pot fi distribuite) în tot interiorul corpului.



Am învățat formule pentru calculul volumului anumitor corpuri geometrice. Volumul unui corp mai complicat nu poate fi calculat cu ajutorul unei formule simple, dar putem să-l aflăm dacă reușim să-l scufundăm într-un vas gradat; avem $1\,l = 1\text{dm}^3 = 0{,}001\text{m}^3$.



Cum calculăm volume ?

Temă de sinteză

1) Asociați fiecare dintre corpurile geometrice alăturate cu formula potrivită pentru calculul volumului său:

a) $\dfrac{4\pi r^3}{3}$; b) l^3; c) $\dfrac{\pi(R^2+r^2+Rr)\cdot h}{3}$;

d) $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$; e) $l\cdot L\cdot h$; f) $\dfrac{A_b\cdot h}{3}$;

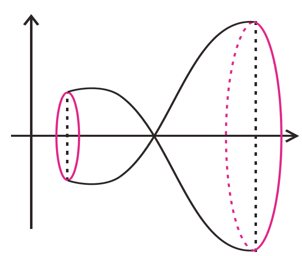
g) $\pi r^2 h$; h) $\dfrac{(A_B+A_b+\sqrt{A_B A_b})\cdot h}{3}$; i) $A_b\cdot h$

2) Care dintre corpurile geometrice alăturate se pot obține prin rotirea graficului unei funcții în jurul axei Ox?

3) Calculați volumul unui tetraedru regulat și al unui cub, ambele de latură l. Comparați volumele obținute.

4) Secționăm o piramidă cu un plan paralel cu baza și obținem o piramidă și un trunchi de piramidă de volume egale. Care este raportul dintre înălțimile piramidei și trunchiului de piramidă?

Lutul a fost unul dintre cele mai folosite materiale utilizate la confecționarea de vase. În antichitate, oamenii au observat că vasele de lut „perfect rotunde“ sunt mai încăpătoare, mai rezistente și mai frumoase decât cele cu forme neregulate. Pentru a fabrica cât mai repede vase de lut rotunde, oamenii au inventat „roata olarului“. Mult mai târziu, principiul roții olarului a fost folosit pentru proiectarea strungurilor. Există astăzi strunguri programabile deservite de specialiști care stăpânesc noțiuni de matematică precum axe, coordonate, grafice, arii sau volume. Uneltele au rostul de a ajuta oamenii să confecționeze cât mai repede și mai exact obiectele pe care le imaginează și le proiectează. Matematica îi învață cum să gândească, pentru a descoperi acele proprietăți ale obiectelor de care au nevoie și pe care intenționează să le realizeze.



Un corp de rotație este caracterizat de o axă de rotație și de o generatoare. Ne vom ocupa în continuare de volumele corpurilor de rotație, care au ca axă de rotație Ox și ca generatoare graficul unei funcții.

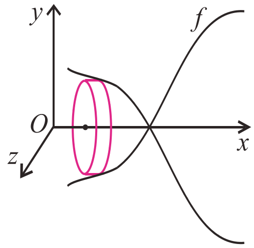
Definiție.

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Mulțimea punctelor din spațiu

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leqslant x \leqslant b, \text{ și } 0 \leqslant \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant |f(x)|\right\}$$

se numește *corpul de rotație* în jurul axei Ox determinat de funcția f.

Pentru aproximarea volumului unui corp de rotație determinat de o funcție continuă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, vom considera o diviziune a intervalului $[a, b]$, de exemplu diviziunea lui $[a, b]$ în n părți egale ($a < a + \frac{b-a}{n} < a + 2\frac{b-a}{n} < ... < a + n\frac{b-a}{n} = b$).



Numărul $\pi f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$ este volumul cilindrului cu raza $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ și înălțime $\frac{b-a}{n}$. Acest volum aproximează volumul obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției f pe intervalul $\left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\right]$.

Volumul V al corpului de rotație determinat de $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este aproximat de $V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$, suma volumelor tuturor cilindrilor, în sensul că

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{k=1}^{n} f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Rezultă următoarea teoremă, care ne indică formula de calcul pentru volumul unui corp de rotație.

Teoremă.

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Corpul de rotație determinat de f are volumul

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Observație.

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci funcția f^2 este continuă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f^2(x)\,dx$ are sens.

5) Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția f. Desenați (schițați) corpul obținut în fiecare caz.

a) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

b) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$

c) $f: [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

d) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{x}{2}, & x \in (1, 2] \end{cases}$

e) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ -x, & x \in (1, 2] \end{cases}$

f) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

g) $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \ln x$

h) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

i) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - \cos x$

j) $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in (1, 2] \\ 1, & x \in (2, 3] \end{cases}$

k) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

l) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

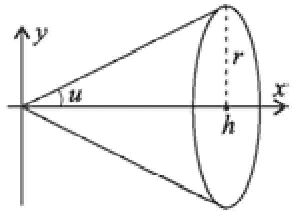
6) Se consideră curba de ecuație $y^2 = x^3$. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația curbei în jurul axei Oy pe intervalul $[1, 2]$.

ATENȚIE

De multe ori, folosirea în practică (în fizică, chimie, tehnică) a unor concepte matematice se bazează pe aproximări, pe utilizarea de modele ideale pe care le dorim cât mai apropiate de realitatea studiată. Vom folosi în acest capitol aproximarea unor forme geometrice generate de niște funcții cu ajutorul diviziunilor domeniului funcției.

Aplicații

♦ *Volumul conului*

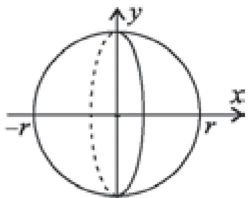


> **Teoremă.** Volumul conului de rotație cu raza r și înălțimea h este $\dfrac{\pi h r^2}{3}$.

Demonstrație. Generatoarea conului este graficul funcției $f: [0, h] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,\mathrm{tg}\,u = \dfrac{r}{h}x$.

$$V = \pi\int_0^h f^2(x)\,dx = \pi\int_0^h x^2\frac{r^2}{h^2}\,dx = \pi\frac{x^3}{3}\frac{r^2}{h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

♦ *Volumul sferei*



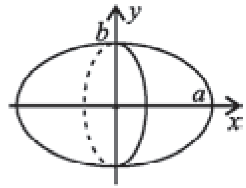
> **Teoremă.** Volumul sferei cu raza r este $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Demonstrație. Din ecuația cercului $\mathscr{C}(0, r)$: $x^2 + y^2 = r^2$ deducem $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

Sfera este corpul geometric de rotație determinat de funcția $f: [-r, r] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$V = \pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

♦ *Volumul elipsoidului*



> **Teoremă.** Volumul elipsoidului format prin rotirea elipsei de ecuație $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ în jurul axei Ox este $\dfrac{4\pi ab^2}{3}$.

Demonstrație.

Din ecuația elipsei $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, deducem $y = \pm b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$.

Elipsoidul este generat de graficul funcției

$$f: [-a, a] \to \mathbb{R},\ f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Volumul elipsoidului este

$$V = \pi\int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= \pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4\pi ab^2}{3}$$

PROBLEME PROPUSE

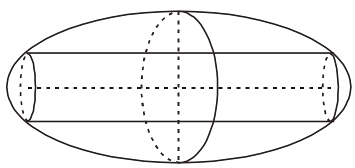
● **1.** Calculați volumul conului de rotație cu raza $r = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm.

● **2.** Calculați volumul unei sfere cu raza $r = 2$ cm.

● **3.** Calculați volumul elipsoidului cu semiaxele $a = 2$ cm și $b = 3$ cm.

●● **4.** Calculați masa unei piese de forma unui elipsoid de rotație din care lipsește un cilindru, conform schiței de mai jos. Se știe că densitatea materialului este de 5kg/dm^3 și dimensiunile sunt date în decimetri.

Elipsoidul are semiaxa mare 5, semiaxa mică 2, iar cilindrul are diametrul 2.



Indicație. Se intersectează elipsa cu semiaxa mare 5 și semiaxa mică 2 de ecuație $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$ cu dreapta de ecuație $y = 1$.

●● **5.** *Volumul torului.*

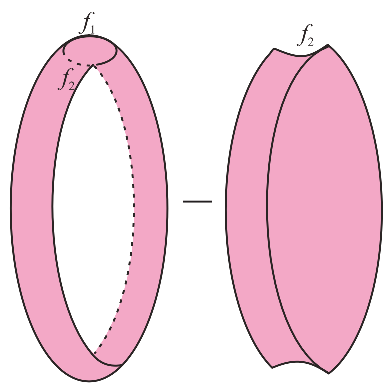
Se rotește în jurul axei Ox cercul de ecuație $\mathscr{C}: x^2 + (y - b)^2 = r^2$, unde $|b| \geqslant r > 0$. Care este volumul corpului obținut (tor)?

Indicație.

Cercul $\mathscr{C}$ este descris de graficele funcțiilor

$f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}$ și $f_2(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Volumul torului se obține din volumul de rotație determinat de f_1, din care se scade volumul de rotație determinat de f_2.



Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită

În acest paragraf vom prezenta modul în care integrala definită poate fi utilizată în calculul unor limite de șiruri sau uneori în stabilirea convergenței acestora. Pentru început ne vom referi la șiruri de numere reale cu termeni sume Riemann. Avem următoarea situație generală: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, de exemplu continuă, $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\|\Delta_n\|$ tinzând către zero și $(\xi^n)_{n\geqslant 1}$ șir de sisteme de puncte intermediare, ξ_n asociat lui Δ_n. Șirul $a_n = \sum_{k=1}^{p_n} f\left(\xi_k^n\right)(x_k^n - x_{k-1}^n)$, $\forall n \geqslant 1$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_a^b f(x)dx$.

În practică, de cele mai multe ori vom întâlni intervalul de definiție $[0,1]$ cu $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right)$ și respectiv $\xi^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$.

EXEMPLE

1) Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Transformăm suma precedentă astfel:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right).$$

Fie funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ și pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, fie diviziunea echidistantă și respectiv sistemul de puncte asociat $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$; $\xi^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$. Constatăm că:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n).$$

Deoarece f este funcție continuă și $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$$

2) Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$. Transformând expresia termenului general a_n, avem:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}.$$

Cum $a_n > 0$, deducem că: $\ln a_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, de unde apropierea de sumă Riemann este evidentă. Alegem deci: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$ și pentru oricare n, $n \geqslant 1$ avem: $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right)$, $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$ respectiv $\xi^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right)$.

Deoarece f este continuă, deducem: $\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) =$
$= \int_0^1 \ln(1+x)dx = \ln\frac{4}{e} = \int_0^1 \ln(1+x)dx = \ln\frac{4}{e}$, de unde $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$.

3) Fie șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin: $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2 + (2k-1)^2}$.

Transformând expresia lui x_n, obținem:

$$x_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(2k-1)^2}{4n^2}}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2}\cdot\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right).$$

1) Pentru

$\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right)$ și

$\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right)$ scrieți

$a_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^n\right)\left(x_k^n - x_{k-1}^n\right)$ pentru

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = \sin x$

e) $f(x) = \cos x$ f) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$

g) $f(x) = xe^x$ h) $f(x) = \ln(1 + x)$.

2) Pentru $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, scrieți $a_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^n\right)\left(x_k^n - x_{k-1}^n\right)$ în următoarele situații:

a) $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right)$ și

$\xi^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$

b) $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{2}{n(n+1)} < \ldots\right.$

$\left.\ldots < \frac{(n^2+n-1)}{n(n+1)} < 1\right)$ și

$\xi^n = \left(\frac{1}{n(n+1)}, \frac{2}{n(n+1)}, \ldots, \frac{2(n^2+n)}{n^2+n}\right)$

c) $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right)$ și

Să mai remarcăm că, $\frac{2k-1}{2n} \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ prin urmare putem alege: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2}$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right)$, $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$ și $\xi^n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, ..., \frac{2n-1}{2n}\right)$.
Cum f este o funcție continuă, deducem:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \frac{1}{4}\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}\cdot$$

Utilizând proprietățile integralei Riemann putem stabili convergența unor șiruri de numere reale în care termenii pot fi exprimați cu autorul integralelor definite.

EXEMPLE

1) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general

$$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se observă că:

$$a_n = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n})dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + (-1)^{n+2}\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + (-1)^{n+2}\cdot\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+2}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx.$$

Utilizând proprietățile integralei definite, avem:

$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}dx = \frac{1}{2n+3}$ de unde deducem că

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx = 0$ și prin urmare $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

2) Fie șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ cu termenul general $I_n = \int_0^1 \sin^n x dx$. Să se studieze convergența șirului și să se determine limita sa. Știind că $\sin x \in [0, 1]$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obținem că $I_n \in [0, 1]$ pentru oricare n, $n \geqslant 0$.

Deoarece $\sin x$ este din intervalul $[0, 1]$ avem și relația $\sin^{n-1}x \geqslant \sin^n x$, $\forall n \geqslant 0$ și obținem $I_{n-1} \geqslant I_n$, adică șirul este descrescător, prin urmare convergent. Utilizând inegalitatea $\sin x \leqslant x$, $\forall x \geqslant 0$ și proprietățile integralei Riemann, avem: $\int_0^1 \sin^n x dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, de unde cu teorema „cleștelui” obținem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} I_n \leqslant 0, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

3) Fie șirul $(w_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general
$w_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}\sqrt{2n+1}$.

$\xi^n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \frac{5}{2n}, ..., \frac{3n-1}{2n}\right)$

d) $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < ... < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right)$ și

$\xi^n = \left(\frac{2}{3n}, \frac{5}{3n}, \frac{8}{3n}, ..., \frac{3n-1}{3n}\right)$.

3) Pentru $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(1 + x)$ scrieți termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^n\right)\left(x_k^n - x_{k-1}^n\right)$ în următoarele situații:

a) $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < ... < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right)$ și

$\xi^n = \left(0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\right)$.

b) $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} < ... < \frac{n^2-1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1\right)$

și $\xi^n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, ..., \frac{n^2}{n^2} = 1\right)$

c) $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{2}{n(n+1)} < ... < \frac{n^2}{n^2+n} < 1\right)$

și $\xi^n = \left(\frac{1}{2n(n+1)}, \frac{3}{2n(n+1)}, ..., \frac{2n^2-1}{3n(n+1)}\right)$.

4) Calculați $\lim_{n\to\infty} a_n$, în următoarele situații:

a) $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3}$;

b) $a_n = \frac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + ... + \sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}}$;

c) $a_n = \frac{1^9 + 2^9 + 3^9 + ... + n^9}{n^{10}}$;

d) $a_n = \frac{\sqrt[10]{1} + \sqrt[10]{2} + ... + \sqrt[10]{n}}{n\sqrt[10]{n}}$.

5) Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $0 < I_n < \ln 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătați că $I_{n+1} < I_n$.

d) Demonstrați că $\ln(1 + y) \leqslant y$, $\forall y \geqslant 0$.

Dorim să utilizăm integrala definită în studiul acestui șir. Considerăm șirul: $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

Mai întâi să remarcăm relația de recurență:

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2 x - 1)\cos^n x dx = I_n -$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x dx = I_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \left(\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right)' dx =$$
$$= I_n + \sin x \cdot \frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} dx = I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2},$$

de unde $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

Obținem: $I_{2n} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\cdot I_0$, $\forall n \geqslant 1$ și $I_{2n+1} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n+1}\cdot I_1$.

Calculând $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \dfrac{\pi}{2}$ și $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$ găsim că $(w_n)^2 = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$, prin urmare problema se reduce la calculul limitei șirului $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$. Deoarece $\cos x \in [0, 1]$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ se obține că șirul $(I_n)_{n\geqslant 0}$ este descrescător și pozitiv, adică $0 < I_{n+1} < I_n$, $\forall n > 0$.

Utilizând relația de recurență, deducem:

$I_n = \dfrac{n+2}{n+1} I_{n+2} < \dfrac{n+2}{n+1}\cdot I_{n+1}$, de unde: $0 < \dfrac{I_n}{I_{n+1}} < \dfrac{n+2}{n+1}$ și avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

e) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n dx$.

f) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

6) Fie șirul de numere reale $(I_n)_{n\geqslant 1}$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t} \mathrm{dt}$

a) Calculați I_1 și I_2.

b) Arătați că $I_n \in (0, \ln 2)$.

c) Arătați că $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

f) Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \ln 2\right).$$

7) Fie șirul de numere reale $(I_n)_{n\geqslant 1}$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{a+x^n} \mathrm{dx}$, unde $a > 0$.

a) Calculați I_1 și I_2.

b) Arătați că $I_n < \dfrac{1}{a(n+1)}$.

c) Utilizând metoda integrării prin părți, arătați că:

$$I_n = \frac{1}{n}\cdot\ln\frac{a+1}{a} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^n}{a}\right) dx.$$

d) Arătați că $\ln(1+x) \leqslant x$, $\forall x > -1$.

e) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

1. Cu ajutorul integralelor definite și al sumelor Riemann, calculați limita următoarelor șiruri:

a) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\cdot(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) $a_n = n\cdot\left(\dfrac{1}{n^2+1^2} + \dfrac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+3n}}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) $a_n = \dfrac{\pi}{2n}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + \cos\dfrac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\dfrac{n\pi}{2n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) $a_n = \sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Folosind sumele Riemann ale unor funcții integrabile calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este șirul de termen general:

a) $a_n = \dfrac{3}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{n}{n+3k}}$; b) $a_n = \dfrac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n}$;

c) $a_n = n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2}$; d) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{\frac{k^2}{n^2}}$;

e) $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} arctg\dfrac{k}{n}$; f) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot\sin\dfrac{k}{n}$;

g) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$; h) $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}}$.

3. Fie șirurile de numere reale: $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$ și $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

a) Arătați că $I_1 = x_1$.

b) Utilizând metoda de integrare prin părți, arătați că:

$I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot I_{n-1}$;

c) Arătați că $I_n = x_n$, $\forall n \geq 2$.

d) Știind că pentru $a, b \in (0, +\infty)$ $a \neq b$ avem: $\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} < 1$, deduceți că: $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$.

e) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

4. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^n x dx$

a) Calculați I_1 și I_2. b) Arătați că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot I_n$.

5. Se consideră șirurile $(I_n)_{n\geq 1}$, $(J_n)_{n\geq 1}$ definite prin: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^n x}{\text{tg}^n x + \text{ctg}^n x} dx$ și $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{ctg}^n x}{\text{tg}^n x + \text{ctg}^n x} dx$, $n \geq 1$.

a) Calculați I_1 și J_1. b) Calculați $I_n + J_n$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$.

Probleme date la admitere în facultate

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

a) Determinați o primitivă a funcției f.

b) Determinați aria limitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = \sqrt{3}$.

(ASE, București, Finanțe, 1996, enunț parțial)

7. Calculați aria figurii delimitate de graficul funcției $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-3}$ și de dreapta $y = 6$.

(Universitatea București, Fizică, 1996, enunț parțial)

8. Fie $f:\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \ln\cos x$. Calculați aria mulțimii cuprinse între graficul funcției și axa Ox. *(Universitatea Ploiești, Matematică, 1996)*

9. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \max\{x^2 - x - 2, -x^2 - x\}$. Calculați aria suprafeței plane mărginite de dreptele $x = -2$, $x = 2$, axa Ox și graficul funcției f.

(Universitatea Cluj, Matematică, 1996)

10. Calculați aria figurii delimitate de graficul funcției $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ și dreptele $x = 1$, $x = 3$ și $y = 3$

(Universitatea București, Fizică, 1996, enunț parțial)

11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{mx}(1 + mx)$, $m > 0$. Fie P, Q punctele de intersecție dintre graficul funcției și axele de coordonate.

a) Calculați aria S a porțiunii plane cuprinse între graficul funcției și axele de coordonate.

b) Arătați că raportul dintre S și aria triunghiului OPQ nu depinde de m.

(Universitatea Baia Mare, Matematică-fizică, 1994)

12. Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{x^2}$ și $g(x) = ex$.

a) Calculați aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor f și g.

b) Fie V volumul corpului de rotație determinat de funcția f. Arătați că $V < \frac{\pi e^2}{4}$.

(Academia Tehnică Militară, Pitești, 1994)

13. Determinați aria mărginită de graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\text{arctg}x$, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$.

(Universitatea Timișoara, Matematică, 1994)

14. Fie hiperbola echilateră de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ și dreapta de ecuație $y = kx$ $(0 < k < 1)$. Calculați aria mulțimii cuprinse între semidreapta Ox $(x > 0)$, arcul de hiperbolă $x^2 - y^2 = a^2$ $(y > 0)$ și dreapta $y = kx$.

(Universitatea Brașov, Matematică, 1995)

15. Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x\in[0, 2] \\ \sqrt[4]{x^2-4}, & x\in(2, 4] \end{cases}.$$

(Universitatea Cluj, Științe Economice, 1996)

16. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$f(x) = \begin{cases} (x+12x^3)\sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x\leq 0 \end{cases}$. Aflați aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{\pi}$, $x = \frac{2}{\pi}$.

(Universitatea Iași, Matematică, 1996, enunț parțial)

17. Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția $f:[0,4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in[0,2]\\ \sqrt[4]{x^2-4}, & x\in(2,4]\end{cases}.$$

(Universitatea Cluj, Științe Economice, 1996)

18. Calculați volumul corpului obținut prin rotație în jurul axei Ox a domeniului plan mărginit de graficul funcției $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$, axa Ox și dreapta de ecuație $x=e$.

(Universitatea Cluj, Fizică, 1996)

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(1p) a) Calculați $f'(x)$ și determinați imaginea lui f.

(1p) b) Rezolvați inecuația $\dfrac{1}{1+x^2}\leqslant\dfrac{x^2}{2}$.

(1p) c) Calculați aria mulțimii plane:

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\leqslant x\leqslant 1 \text{ și } \frac{x^2}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2}\right\}.$$

(2p) **2.** Reprezentați și calculați aria mulțimii D din semiplanul superior, cuprinsă între parabola de ecuație $y^2=x+4$, axa Ox și dreapta de ecuație $x+y=2$.

3. Fie $I_k=\int_0^2 x^{7-k}\cdot(x-2)^{7+k}dx$, $0\leqslant k\leqslant 7$, $k\in\mathbb{N}$.

(1p) a) Calculați I_7.

(1p) b) Cu ajutorul metodei de integrare prin părți, găsiți o relație de recurență între I_k și I_{k+1}, $0\leqslant k\leqslant 6$. Deduceți I_0.

(1p) c) Reprezentați grafic $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2x)^7$.

(1p) d) Calculați aria mulțimii plane $A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ și } (x^2-2x)^7\leqslant y\leqslant 0\}$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

(2p) **1.** Reprezentați și calculați aria mulțimii D din plan, cuprinsă între curba de ecuație $y=x+\sin x$, axa Ox și dreapta de ecuație $x=2\pi$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^2e^{-x}$.

(1p) a) Calculați $f'(x)$, $f''(x)$ și determinați $f^{(k)}(x)$, $k\geqslant 3$.

(1p) b) Dacă $I_k=\int_0^2 x^k e^{-x}dx$, $k\in\mathbb{N}^*$, determinați, cu ajutorul metodei de integrare prin părți, o relație de recurență între I_k și I_{k+1}.

(2p) c) Calculați aria determinată de $x=0$, $x=2$, axa Ox și graficul funcției $f(x)=1-x^2e^{-x}$.

3. Fie $a\in(0,+\infty)$ și $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(1p) a) Determinați $V(a)$ - volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox.

(2p) b) Calculați $\lim\limits_{a\to\infty}V(a)$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Parcurgând „Elemente de analiză matematică” ați dobândit următoarele competențe specifice?

1. Identificarea legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia

2. Identificarea unor metode de calcul ale integralelor, prin realizarea de legături cu reguli de derivare

3. Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite

4. Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor

5. Folosirea proprietăților unei funcții continue, pentru calcularea integralei acesteia pe un interval

6.1. Utilizarea proprietăților de monotonie a integralei în estimarea valorii unei integrale definite și în probleme cu conținut practic

6.2. Modelarea comportării unei funcții prin utilizarea primitivelor sale

Probleme recapitulative

Grupuri

1. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, xy \neq 0\right\}$. Arătați că M este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și să se studieze proprietățile operației induse pe M de înmulțirea matricelor.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y + ax + by$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați a și b astfel încât legea de compoziție „$*$“ să fie asociativă și comutativă.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - x - y - 2$; $a, b \in \mathbb{R}$.
Arătați că legea „$*$“ nu admite element neutru.

4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție: $x * y \overset{\text{def}}{=} ax + by$; $a, b \in \mathbb{R}^*$. Determinați a și b astfel încât legea „$*$“ să fie asociativă.

5. Se consideră operația $x * y \overset{\text{def}}{=} x + ay$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă.

6. Se consideră legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} 2xy - 2x - 2y + a$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.

7. Se consideră legea $x * y = xy + 4a(x + y)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât „$*$“ să fie asociativă.

8. Fie mulțimea $\mathbb{R}_+^*$ și legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} \log_a x + \log_a y$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Determinați valorile lui a pentru care $(a, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}_+^*$ în raport cu operația „$*$“. Studiați proprietățile acestei legi.

9. Se consideră operația $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y - \frac{1}{2}xy$.

Arătați că $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu legea de compoziție. Arătați că legea este asociativă, admite element neutru, elementele lui M sunt simetrizabile și legea este comutativă.

10. Fie $M = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 5y^2 = 1\}$.

Arătați că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea. Arătați că există element neutru și determinați elementele simetrizabile (inversabile).

11. Fie $M = (3, 5) \subset \mathbb{R}$ și legea: $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 4(x + y) + 20$.

Arătați că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție și că „$*$“ este operație comutativă pe M.

12. Fie $M = (2, 4) \subset \mathbb{R}$ și legea: $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 3(x + y) + 12$. Arătați că legea „$*$“ este o operație comutativă. Determinați elementul neutru.

13. Fie $M = (1, +\infty) - \{2\}$ și legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$. Arătați că „$*$“ este comutativă.

14. Fie $M = \left\{\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 2y^2 = 1\right\}$, $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că înmulțirea indusă pe M în raport cu $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este comutativă.

15. Fie operația $x * y \overset{\text{def}}{=} (1-m)x + my - m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$“ să fie comutativă.

16. Fie $M = \left\{A_x = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}\right\}$, $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că înmulțirea indusă pe M de înmulțirea matricelor este asociativă, admite element neutru și este comutativă.

17. Fie $M = [5, 7]$ și legea de compoziție: $x * y = xy - 6(x + y) + 42$. Arătați că „$*$“ este o lege de compoziție internă asociativă, comutativă și cu element neutru. Determinați elementele simetrizabile.

18. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și operația $x * y \overset{\text{def}}{=} e^{\ln x \ln y}$. Arătați că legea „$*$“ este lege de compoziție internă, asociativă, cu element neutru, comutativă și toate elementele din M sunt simetrizabile.

19. Pe $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ se definesc legile de compoziție: $x * y \overset{\text{def}}{=} \frac{x + y}{2}$ (media aritmetică),
$x \top y \overset{\text{def}}{=} \sqrt{xy}$ (media geometrică),

$x \perp y \overset{\text{def}}{=} \frac{2xy}{x + y}$ (media armonică).

Arătați că aceste legi de compoziție sunt comutative și nu sunt asociative. Admit element neutru?

20. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Arătați că M este o parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile ale lui M în raport cu operația indusă.

21. Fie mulțimea
$M=\{x+y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2-7y^2=1\}$.

Arătați că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea și că toate elementele lui M sunt simetrizabile în raport cu operația indusă.

22. Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și operația:
$x * y \overset{\text{def}}{=} xy-3(x+y)+12$.

a) Arătați că „$*$" este lege de compoziție internă și că $(G, *)$ este grup abelian.
b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}_+^* \to G,\ f(x)=ax+b$ să fie un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, *)$.
c) Arătați că $\underbrace{x*x*...*x}_{x \text{ de } n \text{ ori}}=(x-3)^n+3, \forall x \in G$.

23. Se consideră pe $\mathbb{Z}$ legea de compoziție:
$x*y \overset{\text{def}}{=} x+y-2$. Demonstrați că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian și funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 2$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{Z}, *)$ la grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

24. Fie $G=(2, +\infty)$ și legea $x*y \overset{\text{def}}{=} xy-2(x+y)+6$. Demonstrați că „$*$" este o lege de compoziție internă și $(G, *)$ este grup abelian. Calculați $\underbrace{x*x*...*x}_{x \text{ de } n \text{ ori}}$.

25. Fie $G=(-3, 3) \subset \mathbb{R}$ și operația: $x*y=\dfrac{9(x+y)}{9+xy}$.

Arătați că „$*$" este o lege de compoziție internă și $(G, *)$ este grup abelian.

Funcția: $f:\mathbb{R} \to G,\ f(x)=\dfrac{2(e^{9x}-1)}{e^{9x}+1}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(G, *)$. Arătați că și $f^{-1} : G \to \mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

26. Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \neq 0\right\}$, $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că G este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că $(G, \cdot)$ este grup abelian.
b) Arătați că $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(G, \cdot)$.

27. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\right\}$, $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup, unde „$\cdot$" este operația indusă de înmulțire a matricelor.

28. Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și operația:
$x*y \overset{\text{def}}{=} xy-3(x+y)+12$. Arătați că:

a) $(G, *)$ este grup abelian.
b) funcția $f:G \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x)=x-3$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

29. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y \overset{\text{def}}{=} x+y+1,\ x \perp y \overset{\text{def}}{=} x+y-1$.

Arătați că $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri izomorfe, $(\mathbb{Z}, *) \simeq (\mathbb{Z}, \perp), f(x)=x+2$.

30. Se consideră mulțimea $G = (E, A, A^2)$, unde $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ și ε este o rădăcină cubică complexă a unității, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$. Arătați că $(G, \cdot)$ ese grup în raport cu înmulțirea matricelor.

31. Arătați că pe mulțimea
$G=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2+y^2 \neq 1\right\}$ înmulțirea matricelor determină o structură de grup.

Arătați că acest grup $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \cdot)$, unde $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{x+y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$,
$f:G \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $f(A)=x+y\sqrt{3}$, $A=\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$.
Arătați că $f^{-1}:\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to G$ este izomorfism de grupuri.

32. Fie mulțimea $G = (1, +\infty)$ și operația:
$x*y \overset{\text{def}}{=} xy-x-y+2$.

a) Arătați că „$*$" este o lege de compoziție internă și că $(G, *)$ este grup abelian.
b) Demonstrați că: $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de } n \text{ ori}}=(x-1)^n+1, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

33. Fie mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ și legea „$*$":
$x*y=\dfrac{1}{2}(1+x+y-xy)$. Arătați că $(G, *)$ este grup.

34. Fie mulțimea $G = (m, +\infty)$ și operația „$*$":
$x*y \overset{\text{def}}{=} xy-m(x+y)+m^2+m, m \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian.

35. Se consideră legea de compoziție $z_1 * z_2 \overset{\text{def}}{=} z_1 z_2 - (z_1 + z_2)i - 1 + i$, „$*$": $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
a) Arătați că mulțimea $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ față de legea „$*$", iar $\mathbb{C}_1$ cu operația indusă este grup comutativ, $(\mathbb{C}_1, *)$.
b) Demonstrați: $z * z * ... * z = (z - i)^n + i,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$.

36. Se consideră mulțimea
$$G = M_x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \right\}.$$
Arătați că înmulțirea matricelor determină pe G o structură de grup comutativ, $(G, \cdot)$.

37. Se consideră mulțimea $G = \mathbb{Q} \setminus \{k\}$, $k \in \mathbb{Q}^*$ și legea de compoziție: $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y - \dfrac{xy}{k}$.
Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

38. Fie grupul comutativ $(G, \cdot)$ și $a \in G$ fixat. Se definește legea de compoziție pe $G: x * y \overset{\text{def}}{=} xya$.
Arătați că $(G, *)$ este grup comuativ.

39. Se consideră mulțimea de funcții: $G = \{f : \mathbb{R} \to (0, +\infty) \mid f(x) = e^{ax},\ a \in \mathbb{R}\}$.
a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup multiplicativ.
b) $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$, grupul aditiv al numerelor reale.

40. Fie mulțimea $G = (0, 1)$ și operația: $x * y \overset{\text{def}}{=} \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$. Arătați:
a) $(G, *)$ este grup abelian.
b) funcția $f : G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

41. Pe mulțimea numerelor complexe se definesc operațiile: $z_1 \perp z_2 = z_1 + z_2 + a \cdot i$, $a \in \mathbb{R}$; $z_1 \top z_2 = z_1 + z_2 - a$. Arătați că $(\mathbb{C}, \perp)$, $(\mathbb{C}, \top)$ sunt grupuri izomorfe: $f : (\mathbb{C}, \perp) \to (\mathbb{C}, \top)$, $f(z) = iz$.

Inele și corpuri

1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc operațiile: $x \perp y = x + y - 3$, $x \top y = xy - 3x - 3y + 12$.
Arătați că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este o structură de inel.

2. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ a numerele comlexe se consideră operațiile: $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 i$, unde $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$.
Arătați că $(\mathbb{C}, +, *)$ este un inel comutativ.

3. Pe mulțimea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se introduc următoarele legi de compoziție: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
a) Arătați că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.
b) Arătați că funcția $f : A \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$f((x, y)) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ este izomorfism de inele.

4. Fie mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.
Arătați că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ, „+" și „$\cdot$" fiind operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

5. Fie operațiile definite pe mulțimea $\mathbb{Q}$: $x \perp y \overset{\text{def}}{=} x + y + 2$, $x \top y \overset{\text{def}}{=} xy + 2(x + y) + 2$.
Arătați că tripletul $(\mathbb{Q}, \perp, \top)$ este o structură de corp.

6. Fie mulțimea $K = \left\{ \begin{pmatrix} x + y & y \\ y & x - y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$, $K \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că mulțimea K împreună cu operațiile induse de adunarea și înmulțirea matricelor este un corp comutativ $(K, +, \cdot)$.

7. Fie mulțimea $K = \{x + iy\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ dotată cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire.
Arătați că tripletul $(K, +, \cdot)$ este un corp.

8. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile: $x \perp y \overset{\text{def}}{=} x + y - 2$, $x \top y \overset{\text{def}}{=} 2xy - 4(x + y) + 10$.
Arătați că $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este o structură de corp.

9. Fie inelele $(A_1, +, \cdot)$, $A_1 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ și $(A_2, +, \cdot)$, $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.
Demonstrați că cele două inele sunt izomorfe.

10. Fie corpurile:
$(K_1, +, \cdot)$, $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$,
$(K_2, +, \cdot)$, $K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$.
Arătați că cele două corpuri sunt izomorfe.

Polinoame

1. Găsiți rădăcinile raționale ale polinomului $f = 12X^3 - 8X^2 + 13X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

2. Demonstrați că un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ nu are rădăcini întregi dacă $f(0)$ și $f(1)$ sunt numere impare.

3. Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii:
a) $\alpha = 2$ pentru
$f = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8 \in \mathbb{Z}[X]$;
b) $\alpha = -2$ pentru
$f = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16 \in \mathbb{Z}[X]$.

4. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX + b$. Construiți polinomul g ale cărui rădăcini sunt x_1^2, x_2^2, x_3^2.

5. Aflați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - 12X^2 + 6X + a$ știind că acestea formează o progresie aritmetică.

6. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - 7X^2 + 7X + a$, știind că acestea formează o progresie geometrică.

7. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + aX + b$. Determinați a și b știind că trei dintre rădăcinile lui f sunt în progresie aritmetică și a patra este egală cu suma celorlalte.

8. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$ știind că admite rădăcina indicată:
a) $f = X^4 + aX^3 - X^2 - 2X + b$, $x = 2 + \sqrt{3}$;
b) $f = X^4 - 2X^3 + aX^2 + bX + 1$, $x = 1 - \sqrt{2}$.

9. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + 3X^2 + 2X + b$. Determinați a și b știind că f admite rădăcina $z = 1 + i$.

10. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - aX^2 + 2aX - a + 2$. Determinați a știind că f admite rădăcina $z = 2 + i\sqrt{3}$.

11. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.
a) Dacă $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k| \geqslant 1$, demonstrați că:
$\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$.
b) Dacă $M > 0$ are proprietatea că $|x_k| \leqslant M$, $(\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, demonstrați că:
$\min\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k| \leqslant \dfrac{(M+1)^n - 1}{n}$.

12. Arătați că polinomul $f = X^{3n} + X^{3m+1} + X^{3p+2}$ se divide cu polinomul $g = X^2 + X + 1$.

13. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$. Determinați rădăcinile lui f știind că una din ele este $z = 1 + i$.

14. Determinați rădăcinile raționale ale polinomului:
a) $f = 4X^4 - 7X^2 - 5X - 1$;
b) $f = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 12X + 9$;
c) $f = 6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12$.

15. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + mX^3 + 2X^2 - 8$ împărțit la $g = X - 2$ să dea restul 4.

16. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 4X^3 - X^2 + 6X - m$ să se dividă cu $X + 2$.

17. Arătați că polinomul $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

18. Arătați că polinomul $f = X^{6p-1} + X + 1$ se divide cu $X^2 + X + 1$.

19. Determinați numerele reale m și n știind că polinomul $f = 2X^3 + mX^2 + 4X + 4n$ are rădăcina dublă $\alpha = 2$.

20. Arătați că polinomul $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3$ este divizibil cu $g = (X-1)^2$. Găsiți câtul împărțirii polinomului f la polinomul g.

21. Demonstrați că polinomul $f = (1+X)^{6m+1} - (1+X)^{6p+1}$ se divide cu $X^2 + X + 1$, unde $m, p \in \mathbb{N}$.

Primitive. Integrale nedefinite. Integrale definite

I. Determinați primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x)=x\sqrt{1+9x^2},\ x\in\mathbb{R}$; **2.** $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x^3-27},\ x\in\mathbb{R}$; **3.** $f(x)=(x^3-1)\sqrt{x^4-4x+1},\ x\in(2,\infty)$;

4. $f(x)=e^x\sin(e^x),\ x\in\mathbb{R}$; **5.** $f(x)=\sin^n x\cos x,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$; **6.** $f(x)=e^x\cos(e^x),\ x\in\mathbb{R}$;

7. $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; **8.** $f(x)=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; **9.** $f(x)=\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

10. $f(x)=\dfrac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x},\ x\in(0,\pi)$; **11.** $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\cos x},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; **12.** $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x},\ x>1$;

13. $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},\ x>0$; **14.** $f(x)=x^2e^{x^3},\ x\in\mathbb{R}$; **15.** $f(x)=\dfrac{x}{\ln\left(x^{x^2}\right)},\ x>1$;

16. $f(x)=e^{2x^2+\ln x},\ x>0$; **17.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$; **18.** $f(x)=\dfrac{x}{x^4+1},\ x\in\mathbb{R}$;

19. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}},\ x\in(-1,1)$; **20.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}},\ x\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$; **21.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

22. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}},\ x\in(0,\pi)$; **23.** $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1},\ x\in\mathbb{R}$; **24.** $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}},\ x\in\mathbb{R}$;

25. $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2},\ x\in\mathbb{R}$; **26.** $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)},\ x>1$; **27.** $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{x},\ x>1$;

28. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ x\in\mathbb{R}$; **29.** $f(x)=\dfrac{1}{\sin x},\ x\in(0,\pi)$; **30.** $f(x)=\dfrac{1}{\cos x},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

31. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)},\ x>e$; **32.** $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x},\ x>1$; **33.** $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

34. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+a^2},\ x\in\mathbb{R},\ a\neq 0$; **35.** $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x},\ x\in\mathbb{R}$; **36.** $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x},\ x\in\mathbb{R}$;

37. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ x\in(0,1)$.

Determinați următoarele integrale nedefinite:

38. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{2x^2+3x+1},\ x>-\frac{1}{2}$; **39.** $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{2x^2-3x-2},\ x>2$; **40.** $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx,\ x>4$;

41. $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx,\ x<-2$; **42.** $\displaystyle\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x},\ x>\frac{3}{2}$; **43.** $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx,\ x>1$;

44. $\displaystyle\int\frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)},\ x>\frac{5}{2}$; **45.** $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2},\ x>\sqrt{2}$; **46.** $\displaystyle\int\frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6},\ x>\sqrt{3}$;

47. $\displaystyle\int\frac{3x^3-2x^2-x+2}{x^4-x^2}dx,\ x>1$; **48.** $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx,\ x>2$; **49.** $\displaystyle\int\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2dx,\ x>1$;

50. $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}, x>1$; **51.** $\int \frac{x^2-3x+3}{(x-2)^3}dx, x>2$; **52.** $\int \frac{dx}{x^4-x^2}, x>1$;

53. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}, x>-2$; **54.** $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx, x>5$; **55.** $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx, x>0$;

56. $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2(x^2-1)}, x>1$; **57.** $\int \frac{(x^2-2x+3)dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}, x>3$; **58.** $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx, x>3$;

59. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}, x>0$; **60.** $\int \frac{xdx}{x^3-1}, x>1$; **61.** $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx, x>1$;

62. $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}, x>1$; **63.** $\int \frac{x^2dx}{x^4-1}, x>1$; **64.** $\int \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x}, x>0$;

65. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}, x>-1$; **66.** $\int \frac{(x^5+2x^3+4x+4)}{x^4+2x^3+2x^2}dx, x>0$; **67.** $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}, x\in\mathbb{R}$;

68. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx, x\in\mathbb{R}$; **69.** $\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}, x\in\mathbb{R}$; **70.** $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+2)^2}, x\in\mathbb{R}$;

71. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}, x\in\mathbb{R}$; **72.** $\int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2-4x+5)^2}, x\in\mathbb{R}$; **73.** $\int \frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x^2-2x+2)^2}dx, x\in\mathbb{R}$;

74. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}, \ x\in\mathbb{R}$; **75.** $\int \frac{xdx}{(1+x^2)(1+x)^2}, \ x>-1$; **76.** $\int \frac{(x^2-4)dx}{x^4-2x^2+1}, \ x>1$.

Calculați integralele nedefinite:

77. $\int \sin 3x\cos 5x dx, x\in\mathbb{R}$; **78.** $\int \sin 10x\sin 15x dx, x\in\mathbb{R}$; **79.** $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx, x\in\mathbb{R}$;

80. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx, x\in\mathbb{R}$; **81.** $\int \sin^3 x\cos^2 x dx, x\in\mathbb{R}$; **82.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx, x\in(0,\pi)$;

83. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx, x\in(0,\pi)$; **84.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **85.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^3 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

86. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **87.** $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx, x\in(0,\pi)$; **88.** $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

89. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$; **90.** $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **91.** $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}, x\in\mathbb{R}$;

92. $\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx, x\in\mathbb{R}$; **93.** $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **94.** $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}, x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$;

95. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **96.** $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **97.** $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin x+\sin 3x}, \ x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$;

98. $\int \frac{\cos^4 x\, dx}{1+\cos^2 x}, \ x\in\mathbb{R}$.

II. 1. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele indicate:

a) $\int_{-1}^{3} f(x)dx$; $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[-1, 1] \\ x, & x\in(1, 3] \end{cases}$; b) $\int_0^5 f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\in[0, 1] \\ \sqrt[4]{(x-1)^3}, & x\in(1, 5] \end{cases}$;

c) $\int_0^1 f(x)dx$, $f(x)=\min\{x, \sqrt{1-x}\}$; d) $\int_0^2 f(x)dx$, $f(x)=\max\{1, \ln(1+x^2)\}$;

e) $\int_0^1 f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x}, & x\in(0, 1] \\ -1, & x=0 \end{cases}$; f) $\int_0^1 f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-\sqrt{x})^2}{1-x}, & x\in[0, 1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$;

g) $\int_0^1 f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\in(0, 1] \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0 \end{cases}$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}, & x\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{1}{3}, & x=0 \end{cases}$.

Calculați integralele următoare:

2. a) $\int_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{1}{x(x^2+1)}dx$; b) $\int_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}dx$; c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\dfrac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}dx$; d) $\int_{-2}^{0}\dfrac{3x+2}{x^3+x^2-2}dx$.

3. a) $\int_0^1\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; b) $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$; c) $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x^2+3}}dx$; d) $\int_{-2}^{2}(2x^5+4)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

4. a) $\int_1^2\sqrt{x^2-1}dx$; b) $\int_{-3}^{1}\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$; c) $\int_0^1\dfrac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$; d) $\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}dx$.

5. a) $\int_1^e\dfrac{\ln^2 x}{x}dx$; b) $\int_2^3\dfrac{\ln x}{(x-1)^3}dx$; c) $\int_0^1 e^x\ln(1+e^x)dx$; d) $\int_0^1\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

6. a) $\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\,dx$; b) $\int_{-2\pi}^{0}\sin|x|\,dx$; c) $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx$; d) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}\,dx$.

7. a) $\int_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{|x^2-1|}{x(x^2+1)}dx$; b) $\int_{-1}^{1}|e^x-1|\,dx$; c) $\int_{-1}^{1}e^{x+|x|}\,dx$; d) $\int_0^3 e^{x+|x-1|}dx$.

8. a) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$; b) $\int_0^2 x\cdot e^{|x-1|}dx$; c) $\int_0^{2\pi}x|\sin x|\,dx$; d) $\int_0^{2\pi}x\,|\cos x|\,dx$.

9. a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos^2 x}{1-2\sin^2 x}dx$; b) $\int_0^{\pi}\dfrac{|\cos x|}{4-3\cos^2 x}dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^4 x\,dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^5 x\,dx$.

10. a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\sqrt{\cos 2x}dx$; b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\sqrt{\cos 2x}dx$; c) $\int_0^{\pi}\dfrac{1}{1+|\cos 5x|}dx$; d) $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{\sqrt{(2-\cos x)^2+\sin^2 x}}dx$.

11. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin^2 x\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos^2 x\,dx$; c) $\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\,dx$; d) $\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\,dx$.

12. a) $\int_0^{\pi}|\cos nx|\,dx$; b) $\int_0^{\pi}\sin^2 nx\,dx$; c) $\int_0^{2\pi}\arccos(\cos nx)dx$; d) $\int_0^{\pi}\dfrac{1}{1+|\sin nx|}dx$.

13. a) $\int_0^1\arcsin\sqrt{x}dx$; b) $\int_0^1\arccos\sqrt{x}dx$; c) $\int_0^1 x\cdot\arcsin\sqrt{x}dx$; d) $\int_0^1\sqrt{x}\cdot\arccos\sqrt{x}dx$.

14. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)e^x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; d) $\int_0^{\pi}\dfrac{x\cdot\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

15. Reprezentați și calculați aria subgraficului Γ_f:

a) $f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4x^2}{|x+1|+|x-1|}$;

b) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x\right|$.

16. Reprezentați și calculați aria mulțimii D din semiplanul superior ($y \geqslant 0$), mărginită de:

a) parabola de ecuație $y = -x^2 + 2x + 3$ și axa Ox;

b) parabola de ecuație $y^2 = x$, axa Ox și dreapta de ecuație $x + y = 2$.

17. Reprezentați și calculați aria mulțimii D din plan:

a) $D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y^2 \leqslant x \text{ și } 2y + x \leqslant 8\}$;

b) $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2 - x^2 \text{ și } y^2 \leqslant x\}$;

c) $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x^3 \text{ și } xy \leqslant 1\}$;

d) $D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x^2+\cos\dfrac{\pi x}{2}\right\}$.

18. Stabiliți inegalitățile următoare:

a) $1\leqslant\int_0^1\sqrt{x^4+1}\,dx\leqslant\sqrt{2}$;

b) $2\sqrt{e}\leqslant\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{1-x^2}dx\leqslant 1+e$.

19. Calculați următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1-x^n)\,dx$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin nx}{n+x}dx$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^8\dfrac{n\cdot\sqrt[3]{x}-1}{n\cdot\sqrt[3]{x}+1}dx$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^4\dfrac{n\cdot\sqrt{x}-1}{nx\sqrt{x}+1}dx$.

20. Folosind metoda integrării prin părți, stabiliți o relație între integralele I_n și I_{n-1} ($n \geqslant 1$) și calculați integralele I_0, I_1, I_2, I_3, în următoarele situații:

a) $I_n=\int_1^e(\ln x)^n\,dx$; b) $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{e^x}dx$;

c) $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x}\,dx$; d) $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$.

21. Calculați integrala $\int_0^2 f(x)dx$, unde

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}},\ \forall x\in[0,2]$.

Aplicații ale integralei definite

1. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

a) Stabiliți monotonia lui f.

b) Determinați $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ pentru care:

$f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x+2},\ \forall x\neq-2$.

c) Calculați aria suprafeței limitată de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 0$.

2. Fie $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$.

a) Calculați $f'(x)$, $\forall x \in (0, \pi)$ și determinați punctele de extrem ale funcției.

b) Calculați aria curinsă între graficul funcției și axa Ox.

3. Fie $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln(1 + x)$.

a) Calculați $f'(x)$ și stabiliți intervalele de monotonie.

b) Pentru $\alpha \in (-1, 0)$, calculați $A(\alpha)$ - aria suprafeței cuprinsă între graficul lui f, axa Ox și dreptele $x = \alpha$ și $x = 0$.

c) Calculați $\lim\limits_{\alpha\to-1}A(\alpha)$.

4. Fie $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

b) Determinați o primitivă a lui f pe $[0, 3]$.

c) Arătați că f verifică ipotezele teoremei lui Lagrange și determinați valoarea lui $c \in (0, 3)$ din teoremă.

d) Calculați aria suprafeței determinată de graficul funcției și axa Ox.

e) Calculați volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5. Fie $f:\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos 3x$.

a) Calculați $f'(x)$, $f''(x)$ și $f^{(n)}(x)$, $n \geqslant 3$.

b) Reprezentați grafic funcția f.

c) Calculați aria suprafeței determinată de graficul funcției f și axa Ox.

d) Calculați volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

6. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 4e^{-x}$.
a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
b) Fie $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \ln 4 \text{ și } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Calculați aria lui S și volumul corpului obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.
c) Fie $S' = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \ln 4 \text{ și } f(x) \leqslant y \leqslant 5\}$. Calculați aria lui S și volumul corpului obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.

7. Fie $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 4x$.
a) Fie $S = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ și } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$. Calculați aria suprafeței S.
b) Demonstrați că $\sin^4 4x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 16x - \frac{1}{2}\cos 8x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.

8. Fie $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.
a) Calculați $\int f(x)dx$.
b) Pentru $\alpha \in (1, e)$, soluție a ecuației $f(x) = x$, notăm: $S(\alpha) = \{(x, y) \mid \alpha \leqslant x \leqslant e \text{ și } f(x) \leqslant y \leqslant x\}$. Calculați aria lui $S(\alpha)$.

9. Fie $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
a) Arătați că f este bijectivă și calculați f^{-1}.
b) Fie $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ și } f^{-1}(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Calculați aria lui S.

10. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
a) Arătați că $f(x) + f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Calculați: $\int_{-3}^{3} f(x)dx$.
c) Fie $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, f(x) \leqslant y \leqslant 1\}$. Calculați aria lui S și volumul corpului de rotație obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.

11. O sferă și un cub au fiecare aceeași arie totală, S. Care are volumul mai mare?
Indicație. Se calculează în funcție de S raza sferei și latura cubului.

12. Fie $g(x) = x^2e^{-x}$, $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ și $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = \frac{1}{e} + \frac{4}{e^2} + \frac{9}{e^3} + \ldots + \frac{n^2}{e^n}$. Dacă A_n este aria mulțimii $\{(x, y) \mid n \leqslant x \leqslant n+1, 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}, n \in \mathbb{N}^*$, atunci alegeți răspunsul corect:
1) a) $A_1 \geqslant 1$; b) $A_{200} = 2$; c) $A_1 \in \left(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}\right)$;
d) $A_{101} > A_{52}$; e) $A_2 = 1$.
2) a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{-3}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;
d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{e}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

13. Fie funcția $f: (-\infty, 0) \cup (1/2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2x^2 - x)$ și $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$, două șiruri definite astfel $x_n = f^{(n)}(1), \forall n \geqslant 1$ și $y_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx, \forall n \geqslant 1$.
Atunci alegeți răspunsul corect:
1) a) $x_5 = 50 \cdot 3!$; b) șirul (x_n) strict crescător;
c) șirul (x_n) mărginit; d) $x_5 = 33 \cdot 4!$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
2) a) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 5$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{-1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
d) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -1$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{e^2}$.

14. Cu ajutorul integralelor definite, calculați limitele următoarelor șiruri ($n \geqslant 1$):
a) $a_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{n\pi}{2n}\right)$;
b) $a_n = \frac{1}{n^2}\left(1 \cdot \sin\frac{\pi}{2n} + 2 \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + n \cdot \sin\frac{n\pi}{2n}\right)$;
c) $a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\ldots(n^2+n^2)}$;
d) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[2n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+2n)}$.

Probleme de tip bacalaureat

Grupuri

1. Se consideră matricele

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea

$\mathscr{H}=\left\{H(x)\,\middle|\,H(x)=I_2+xA,\ x\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\right\}$.

a) Să se arate că $I_2\in\mathscr{H}$.
b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $2xy+x+y\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ pentru orice $x,\ y\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.

d) Să se arate că

$H(x)H(y)=H(2xy+x+y),\ \forall x,\ y\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.

e) Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe $\mathscr{H}$ o structură de grup abelian.
f) Să se arate că grupurile $(\mathscr{H},\ \cdot)$ și $(\mathbb{R},\ +)$ sunt izomorfe.
g) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$H(x)=H\left(\frac{1}{2}\right)H\left(\frac{3}{2}\right)H\left(\frac{5}{2}\right)...H\left(\frac{2007}{2}\right)$.

2. Considerăm pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție „$\circ$" definită prin $x\circ y=xy-2x-2y+6$.

a) Să se verifice dacă legea „$\circ$" este asociativă.

b) Să se calculeze $x\circ y-(x-2)(y-2)$.

c) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$".
d) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $x\circ y=x,\ \forall y\in\mathbb{R}$.

e) Să se determine soluțiile ecuației
$x\circ(x+1)\circ(x+2)\circ...\circ(x+2006)=2$.

3. Se consideră mulțimea

$\mathscr{M}_p=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{a} & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\,\middle|\,\hat{a},\hat{b},\hat{c}\in\mathbb{Z}_p\right\}$, unde $p>2$ este un număr natural impar și matricea $I=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I\in\mathscr{M}_p$.
b) Dacă $A,\ B\in\mathscr{M}_p$, să se arate că $AB\in\mathscr{M}_p$.
c) Să se arate că $A^p=I$ pentru orice $A\in\mathscr{M}_p$.
d) Să se determine două matrice $A,\ B\in\mathscr{M}_p$ cu proprietatea că $AB\neq BA$.
e) Să se arate că $(\mathscr{M}_p,\ \cdot)$ este grup.
f) Să se arate că p este prim dacă și numai dacă ord$A=p$, oricare ar fi $A\in\mathscr{M}_p\setminus\{I\}$.
g) Să se dea exemplu de grup necomutativ cu p^3 elemente, p fiind un număr natural prim și impar.

4. Se consideră mulțimile

$\mathscr{M}=\left\{A(x)\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\,\middle|\,A(x)=\begin{pmatrix}x & 0 & 1-x\\ 0 & 0 & 0\\ 1-x & 0 & x\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$

și $\mathscr{N}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$, iar pe $\mathbb{R}$ se definește

legea de compoziție $x\circ y=2xy-x-y+1$.

a) Să se arate că $x\circ y=2(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$, oricare ar fi $x,\ y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziție este asociativă.

c) Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, avem

$x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_n=2^{n-1}(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})\cdots(x_n-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$.

d) Să se arate că, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$,
$A(x)A(y)=A(2xy-x-y+1)$.

e) Să se rezolve ecuația $A^{2005}(x)=A(x)$.

f) Fie $\mathscr{P}=\{C\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\,|\,A(x)\cdot C=C\cdot A(x)=A(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.
Să se determine mulțimile $\mathscr{P}-\mathscr{N}$ și $\mathscr{M}\bigcap\mathscr{P}$.

5. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$\circ$" prin

$x\circ y=3xy+3x+3y+2$, oricare ar fi $x,\ y\in\mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x \circ y = 3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $e \circ x = x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $(-1) \circ x = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

f) Să se rezolve ecuația $\log_2 x \circ \log_2 y = -1$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție „$\circ$“ definită prin $x \circ y = x + y - 9$. Se știe că legea este asociativă.

a) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$“.

b) Să se determine simetricul elementului $x \in \mathbb{R}$, față de legea „$\circ$“.

c) Să se calculeze $0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 5$.

d) Să se afle câte soluții reale are ecuația $4^x \circ 2^x = 11$.

e) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x-2} \circ \sqrt{102-x} = 1$.

7. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție “$\circ$” prin $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Să se calculeze $x \circ y - (x+3)(y+3) + 3$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine pentru ce valori ale lui $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

c) Să se determine mulțimea $\{(a, b) \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \mid a \circ b \in \mathbb{N}\}$.

d) Să se afle câte soluții are ecuația $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -3$, $x \in (0, \infty)$.

e) Să se afle câte elemente are mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid 2^x \circ 3^x = -3\}$.

8. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

a) Să se arate că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$“.

c) Să se determine elementul neutru al legii „$*$“.

d) Să se calculeze $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori}}$.

e) Să se rezolve ecuația $x * x * x * x * x = 17$.

f) Să se calculeze $(-27) * (-26) * \ldots * 2 * 3 * \ldots * 27$.

9. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y + 10$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $(-10) \circ 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2 \circ x \leqslant 10$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x \circ 2^x = 12$.

d) Să se găsească $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ y \in \mathbb{Q}$.

e) Să se arate că legea „$\circ$” determină pe $\mathbb{Z}$ o structură de grup.

10. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

a) Să se verifice că $A \in G$ și $I_2 \in G$.

b) Să se găsească o matrice $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T \notin G$.

c) Să se verifice că $A^2 = I_2$.

d) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.

e) Să se calculeze A^{2005}.

f) Să se verifice dacă G este grup, unde legea de compoziție e dată de adunarea matricelor.

11. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$\circ$“ prin $x \circ y = 2xy - x - y + 4$.

a) Să se determine valorile lui $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

b) Să se determine, dacă există, elementul neutru al legii „$\circ$“.

c) Să se calculeze cardinalul mulțimii $\{x \in \mathbb{R} \mid x \circ 2 = 3\}$.

d) Să se calculeze $(-1) \circ 0 \circ 1$.

e) Să se determine, dacă există, x pentru care $x \circ x = x$.

12. Se consideră mulțimea $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și funcția $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$.

a) Să se arate că, dacă f și $g \in G$, atunci $f \circ g \in G$.

b) Să se arate că $1_{\mathbb{R}} \in G$.

c) Să se arate că $\forall f \in G$, există $g \in G$ astfel încât $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$.

d) Să se arate că $1_{\mathbb{R}} \circ f = f \circ 1_{\mathbb{R}} = f$.

e) Să se arate că $f \circ g = g \circ f$ nu este adevărată pentru toate funcțiile f și g din G.

f) Să se determine $H = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid h \circ f = f \circ h, \forall f \in G\}$.

13. Pe mulțimea

$$M=\left\{A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq -2\right\}.$$ Se introduce legea de compoziție „$\circ$“ astfel:

$A \circ B = A \cdot B + 2(A + B + I_3)$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $A \circ B \in M$, pentru orice A și B din M.

b) Să se verifice dacă legea este comutativă.

c) Să se verifice dacă legea este asociativă.

d) Să se verifice dacă există element neutru pentru legea de compoziție.

e) Ce structură algebrică determină pe M legea „$\circ$“?

f) Să se calculeze $I_3 \circ I_3$.

14. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea „$\circ$“ prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că
$x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească două numere $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

d) Să se determine elementul $e \in \mathbb{R}$, care verifică relația $x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n = 3^{n-1}(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1) - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Inele și corpuri

1. În inelul $\mathbb{Z}_{12}$ considerăm ecuațiile $\hat{x}^4 = \hat{0}$, $\hat{x}^2 = \hat{x}$, $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$.

a) Să se determine câte elemente inversabile în raport cu înmulțirea are inelul $\mathbb{Z}_{12}$.

b) Să se calculeze produsul soluțiilor ecuației $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$.

c) Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^2 = \hat{x}$.

d) Să se determine numărul de soluții ale ecuației $\hat{x}^4 = \hat{0}$.

e) Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din inelul $\mathbb{Z}_{12}$, acesta să fie o soluție a ecuației $\hat{x}^4 = \hat{0}$.

2. Pe mulțimea $G = (-2, +\infty)$ se definește legea $x * y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se determine elementul neutru al legii.

b) Să se calculeze simetricul lui 2 în raport cu legea „$*$“.

c) Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în $\mathbb{Z}_6$.

d) Să se calculeze probabilitatea ca un element din inelul $\mathbb{Z}_8$ să fie inversabil.

3. a) Să se determine câte soluții are ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_3$.

b) Să se determine câte elemente inversabile față de adunare are inelul $\mathbb{Z}_{2006}$.

c) Să se calculeze câte soluții are ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $(\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot)$.

d) Să se calculeze produsul elementelor inelului $\mathbb{Z}_2$.

4. a) Să se determine câte soluții are ecuația $\hat{3}x = \hat{2}$ în inelul $\mathbb{Z}_4$.

b) Să se calculeze produsul elementelor mulțimii $\mathbb{Z}_4$.

c) Să se determine câte elemente inversabile față de înmulțire sunt într-un corp cu 3 elemente.

5. Fie p un număr prim, $p \geqslant 3$.

a) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}_{p-1}, +)$ este grup.

b) Să se demonstreze că $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_{p-1}, x \neq \hat{0}$, există $\hat{y} \in \mathbb{Z}^*_{p-1}$ astfel încât $\widehat{xy} = \hat{1}$.

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}_{p-1}, +, \cdot)$ este corp.

d) Să se arate că, dacă $\hat{x} \in \mathbb{Z}^*_{p-1}$ și $\hat{x}^2 = \hat{1}$, atunci $\hat{x} \in \{\hat{1}, \widehat{p-1}\}$.

e) Să se demonstreze că $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot ... \cdot \widehat{p-1} = \widehat{p-1}$.

f) Să se demonstreze că, dacă p este număr compus și nu este pătrat perfect, atunci $p|(p-1)!$

Polinoame

1. Se consideră mulțimea
$F_2 = \left\{ \hat{a}_2 X^2 + \hat{a}_1 X + \hat{a}_0 \mid \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

a) Să se determine numărul polinoamelor de gradul al doilea din F_2.
b) Să se calculeze cardinalul mulțimii F_2.
c) Să se determine polinoamele $f \in F_2$ pentru care $\hat{0}, \hat{1}$ și $\hat{2}$ din $\mathbb{Z}_3$ sunt simultan rădăcini.
d) Să se calculeze $s(\hat{x}) = \sum\limits_{f \in F_2} f(\hat{x}),\ \hat{x} \in \mathbb{Z}_3$.

2. Considerăm polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.
a) Să se calculeze $P'(X)$, $P''(X)$, $P^{(3)}(X)$.
b) Să se demonstreze identitatea: $P(X) - P'(X) + P''(X) - P^{(3)}(X) = X^3 + (a-3)X^2 + (b-2a+6)X + c - b + 2a - 6$.
c) Notând cu $Q(X)$ polinomul de la b), să se arate că $Q(X) + Q'(X) = P(X)$.
d) Să se arate că $(e^x Q(x))' = e^x P(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
e) Dacă P nu are rădăcini reale, atunci $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ sau $P(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
f) În ipoteza de la e), să se arate că $f(x) = e^x Q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este strict monotonă.
g) Să se arate că, dacă P nu are rădăcini reale, atunci nici Q nu are rădăcini reale.

3. Se consideră polinoamele $f = 8X^3 - 6X - 1$, $g = 4X^3 - 3X$ și mulțimea $M = \left\{ h\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) \mid h \in \mathbb{Q}[X] \right\}$.
a) Să se arate că f nu are rădăcini raționale.
b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la g.
c) Să se arate că $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) = 0$.
d) Să se verifice relația $\cos\frac{\pi}{9} \notin \mathbb{Q}$.
e) Dacă $h \in \mathbb{Q}[X]$ și $h(\cos 20°) = 0$, să se arate că h este divizibil cu f.

4. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X + 2$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, iar $S_0 = 3$.
a) Să se calculeze $f(-2) \cdot f(2)$.
b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.
c) Să se arate că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.
d) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + x_3$.
e) Să se arate că $S_{k+3} - 6S_{k+1} + 2S_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $S_n \subset \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. Se consideră polinomul $f = X^4 - 5X + 3$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
b) Să se calculeze $f(1) f(-1)$.
c) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.
d) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.
e) Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, atunci $f(x) \notin \mathbb{Z}$.
f) Să se demonstreze că există o infinitate de elemente $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(x) \in \mathbb{N}$.

6. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - X^2 + aX - 6$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.
a) Să se determine a astfel încât restul împărțirii lui f la $(X-1)(X-2)$ să nu depindă de X.
b) Să se determine a astfel încât
$x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1) + x_3^2(x_3^2 - 1) = 4x_1x_2x_3$.
c) Să se arate că, dacă $a = 0$, atunci polinomul nu are rădăcini raționale.
d) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2m & 6 & m \\ 5 & 5(m-1) & m \\ m & 8 & m+1 \end{pmatrix}$,

unde $m \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\det A = 5(m^3 - m^2 - 6)$.

e) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} 2mx + 6y + mz = 0 \\ 5x + 5(m-1)y + mz = 0 \\ mx + 8y + (m+1)z = 0 \end{cases}$, unde m este un parametru rațional.

7. Se consideră polinomul $f = (X+1)(X+2)(X+3)(X+4) + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
a) Să se calculeze $f(0)$.
b) Să se calculeze $f - (X^2 + 5X + 5)^2$.
c) Să se afle numărul de rădăcini reale ale polinomului f.
d) Să se calculeze produsul $x_1x_2x_3x_4$.
e) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

8. Se consideră polinomul $f = X^8 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze expresia $f-(X^4-\sqrt{2}X^2+1)(X^4+\sqrt{2}X^2+1)$.

b) Să se determine numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

c) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$.

d) Să se calculeze produsul $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$.

e) Să se determine restul împărțirii lui f la $X^4-\sqrt{2}X^2+1$.

9. Se consideră polinomul $f = X^4-5X^2+6$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine câte soluții reale are ecuația $x^2 - 5x + 6 = 0$.

b) Să se determine numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

c) Să se determine câte rădăcini raționale are polinomul f.

d) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

e) Să se calculeze suma $x_1^{2005}+x_2^{2005}+x_3^{2005}+x_4^{2005}$.

10. Se consideră polinomul $f = X^4+X^2+1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze suma $f(-1)+f(1)$.

b) Să se determine numărul rădăcinilor raționale ale polinomului f.

c) Să se calculeze expresia $f-(X^2-X+1)(X^2+X+1)$.

d) Să se calculeze suma $x_1+x_2+x_3+x_4$.

e) Să se calculeze produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.

11. Se consideră polinoamele $f = X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2+X+1$, cu rădăcinile $y_1,y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze suma y_1+y_2.

b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

c) Să se calculeze produsul $(X-1)f$.

d) Să se calculeze suma $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$.

e) Să se calculeze produsul $f(y_1)\cdot f(y_2)$.

12. Polinomul $f = X^2-X+1$ are rădăcinile $x_1,x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine restul împărțirii polinomului X^3+1 la polinomul f.

b) Să se calculeze modulul rădăcinii x_1.

c) Să se calculeze x_1^3.

d) Să se calculeze S_3.

e) Să se calculeze probabilitatea ca S_n să fie egal cu -2 când $n \in \{1, 2, ..., 8\}$.

13. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se afle restul împărțirii polinomului $f = X^3 + X^2 + X + 1$ la polinomul $g = X + 1$.

c) Să se calculeze probabilitatea ca o rădăcină a polinomului f, aleasă la întâmplare, să fie reală.

d) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3$.

e) Să se calculeze suma $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

14. Polinomul $f = X^2 + 2X + 4$ are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine restul împărțirii polinomului $X^3 - 8$ la polinomul f.

b) Să se calculeze modulul rădăcinii x_1.

c) Să se calculeze x_1^6.

d) Să se calculeze S_3.

e) Să se calculeze $S_1 + S_3$.

Primitive

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

c) Să se găsească o primitivă a lui f care se anulează în 0.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x\cdot f'(x)}{x^4}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$

c) Să se determine câte puncte de extrem local are f.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}$.

3. Se consieră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ și $g(x) = f(x) - \ln x$.

a) Să se arate că $g'(x) = -\dfrac{(1-x)^2}{x(1+x)^2}$, pentru $x \in (0, +\infty)$.

b) Să se calculeze $f(1)$, $g(1)$ și $g'(1)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

d) Să se arate că dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției.

e) Să se calculeze $\int g'(x)dx$.

f) Să se arate că funcția g este descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

g) Să se demonstreze că $\dfrac{2(x-1)}{x+1} \leqslant \ln x,\ \forall x \in [1, +\infty)$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 4x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f(x) \geqslant 2x \cdot (x - 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine punctul de extrem local al funcției f.

d) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $[1, \infty)$.

e) Să se arate că $f(x) \geqslant -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\int \dfrac{f(x)}{x} dx$.

5. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = xe^x$, $f_{n+1}(x) = f_n'(x),\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f_0(0)$.

b) Să se calculeze $f_1(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.

d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = e^x(x + n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = e^x + e^{-x}$ și $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $f_0(-x) = f_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $f_0(x) \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{2k}(x) = f_0(x)$ și $f_{2k+1}(x) = f_1(x)$.

7. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)(x^2+3)}$.

a) Să se demonstreze că $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

f) Să se demonstreze că, pentru orice $x \in [0, \infty)$, $0 < f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

g) Să se calculeze

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) + ... + f(\sqrt{2n+1})\right)$.

Integrala definită

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}$, funcțiile $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{(t^2+1)^n}$ și fie $I_n = \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$.

a) Să se calculeze $f_0(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $f_{n-1}(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)(f_{n-1}(x) - f_n(x))$;

$n \in \mathbb{N}^*, x \in (0, \infty)$.

c) Să se arate că $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $I_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot ...(2n-2)}\dfrac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot ...\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n}dt\right) \neq \lim_{x\to\infty}\int_0^x\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(t^2+1)^n}\right)dt.$$

g) Să se dea exemplu de un șir de funcții $(f_n)_{n\geqslant 1}$, $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continue astfel încât limitele de mai jos să aibă sens și, în plus,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt\right) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt.$$

2. Se consideră integrala $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se calculeze $\int \cos nx dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin nx \sin x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $\cos(n-1)x = \cos nx - \cos x + \sin nx \sin x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

e) Să se arate că $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\lim_{n\to\infty} \cos^n x \cos nx\right) dx$$

g) Să se dea exemplu de un șir de funcții $(f_n)_{n\geqslant 1}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue astfel încât limitele de mai jos să aibă sens și $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) \neq \int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$.

3. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_0(x) = e^x - 1$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $f_1(x) = e^x - 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - ... - \frac{x^n}{n!}$.

d) Să se deducă inegalitatea $e^x \geqslant x + 1$, $\forall x \geqslant 0$.

e) Să se arate că $0 \leqslant f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant 0$.

f) Să se arate că $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + ... + \frac{x}{n!} \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\forall x \geqslant 0$.

g) Să se arate că $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} = e^x, \forall x \geqslant 0$

4. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{2004}$ și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^{2005} - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că funcția F este bijectivă.

f) Să se calculeze $\int_0^a g(x)dx$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este inversa funcției F și $a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2005}$.

5. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{-x}x^n$, $g:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - 2e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)$ și $h:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)dt$.

a) Să se calculeze $g(0)$ și $h(0)$.

b) Să se verifice că $g'(x) = h'(x)$, $\forall x \geqslant 0$.

c) Să se arate că $h(x) = g(x) + 1$, $\forall x \geqslant 0$.

d) Să se arate că $-1 \leqslant g(x) \leqslant \frac{2e^{-x}x^{n+1}}{n!} - 1$, $\forall x \in [0, n]$.

e) Să se arate că, dacă $x \geqslant 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$.

f) Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x, \forall x \geqslant 0.$$

6. Se consideră integrala $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$, unde $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant 1$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $0 \leqslant I_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, 1]$.

c) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n(x) = 0$, pentru $x \in [0, 1]$.

d) Să se arate că $I_n(x) + I_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, 1]$.

e) Să se deducă: $I_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x}{1} + (-1)^n I_0(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se deducă:

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}\right).$$

7. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și integralele I_n, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

a) Să se calculeze $I_1 = \int_0^1 (1-x^2)dx$.

b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $I_n = \dfrac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

e) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că

$\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.

f) Să se demonstreze că $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.

g) Să se arate că șirul I_n este convergent.

8. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_0(x) = e^x$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $f_1(x) = e^x - 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{n+1}(x) = e^x - 1 - \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^2}{2!} - \ldots - \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.

e) Să se arate că $0 < f_n(x) \leqslant e^x \cdot \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$.

f) Să se arate că funcția f_n este convexă pe intervalul $(0, \infty)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

g) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall x > 0$.

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se afle câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

10. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \geqslant 0$.

b) Folosind teorema lui Lagrange, să se arate că $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$, $\forall x, y \in [1, \infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$.

d) Să se arate că $g(x) = \int_0^1 f(tx)dt$, $\forall x > 0$.

e) Să se arate că

$|g(x) - g(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$, $\forall x,\ y \in (0, \infty)$.

f) Să se arate că ecuația $g(x) = x$ are o unică soluție în $(0, \infty)$, notată a.

g) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ este convergent la a.

11. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^3 + 3x - 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

e) Să se arate că funcția f este bijectivă.

f) Dacă notăm cu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcției f, să se calculeze $\int_{-1}^{\frac{5}{2}} g(x)dx$.

12. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)$, $\alpha \in (0; +\infty)$.

a) Dacă $f(x) = \ln(x + \alpha) - A \cdot \ln x$, să se calculeze A.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției.

c) Să se calculeze $f'(x)$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{f(1)}{\alpha}$.

e) În cazul $\alpha = 1$, dacă $\int\limits_{2005}^{2006} f'(x)\,dx = \ln\left(1 - \dfrac{B}{2006^2}\right)$, să se calculeze B.

13. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

d) Să se determine $\int_0^1 f'(x)dx$.

e) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}$.

14. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0(x)=2$ și $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)\,dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $I_1(0)+I_2(0)+...+I_{2006}(0)$.

b) Să se calculeze $I_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $I_{10}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_0(1)+I_1(1)+...+I_n(1)}{n}$.

15. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=\sin x$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ și $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f_0(\pi)$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f_0(x)$ nu există.

c) Să se calculeze $f_1(\pi)$.

d) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx$.

e) Să se determine $f_{10}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_0(x)+f_1(x)+...+f_n(x)}{n}=0$, $x\in\mathbb{R}$.

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{x^2-1}$.

a) Să se afle valorile lui $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$ pentru care are loc egalitatea $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2-1}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f către $+\infty$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d) Să se calculeze $\int_2^4 f(x)\,dx$.

e) Să se determine mulțimea $\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\,\middle|\, f'(x)>1\right\}$.

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $f(x)=x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x^2)$.

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

d) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

e) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă către ∞.

f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(1)\cdot f(-1)\cdot f'(1)\cdot f'(-1)$.

c) Să se arate că $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) Să se arate că, dacă $x, y\in\mathbb{R}$ și $f(x)+f(y)=1$, atunci $xy=\pm1$.

e) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$.

f) Să se calculeze $f(0)\cdot f'(0)$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

d) Să se arate că dreapta $y=\sqrt{2}\cdot x$ este asimptotă oblică către $+\infty$ la graficul lui f.

e) Să se rezolve ecuația $f(x)+f(2x)=f(3x)+f(4x)$.

f) Să se calculeze $(2)'$.

Aplicații ale integralei definite

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.

a) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între axa Ox, graficul funcției f și dreptele $x=2$ și $x=-2$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$.

2. Fie numerele $0<a<b<1$ și funcția $f:[a;b]\to[a;b]$, $f(x)=x^2-(a+b-1)x+ab$.

a) Să se determine $f(a)$ și $f(b)$.

b) Să se arate că f este strict crescătoare și convexă pe $[a;\ b]$.

c) Să se arate că f este bijectivă;

d) Să se determine aria delimitată de graficul funcției f pe $[a;\ b]$.

e) Să se arate că $\int_a^b f^{-1}(x)dx > \frac{b^2-a^2}{2}$.

f) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $\int_a^b f^{-1}(x)dx \in \mathbb{Q}$.

g) Dacă $a=\frac{1}{n}$ și $b=\frac{1}{m}$, cu $m, n\in\mathbb{N}^*$, $m<n$, să se determine perechea $(m,\ n)$ de numere prime astfel încât $N=m^2\cdot n^2\cdot\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\left[f(x)+f^{-1}(x)\right]dx$ să fie număr natural prim.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$. Notăm prin $f^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n a functiei f în punctul x.

a) Să se calculeze care este perioada principală a funcției f.

b) Să se determine câte puncte de maxim local are funcția f în intervalul $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{25\pi}{2}\right]$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-\frac{\pi}{2}$ și $x = \pi$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x |f(t)|dt}{x}$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

c) Să se determine câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

d) Să se calculeze cât este $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

e) Să se determine câte puncte de extrem local are funcția f.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|x^3-\frac{x}{2}\right|$.

a) Să se determine câte puncte de discontinuitate are funcția f

b) Să se determine în câte puncte nu este derivabilă funcția f.

c) Să se calculeze care este aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Să se verifice dacă pe intervalul $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ funcția f este convexă sau concavă.

e) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x^2+3) - \log_2(x^2+2)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,\ 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0,\ \infty)$.

d) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $-\infty$.

e) Să se arate că $0 < f(x) \leqslant \log_2 3 - 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

f) Să se arate că

$$\int_0^x \log_2(t^2+a^2)dt = x\ln(x^2+a^2)-\frac{2x}{\ln 2}+\frac{2a}{\ln 2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a},$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall a\in\mathbb{R}^*$.

g) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$.

a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

c) Să se afle cel mai mic număr real a, cu proprietatea că $f(x) < a$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele $x = \frac{1}{2}$ și $x = 1$.

e) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\left((f(x)-1)\frac{x^3}{x+1}\right)$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\{x\}-\{x\}^2$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real *x*.

a) Să se afle câte dintre numerele $f(0{,}25)$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}75)$ și $f(1)$ sunt egale cu $f(0)$.

b) Să se determine perioada principală a funcției *f*.

c) Să se calculeze $\lim_{x\to 0} f(x)$.

d) Să se arate că $0 \leqslant f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

9. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

c) Să se determine câte puncte de inflexiune are graficul funcției *f*.

d) Să se determine câte puncte de extrem local are funcția *f*.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuație $x = -1$ și $x = 1$.

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

c) Să se determine câte puncte de inflexiune are graficul funcției *f*.

d) Să se determine câte puncte de extrem local are funcția *f*.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se determine câte puncte de inflexiune are graficul funcției *f*.

d) Să se afle câte puncte de extrem local are funcția *f*.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine mulțimea $\{x\in\mathbb{R} \mid f'(x)>0\}$.

c) Să se calculeze suma $f(0) + f(1) + \ldots + f(n)$.

d) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+\ldots+f(n)}{n^3}$.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane, cuprinsă între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1, 2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$.

a) Să se calculeze expresia

$f(x)-\frac{1}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)},\ x\in\mathbb{R}-\{-1, 2\}$.

b) Să se determine asimptotele verticale la graficul funcției *f*.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele $x = 3$ și $x = 4$.

d) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x)$.

e) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(f(3)+f(4)+\ldots+f(n))$.

14. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$.

a) Să se calculeze expresia $f(x)-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$, $x\in[0,\infty)$.

b) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

c) Să se calculeze $f'(x),\ x\in[0,\infty)$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

e) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

Teme de sinteză pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Tema 1 – Tipuri de raționament logic:

inducția matematică (clasa a IX-a)

1. Folosind metoda inducției matematice demonstrați următoarele egalități:

a) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2. Demonstrați prin inducție matematică:

a) $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$, $\forall\, n\geqslant 1$.

b) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $1+a+a^2+\ldots+a^n=\dfrac{a^{n+1}+1}{a-1}$, $a\neq 1$.

c) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2=-n(2n+1)$.

3. Calculați $S_2=1\cdot 5+2\cdot 6+\ldots+n\cdot(n+4)$.

4. a) Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$ și verificați prin metoda inducției matematice rezultatul.

5. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{k(k+4)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+4}$, $k\in\mathbb{N}^*$. Calculați suma

$S=\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{2\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+4)}$, $n\in\mathbb{N}^*$ și verificați prin metoda inducției matematice rezultatul obținut.

6. Pentru ce valori naturale ale lui n este adevărată inegalitatea: $2^n>4n^2+1$?

7. Demonstrați prin inducție matematică:

a) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}>1$, $\forall n\geqslant 1$.

b) Numărul $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ este multiplu de 19, $n\in\mathbb{N}^*$.

8. Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ este adevărată egalitatea:
$(n+1)(n+2)..(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)$.

9. Demonstrați prin metoda inducției matematice că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, n^3+3n^2+5n+3 este multiplu de 3.

10. Pentru orice $n\geqslant 1$ natural, notăm $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ (citim „n factorial”).

a) Calculați: 1!; 2!; 3!; 4!; 5!;

b) Arătați că $(n+1)!=n!(n+1)$;

c) Demonstrați prin inducție matematică egalitatea: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

Tema 2 – Metode de numărare:

probleme de numărare (clasa a IX-a); mulțimi finite ordonate; permutări ; aranjamente; combinări; binomul lui Newton; probabilități (clasa a X-a)

1. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Calculați media geometrică a elementelor mulțimii M.

b) Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii M.

c) Determinați numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii M.

d) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $\{(a,b) \mid a,b \in M,\ a<b,\ a \text{ divide pe } b\}$.

e) Determinați câte progresii geometrice de trei elemente cu rația pozitivă se pot forma cu elementele mulțimii M.

2. Determinați câte numere de 3 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{0, 1\}$.

3. Determinați câte numere, având cifre distincte, se pot forma folosind cifre aparținând mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

4. Determinați câte submulțimi cu 3 elemente are o mulțime cu 5 elemente.

5. La o petrecere se află 3 băieți și 3 fete. Determinați în câte moduri se pot forma 2 perechi de dansatori.

6. Determinați câte numere de 3 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2, 3\}$.

7. Calculați câte numere de forma $\overline{a0b}$ (a, b cifre) există.

8. Calculați $C_5^0 + C_5^1 + \ldots + C_5^5$.

9. Calculați suma $C_{2006}^0 + C_{2006}^1 + C_{2006}^2 + \ldots + C_{2006}^{2006}$.

10. Calculați câte funcții injective definite pe mulțimea $\{1, 2\}$ cu valori în mulțimea $\{1, 2, 3\}$ există.

11. Determinați câte funcții inversabile se pot defini pe mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ cu valori în A.

12. Determinați câte funcții bijective definite pe mulțimea $\{1, 3, 4, 8\}$ cu valori în mulțimea $\{4, 5, 6\ 8\}$ există.

13. Determinați câte funcții bijective se pot defini de pe mulțimea $\{1, 2, 3\}$ pe mulțimea $\{0, 2, 4\}$.

14. Determinați numărul maxim de drepte distincte determinate de 4 puncte în plan.

15. Calculați suma $C_{10}^0 + 2C_{10}^1 + 2C_{10}^2 + \ldots + 2^{10}C_{10}^{10}$.

16. Calculați probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să fie divizibil cu 2 și cu 5.

17. Calculați probabilitatea ca un element din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ să fie divizor al lui zero.

18. Calculați probabilitatea ca, alegând un element din inelul $\mathbb{Z}_4$, acesta să fie inversabil față de adunare.

19. Se ia la întâmplare un termen din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$. Calculați probabilitatea ca exponentul lui x din acel termen să fie număr întreg.

20. Se ia la întâmplare un termen din dezvoltarea binomului $(1+x)^{10}$. Determinați probabilitatea ca exponentul puterii lui x din acel termen să fie pătrat perfect.

21. Calculați probabilitatea ca un element din inelul $(\mathbb{Z}_6; +; \cdot)$ să fie inversabil.

22. Calculați probabilitatea ca un element din $\mathbb{Z}_8$ să fie inversabil.

Tema 3 – Mulțimi de numere:

mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ (clasele a IX-a și a X-a); mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ (clasa a X-a)

1. Dacă $x = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, Calculați x.

2. Comparați numerele: 2^{81} și 3^{54}.

3. Calculați $[\sqrt{2005^2+2005}]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

4. Determinați câte numere reale $x \in \mathbb{R}$, verifică relația $x - [x] = 0$.

5. Calculați produsul $\left(\log_{2005} 2006\right)\cdot\left(\log_{2006} 2007\right)\cdot\left(\log_{2007} 2005\right)$.

6. Determinați modulul numărului complex $z = 2 - \sqrt{3} - i$.

7. Determinați partea reală a numărului $\dfrac{1}{3+4i}$.

8. Determinați modulul numărului complex $1+\sqrt{3}i$.

9. Determinați modulul numărului $\dfrac{1+i}{2-3i}$.

10. Determinați modulul numărului complex $\dfrac{1}{2+3i}$.

11. Determinați partea reală a numărului i^{2001}.

12. Determinați în ce cadran se află afixul numărului $z = 5 + 6i$.

13. Calculați i^{2006}.

14. Determinați modulul numărului complex $(1 + i)^{20}$.

15. Calculați modulul numărului complex $(\cos 10° + i\sin 10°)^9$.

16. Calculați $\left(-\sqrt{3}+i\right)^6$.

17. Determinați modulul numărului $(1 + i)^{100}$.

18. Determinați modulul numărului $z = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2005}$.

19. Determinați argumentul numărului complex $-i$.

20. Determinați modulul numărului $\dfrac{2+i}{3-i}$.

21. Calculați argumentul numărului $(1 + i)^4$.

22. Determinați câte soluții ale ecuației $z^4 = i$ au argumentul în cadranul I.

23. Calculați $(1 + i)^{100}$.

24. Calculați $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2006}$.

25. Determinați n minim, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^n \in \mathbb{Z}$.

Tema 4 – Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare (clasa a XI-a)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră submulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -3y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Verificați că $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$.

b) Arătați că, dacă $\begin{vmatrix} x & y \\ -3y & x \end{vmatrix}=0$, atunci $x = y = 0$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că, dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $AB \in G$.

d) Arătați că, dacă $A \in G$, atunci $-A \in G$.

e) Arătați că, dacă $A \in G$ și $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$ astfel încât $AB = I_2$.

f) Determinați matricele $A \in G$ pentru care $A^2 = I_2$.

2. Dacă $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determinați matricea A^{2006}.

3. Se consideră mulțimea matricelor de forma $A(x)=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Verificați $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$.

c) Demonstrați prin inducție matematică că $A^n(x)=\begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați determinantul și rangul matricei A.

b) Arătați că matricea A este inversabilă și calculați inversa ei.

c) Arătați că, dacă $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $YA = AY$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $Y=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$.

d) Se consideră matricea $Z=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Arătați, utilizând metoda inducției matematice, că

$Z^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 0 & 2^{n-1}a^n \\ 0 & b^n & 0 \\ 2^{n-1}a^n & 0 & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

5. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}$.

a) Calculați suma elementelor matricei A^2.

b) Calculați $X(a)\cdot X(b)$.

c) Calculați $\det X(a)$.

d) Determinați câte matrice neinversabile conține mulțimea G.

e) Găsiți matricea $(X(a))^{-1}$, dacă $X(a)$ este inversabilă.

6. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și mulțimea $\mathscr{K}(A)=\{X\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \mid AX=XA\}$.

a) Determinați rang A.

b) Calculați A^2 și A^3.

c) Arătați că matricea A este inversabilă și calculați inversa sa.

d) Arătați că, dacă $X, Y\in\mathscr{K}(A)$, atunci $X\cdot Y\in\mathscr{K}(A)$.

e) Arătați că, dacă $X\in\mathscr{K}(A)$, atunci există $a, b, c\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$.

f) Rezolvați în $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ ecuația $X^2=I_2$.

7. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, precum și sistemul $\begin{cases}x+y+z=1\\y+z=0\end{cases}$, $(x,y,z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

a) Determinați matricea sistemului.

b) Calculați rangul matricei A.

c) Rezolvați sistemul.

d) Calculați suma elementelor matricei I_2A.

e) Arătați că ecuația $AX=I_2$, cu $X\in\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ are o infinitate de soluții.

f) Arătați că ecuația $YA=I_3$, cu $Y\in\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ nu are soluție.

8. În inelul $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$.

a) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

b) Arătați că ecuația $X^2=O_2$ are 9 soluții în $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

c) Găsiți numărul de matrice inversabile față de înmulțire din inelul $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

d) Găsiți două matrice $A, B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ pentru care $AB\neq BA$.

e) Găsiți $C\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ pentru care $C^2=I_2$, iar $C\neq I_2$.

f) Demonstrați că există $E\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, $E\neq I_2$ pentru care $E^3=I_2$.

9. În mulțimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathscr{M}_2(\mathbb{C})\to\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $f(X)=X^2$.

a) Calculați determinantul și rangul matricei A.

b) Calculați A^2 și A^3.

c) Arătați că, dacă $Y\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ și $YA=AY$, atunci există $a, b\in\mathbb{C}$ astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}$.

d) Arătați că, dacă $Z=\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}$, unde $a, b\in\mathbb{C}$ și $\det(Z)=0$, atunci $Z^2=O_2$.

e) Găsiți două matrice $U\neq V\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $f(U)=f(V)$.

f) Determinați $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $f(X)=A$.

Tema 5 – Structuri algebrice:

grup; inel; corp (clasa a XII-a)

1. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $a \circ b = (a - 2)(b - 2) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $(0, \infty)$ ecuația $\sqrt[4]{x} \circ \sqrt{x} = 2$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $4^x \circ 2^x < 2$.

d) Găsiți $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

e) Arătați că legea „$\circ$” determină pe intervalul $(2, \infty)$ o structură de grup.

2. Calculați cât este suma $\hat{1} + \hat{3} + \hat{5} + .. + \widehat{15}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{16}, +)$.

3. Calculați câte elemente de ordinul 4 are grupul $(\mathbb{Z}_{16}, +)$.

4. Fie $M = (1, \infty)$ și „$\circ$“ lege de compoziție pe M definită astfel: $x \circ y = xy + ax + by + c, a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Dacă legea are element neutru, demonstrați că $a = b$ și $c = a^2 - a$.

b) Calculați $x \circ x$.

c) Demonstrați că $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nu este soluție a nici unei ecuații de grad 2 cu coeficienți întregi.

d) Demonstrați că, pentru $a = b = -1$ și $c = 2$, $(M, \circ)$ este grup.

e) Arătați că $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 1)$ verifică $f(x \circ y) = f(x) + f(y)$, unde $(M, \circ)$ este grupul de la punctul **d)**.

f) Calculați $\det(-I_3)$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $a \circ b = (a - 2)(b - 2) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $(0, \infty)$ ecuația $\sqrt[4]{x} \circ \sqrt{x} = 2$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $4^x \circ 2^x < 2$.

d) Găsiți $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

e) Arătați că legea „$\circ$” determină pe intervalul $(2, \infty)$ o structură de grup.

6. Fie $K = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[X]$ și $h = X^2 + 1$. Pentru $f, g \in K$, definim $f * g$ ca fiind restul împărțirii lui $f \cdot g$ la h.

a) Arătați că, pentru $f, g \in K$, avem $f + g \in K$ și $f * g \in K$.

b) Calculați $(2 + x) * (1 + 3x)$.

c) Arătați că $1 * f = f * 1 = f$, pentru oricare $f \in K$.

d) Arătați că, pentru $f \in K, f \neq 0$, există $g \in K$ astfel încât $f * g = g * f = 1$.

e) Arătați că există un izomorfism de corpuri de la $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ la $(K, +, *)$.

Tema 6 – Inele de polinoame având coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p prim) (clasa a XII-a)

1. Se consideră polinoamele $f = X^3 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 - X + 1$, cu rădăcinile y_1 și y_2.

a) Aflați câtul împărțirii polinomului f la polinomul g.

b) Aflați restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

c) Calculați suma $f(y_1) + f(y_2)$.

d) Calculați suma $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.

e) Calculați numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

2. Aflați câte rădăcini raționale are polinomul $f = X^3 + X + 2$.

3. Se consideră polinomul $f = X^4 + 3X^2 + 4$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați expresia $f - (X^2 - X + 2)(X^2 + X + 2)$.

b) Aflați numărul de rădăcini reale are polinomul f .

c) Calculați suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

d) Calculați produsul $x_1 x_2 x_3 x_4$.

e) Calculați suma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

4. Se consideră polinomul $f = X^3 - X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați suma $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Calculați $\left(f(0)\right)^2$.

5. Aflați pentru ce valori reale ale numerelor a și b polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + aX + b$ se divide prin X^2+1.

6. Aflați rădăcinile din $\mathbb{Z}_4$ ale polinomului $f = \hat{3}X^2 + \hat{3}X$.

7. Se consideră polinomul $f = (X + i)^7 - (X - i)^7$ cu scrierea algebrică $f = a_6X^6 + ... + a_1X + a_0$ și rădăcinile $x_1, ..., x_6 \in \mathbb{C}$.

a) Aflați a_6.

b) Calculați $f(0)$ și $f(1)$.

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 - x + 20 = 0$.

d) Aflați câte rădăcini reale are polinomul f .

e) Aflați câți coeficienți reali are polinomul f.

8. Se consideră polinomul $f = X^4 - X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați expresia $f - \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$.

b) Determinați mulțimea $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \frac{1}{2}\right\}$.

c) Aflați numărul de rădăcini pozitive ale polinomului f.

d) Aflați $a \in \mathbb{C}$ pentru care $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

e) Calculați produsul $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)(2 - x_4)$.

Tema 7 – Funcții definite pe $\mathbb{N}$ (șiruri): exemple de șiruri: progresii aritmetice; progresii geometrice (clasa a X-a); șiruri convergente (clasa a XI-a)

1. Determinați câte submulțimi de 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., 100\}$, au elementele în progresie aritmetică.

2. Determinați câte submulțimi de 4 elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., 100\}$ au elementele în progresie geometrică.

3. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, calculați $(a^2 - b^2 + c^2)(a^{-2} - b^{-2} + c^{-2})^{-1}$.

4. Arătați că, dacă a, b, c formează o progresie aritmetică, atunci și $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ formează o progresie aritmetică.

5. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2}dx$, $x > 0$.

a) Calculați I_0, I_1, I_2.

b) Arătați că $I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Studiați monotonia șirului.

d) Studiați mărginirea șirului.

e) Demonstrați că $\frac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{3n}$, $\forall n \geqslant 1$.

f) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

6. Se consideră funcția $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$ și șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, $b_n = a_n + \frac{1}{2n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $\int f(x)dx$, $x \in (0, \infty)$.

b) Arătați că funcția f este strict descrescătoare.

c) Arătați că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

d) Arătați că $\frac{1}{(k+1)^4} < \frac{1}{2k^3} - \frac{1}{2(k+1)^3}$, $\forall k > 0$.

e) Arătați că șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

f) Arătați că $1 \leqslant a_n < 1,22$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

7. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$, definite prin $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ și $b_n = a_n + \frac{4}{n!\cdot n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se știe că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent către e.

a) Verificați că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător.

b) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător.

c) Arătați că $a_{n+1} < e < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Utilizând inegalitățile de la punctul **c)**, arătați că $\frac{1}{(n+1)\ !} < e - a_n < \frac{4}{n!\cdot n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Utilizând inegalitățile de la punctul **d)** arătați că numărul e este irațional.

Tema 8 – Funcții:

funcția de gradul I; funcția de gradul al II-lea (clasa a IX-a); funcția polinomială; funcția putere; funcția radical; funcția exponențială; funcția logaritmică; funcții trigonometrice directe și inverse; operații cu funcții: operații algebrice; compunerea (clasele a X-a și a XII-a)

1. Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, calculați $f(0)$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$. Calculați $(f \circ f)(1)$.

3. Se consideră funcția arctg : $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \text{arctg}x$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Calculați $f'(x)$.

c) Verificați dacă funcția f pe intervalul $(0, \infty)$ este convexă sau concavă.

d) Determinați câte soluții are ecuația $f(x) = 2$.

4. Fie numerele $0 < a < b < 1$ și funcția $f: [a; b] \to [a; b]$, $f(x) = x^2 - (a+b-1)x + ab$.

a) Determinați $f(a)$ și $f(b)$.

b) Arătați că f este strict crescătoare și convexă pe $[a; b]$.

c) Arătați că f este bijectivă;

5. Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă pe $\mathbb{R}$, care verifică proprietățile $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ și $f(1) = 1$.

a) Verificați că $f(0) = 0$.

b) Verificați că $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Utilizând metoda inducției matematice, arătați că $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$ și $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, avem $f(a_1 + a_2 + ... + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)$.

d) Arătați că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Arătați că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

f) Utilizând eventual faptul că f este continuă pe $\mathbb{R}$, arătați că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. Dacă $[x]$ desemnează partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\}$ partea lui fracționară, calculați valoarea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - 2[x])$ în punctul $x = \frac{3}{4}$.

7. Fie numerele $0 < a < b$ și funcția $f: [a; b] \to [a; b]$, $f(x) = \frac{x^2 + ab}{a+b}$.

a) Determinați $f(a)$ și $f(b)$.

b) Arătați că f este strict crescătoare și convexă pe $[a; b]$.

c) Arătați că f este bijectivă.

8. Determinați domeniul maxim de definiție pentru funcția $f(x) = \log_2 \frac{2x-3}{1-x}$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\{x\} - \{x\}^2$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real x.

a) Determinați câte dintre numerele $f(0{,}25)$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}75)$ și $f(1)$ sunt egale cu $f(0)$.

b) Determinați perioada principală a funcției f.

c) Arătați că $0 < f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tema 9 – Studiul proprietăților funcțiilor folosind analiza matematică:

limite de funcții (asimptote); continuitate; derivabilitate; reprezentarea grafică a funcțiilor (clasa a XI-a)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

d) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3+2x-1}{x^2+1}$.

a) Determinați valorile lui a și b pentru care $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2+1}$.

b) Determinați asimptotele funcției f.

c) Calculați $f'(x)$.

d) Arătați că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

e) Arătați că f este inversabilă.

3. Determinați valoarea parametrului real a pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\,|x-a|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-2\operatorname{arctg}x$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

d) Determinați asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f.

5. Se consideră funcția $f:[-1,1]\to[-\pi,\pi]$, $f(x)=\arcsin x+\arccos x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $f(0)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

d) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

6. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$.

a) Calculați $\ln(x+2)-2\ln(x+1)+\ln x-f(x)$.

b) Calculați $f'(x)$.

c) Determinați asimptotele graficului funcției f.

d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1)+f(2)+\ldots+f(n))$.

e) Determinați câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

7. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\ln e - e\ln x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x > 0$.

b) Calculați $f(e)$ și $f'(e)$.

c) Utilizând teorema lui Fermat, arătați că $f(x) \geqslant 0,\ \forall\, x\in(0,\infty)$.

d) Arătați că $e^x \geqslant x^e,\ \forall\, x\in(0,\infty)$.

e) Arătați că, pentru $x > 0$, avem $e^x = x^e$ dacă și numai dacă $x = e$.

f) Determinați numerele reale $c, b > 0$ cu $c^x + b^x \geqslant x^c + x^b,\ \forall\, x\in(0,\infty)$.

8. Se consideră funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-x$, $g(x)=f(x)+\dfrac{x^2}{2}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Calculați $g'(x)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)$.

d) Verificați că $f'(0) = g'(0) = 0$.

e) Arătați că f este strict descrescătoare și g este strict crescătoare.

f) Arătați că $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(x+1)<x$.

9. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^{-x}x^n$, $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=1-2e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) \text{ și } h:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f(t)\,dt.$$

a) Calculați $g(0)$ și $h(0)$.

b) Verificați că $g'(x) = h'(x),\ \forall\, x \geqslant 0$.

c) Arătați că $h(x) = g(x) + 1,\ \forall\, x \geqslant 0$.

d) Arătați că $0\leqslant g(x)\leqslant\dfrac{2e^{-x}x^{n+1}}{n!}-1,\ \forall\, x\in [0, n]$.

e) Arătați că, dacă $x \geqslant 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}=0$.

f) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)=e^x,\ \forall\, x \geqslant 0$.

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^{2006}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(f'\left(\dfrac{1}{n}\right)+f'\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f'\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$.

d) Utilizând teorema lui Lagrange, arătați că pentru orice $x\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$ avem:

$$\left(x-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\left(x-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k-1}{n}\right),\ \forall n \geqslant 2 \text{ și } k\in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

e) Integrând inegalitățile de la punctul **d)**, arătați că $\forall n \geqslant 2$ și

$k\in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem $-\dfrac{1}{2n^2}f'\left(\dfrac{k}{n}\right)\leqslant\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx-\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\leqslant-\dfrac{1}{2n^2}f'\left(\dfrac{k-1}{n}\right)$.

f) Adunând inegalitățile de la punctul **e)**, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\dfrac{1}{n}\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Tema 10 – Primitive, integrale definite, aplicații ale integralei definite (clasa a XII-a)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Studiați monotonia funcției f.

c) Arătați că funcția f are două puncte de inflexiune.

d) Utilizând metoda inducției matematice arătați că $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

e) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(0)+f''(0)+...+f^{(n)}(0)}{n^2}$.

f) Determinați aria domeniului plan mărginit de graficul funcției f, axa Oy și dreapta de ecuație $x=1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Calculați $\int_0^1(x^2+1)f(x)dx$.

d) Verificați câte puncte de extrem local are funcția f.

e) Determinați câte asimptote are graficul funcției f.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Calculați $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$.

d) Aflați câte puncte de extrem local are funcția f.

e) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)}{\int\limits_0^x f(t)dt}$.

4. Se consideră funcția $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$, $f:\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$.

a) Calculați derivata funcției f.

b) Demonstrați că $1\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{2\sqrt{e}}{3}$, $\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$;

c) Arătați că $\dfrac{1}{1+x}=1-x+\dfrac{x^2}{1+x}$, $\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

d) Demonstrați că $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)e^xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx$.

e) Calculați $\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)e^xdx$.

f) Demonstrați că $-\dfrac{3}{2}\sqrt{e}+\dfrac{5}{2}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx\leqslant2-\sqrt{\dfrac{e}{6}}$.

Tema 11 – Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații (clasele IX-XII)

1. Determinați valoarea parametrului real m pentru care ecuația $mx + \frac{m}{2} = x + 2$ nu are soluții în $\mathbb{R}$.

2. Determinați mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația $x^2 - |x| = mx(x+1)$ are soluție.

3. Dacă $[x]$ desemnează partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\}$ partea lui fracționară, determinați câte soluții are ecuația $3[x] + \{x\} = x + 1$.

4. Determinați câte soluții reale are ecuația $3^{2x-1} - 3^{x-1} - 2 = 0$.

5. Determinați mulțimea soluțiilor inecuației $|2x-5| \geq -7$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 - |x| = \frac{x}{2}(x+1)$.

7. Rezolvați ecuația $x^2 = x$ în mulțimea $(0, \infty)$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2} = 2^1$.

9. Determinați valoarea parametrului real m pentru care soluțiile reale ale ecuației $x^3 - 3x^2 + mx + 8 = 0$ sunt în progresie geometrică.

10. Determinați valoarea parametrului real m pentru care soluțiile ecuației $x^3 - 6x^2 + mx + 8 = 0$ sunt în progresie aritmetică.

11. Determinați câte soluții complexe nenule are ecuația $x^3 = 1$.

12. Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $z^{1000} = 1$.

13. Determinați soluția ecuației $4C_x^3 = 5C_{x+1}^2$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2} = 2^{x^3}$.

15. Calculați produsul soluțiilor complexe ale ecuației $x^{2006} - x + 1 = 0$.

16. Rezolvați ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $(\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot)$.

17. Rezolvați ecuația $\hat{x}^3 = \hat{0}$ în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

18. Rezolvați ecuația $\hat{3}x = \hat{9}$ în inelul $\mathbb{Z}_{12}$.

19. Rezolvați ecuația $\hat{3}x = \hat{6}$ în inelul $\mathbb{Z}_9$.

20. Rezolvați ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_4$.

21. Rezolvați ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_3$.

22. Rezolvați ecuația $\hat{3}x = \hat{2}$ în inelul $\mathbb{Z}_4$.

23. Rezolvați ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_3$.

24. Calculați suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în $\mathbb{Z}_6$.

25. Determinați câte soluții complexe are ecuația $x^{2006} = 1$.

26. Rezolvați ecuația $\hat{4}x + \hat{5} = \hat{6}$ în $\mathbb{Z}_{22}$.

27. Determinați numărul soluțiilor ecuației $(x + 1)^4 = (x + 1)^2$ în mulțimea $[0, \infty)$.

28. Determinați numărul de soluții în intervalul $[0, \pi]$ al ecuației $\sin x = |\cos x|$.

29. Rezolvați ecuația $z^4 = 1$.

Tema 12 – Calcul analitic și vectorial în geometria plană:

coliniaritate, concurență, paralelism (clasele IX-XI)

1. Calculați perimetrul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(6;\ 0)$, $B(0;\ 8)$ și $C(6;\ 8)$.

2. Calculați distanța de la mijlocul segmentului de extremități $A(6;\ 0)$ și $B(0;\ 8)$ la punctul $C(6;\ 8)$.

3. Calculați aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(6;\ 0)$, $B(0;\ 8)$ și $C(6;\ 8)$.

4. Dacă dreapta de ecuație $y = ax + b$ trece prin punctele $A(6;\ 0)$ și $B(0;\ 8)$, calculați $a + b$.

5. Dacă $y = ax + b$ este ecuația dreptei ce trece prin punctul $C(6;\ 8)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x - y = 0$, calculați $b - a$.

6. Calculați raza cercului care trece prin punctele $A(6;\ 0)$, $B(0;\ 8)$ și $C(6;\ 8)$.

7. Calculați distanța de la punctul $A(2, 3)$ la dreapta d: $x - y + 1 = 0$ în sistemul cartezian xOy.

8. Calculați raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic având lungimile laturilor a, b, c.

9. Calculați distanța de la punctul $A(1;\ 5)$ la dreapta d: $2x - 3y + 1 = 0$, în reperul cartezian xOy.

10. Calculați cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

11. Găsiți un vector paralel cu vectorul $2\vec{i} + 4\vec{j}$.

12. Determinați „a“ dacă vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} + a\vec{j}$ sunt paraleli.

13. Calculați produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} - 3j$, $v = 3\vec{i} + \vec{j}$.

14. Determinați valoarea reală a lui α, pentru care vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = \alpha\vec{i} + (\alpha + 1)\vec{j}$ sunt paraleli.

15. Dacă $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + \vec{j}$, calculați $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$.

16. Calculați unghiul făcut de vectorii $\vec{v} = 6\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} - 12\vec{j}$.

17. Determinați care este cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

18. Calculați cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

19. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 6\vec{j}$ să fie perpendiculari.

20. Determinați produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

21. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} - 2\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt perpendiculari.

22. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{v}_1 = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 9\vec{j}$ sunt perpendiculari.

23. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele de ecuații $2x + 3y + 6 = 0$ și $3x + ay + 5 = 0$ sunt perpendiculare.

Tema 13 – Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometria plană (clasa a IX-a)

1. Calculați valoarea maximă a expresiei $2\cos^2 x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $\cos x = 0{,}75$; Calculați $\cos 2x$.

3. Calculați $\sin^2 \pi - \cos^2 \pi$.

4. Dacă $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, Calculați $|\mathrm{ctg}x|$.

5. Calculați valoarea maximă a expresiei $4\sin x\cos x$, când $x \in \mathbb{R}$.

6. Calculați $\cos^2 \frac{7\pi}{6} + \sin^2 \frac{7\pi}{6}$.

7. Calculați $\mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{ctg}30°$.

8. Determinați care dintre numerele $\cos\pi$ și $\sin\pi$ este mai mare.

9. Fie $\cos x = 0{,}3$. Calculați $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Calculați $\mathrm{tg}14° \cdot \mathrm{ctg}14°$.

11. Calculați $\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}2° \cdot ... \cdot \mathrm{tg}89°$.

12. Calculați $\mathrm{tg}1°\mathrm{tg}2°\mathrm{tg}3° \; ... \; \mathrm{tg}89°$.

13. Determinați valoarea maximă a expresiei $E(a) = 2\sin a\cos a$.

14. Determinați care dintre numerele $\cos\pi$ sau $\cos2\pi$ este mai mare.

15. Calculați $e^{\sin 4\pi}$.

16. Calculați suma $\sin1° + \sin359°$.

17. Calculați produsul $\sin(-1°) \cdot \sin(0°) \cdot \sin(+1°)$.

18. Calculați $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{3}$.

19. Dacă $AB = 5$, $BC = 12$, $CA = 13$, calculați $\cos\hat{A}$.

20. Se consideră un triunghi ABC având lungimile laturilor 6, 8 și 10.

a) Calculați măsura unghiului care se opune laturii de lungime 10.
b) Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC.
c) Calculați aria triunghiului ABC.
d) Calculați suma cosinusurilor unghiurilor triunghiului ABC.
e) Calculați suma înălțimilor triunghiului ABC.
f) Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC.

21. Dacă în triunghiul ABC, $AB = 1$, $AC = 2$ și $\mu(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$, calculați lungimea segmentului BC.

22. Determinați aria triunghiului ABC, în care $AB = 10$, $AC = 12$ și $m(\sphericalangle BAC) = 150^0$.

23. Un triunghi dreptunghic ABC are lungimile laturilor în progresie aritmetică, iar perimetrul egal cu 24. Calculați raza cercul înscris în triunghi.

24. Calculați aria triunghiului ABC, dacă $AB = 4$, $AC = 3$ și $BC = 5$.

Indicații și răspunsuri

Grupuri

pag.8. 2. Dacă $x, y \in [-1, \infty)$, atunci $x + 1 \geqslant 0$ și $y + 1 \geqslant 0$, deci $(x + 1)(y + 1) \geqslant 0$, de unde $x * y \geqslant -1$. **3.** Stabilitatea lui H în raport cu operațiile „$\vee$”, „$\wedge$” rezultă din definițiile pentru c.m.m.d.c., respectiv c.m.m.m.c.

$\vee$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

$\wedge$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

5. Rezultă din
$$\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a' & 3b' \\ 3c' & 3d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(aa'+bc') & 3(ab'+bd') \\ 3(ca'+dc') & 3(cb'+dd') \end{pmatrix}.$$
6. $\lambda \geqslant 6$. **7.**

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

9. Dacă $H = \{z_1, z_2, z_3\}$ și $z \in H$, atunci $\{zz_1, zz_2, zz_3\} = \{z_1, z_2, z_3\}$. Rezultă că $zz_1zz_2zz_3 = z_1z_2z_3$. Simplificând cu $z_1z_2z_3 \neq 0$, obținem $z^3 = 1$. Deci elementele lui H sunt rădăcinile ecuației $x^3 = 1$, de unde $H = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **10.** Se folosește identitatea $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

11. Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. **12.** a) Pentru fiecare dintre cele 9 poziții ale tablei unei operații pe M avem 3 posibilități, deci pe M pot fi definite 3^9 legi de compoziție. b) $2^4 \cdot 3^5$. **13.** Se folosește faptul că, compusa a două funcții injective (surjective, bijective) este o funcție injectivă (respectiv surjectivă, bijectivă). Când $A = \{1, 2, 3\}$, H_3 are 6 elemente. **14.** $(AB)^T = B^TA^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, dacă $A, B \in H$. **15.** Dacă $A, B \in H$, atunci $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$, deci $AB \in H$. **16.** Dacă $z, w \in H$, atunci $|zw| = |z| \cdot |w| = 1 \cdot 1 = 1$, deci $z, w \in H$. Numerele din H se reprezintă cu punctele cercului de centru O și rază 1.

pag. 15. 1. $a = 0$ sau $a = 1$. **2.** Cum $x = e^{\ln x}$, unde e este baza logaritmilor naturali, avem $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$, de unde rezultă ușor că legea de compoziție „$*$“ este comutativă și asociativă. Elementul neutru este numărul e. Dacă $x \in (0, \infty)$, $x \neq 1$, atunci x este simetrizabil și $x' = e^{1/\ln x}$. **3.** Legea de compoziție „$*$“ este comutativă, are pe $\frac{1}{2}I_2$ ca element neutru și nu este asociativă. **4.** Nu admite element neutru. **5.** (i) Pentru $b \in (-1, 1)$, funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+b}{1+bx}$ este strict crescătoare pe $[-1, 1]$ și $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$. **6.** $a = 1$, $b = -1$ sau $a = b = 0$. **8.** (iii) Orice matrice $F = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$. **12.** Inducție după m și n. **13.** Fie $b \in M$ astfel încât $a = aba$. Dacă $y \in M$, există $x \in M$ astfel încât $y = axa$. Fie $e = ab$ și $f = ba$. Avem $ey = abaxa = axa = y$ și $yf = axaba = axa = y$ și, în particular, $ef = f$, $ef = e$. Așadar $e = f$ este elementul neutru. **14.** (i) 3^9; (ii) 3^6; (iii) 3^5.

pag. 22. 1. $n\hat{a} = \underbrace{\hat{a} + \hat{a} + \ldots + \hat{a}}_{n \text{ ori}} = \widehat{\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ ori}}} = \widehat{na} = \hat{0}$. **2.** $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{3}^{-1} = \hat{3}, \hat{5}^{-1} = \hat{5}, \hat{7}^{-1} = \hat{7}$. **3.** $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}\}$.

4. b) Cum $1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ și $\frac{n-1}{2} = q \in \mathbb{N}^*$ când n este impar, avem $\hat{1} + \hat{2} + \ldots + \widehat{n-1} = \widehat{qn} = \hat{0}$. **6.** $r = 4$. **7.** Avem $\hat{2} = \hat{2}^5$, de unde $\hat{2}^{37} = \hat{2}^{5 \cdot 7 + 2} = \left(\hat{2}^5\right)^7 \cdot \hat{2}^2 = \hat{2}^7\hat{2}^2 = \hat{2}^9 = \hat{2}^5\hat{2}^4 = \hat{2}^5 = \hat{2}$. Termenii șirului $\hat{a}, \hat{a}^2, \ldots, \hat{a}^i, \ldots$ nu pot fi distincți pentru că $\mathbb{Z}_n$ este mulțime finită, deci există $s, t \in \mathbb{N}^*$, $s < t$ astfel încât $\hat{a}^s = \hat{a}^t$. **8.** Avem $10 \equiv -1 \pmod{11}$, deci $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$, de unde $c_0 + c_1 10 + c_2 10^2 \equiv c_0 - c_1 + c_2 \pmod{11}$.

9. Avem $\hat{7}^4=\hat{1}$ și deci $\hat{7}^{82}=\hat{7}^{4\cdot 20+2}=\left(\hat{7}^4\right)^{20}\hat{7}^2=\hat{9}$. Aplicând ex. 7, există $s<t$ astfel încât $\hat{a}^s=\hat{a}^t$ și înmulțind cu $\left(\hat{a}^{-1}\right)^s$, obținem $\left(\hat{a}^m\right)=\hat{1}$ cu $m=t-s$. **10.** Dacă a are aceeași divizori primi cu n, există $s\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\mid a^s$ și atunci $\hat{a}^s=\widehat{a^s}=\hat{0}$. **11.** Se folosește faptul că un număr $p>1$ este prim dacă și numai dacă din $p\mid ab$ rezultă $p\mid a$ sau $p\mid b$. **12.** Avem $\hat{a}^2=\hat{0}$ dacă $a=3k$ și $\hat{a}^2=\hat{1}$ dacă $a=3k+1$ sau $a=3k+2$. Dacă există $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $3a^2+2=b^2$, atunci $\hat{2}\neq\hat{b}^2=\widehat{b^2}=\widehat{3a^2+2}=\hat{3}\hat{a}^2+\hat{2}=\hat{2}$. Contradicție. **13.** $\hat{a}^3\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{6}\}$. Dacă există $a,b\in\mathbb{Z}$astfel încât $7a^3+2=b^3$, atunci $\hat{2}\neq\hat{b}^3=\widehat{7a^3}+\hat{2}=\hat{2}$. Contradicție.

pag.29-30. 2. Dacă $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in G$, atunci $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$ și $(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)=$ $=1\cdot 1=1$, deci G este parte stabilă. Avem $(a+b\sqrt{2})^{-1}=a-b\sqrt{2}$. **4.** $a=b=1$. **5.** Elementul neutru este numărul 0, iar dacă $x\in G$, atunci simetricul său este $x'=-x$. Operația „$*$“ este asociativă și comutativă.

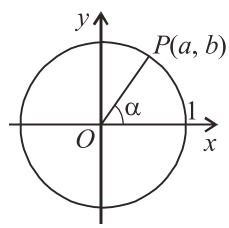
6.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

11.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

12. Avem $xyxy=xxyy$. Înmulțind la stânga cu x^{-1} și la dreapta cu y^{-1}, obținem $yx=xy$.
13. Avem $(xy)^2=e=ee=x^2y^2$ și se aplică ex. 12. **14.** Elementul neutru este a^{-1} și simetricul lui x este $x'=x^{-1}a^{-2}$.
15. Fie $x''\in G$ astfel încât $x''*x'=e$. Avem $x*x'=e*(x*x')=(x''*x')*(x*x')=x''*(x'*x)*x'=x''*e*x'=x''*x'=e$ deci x' este simetric la stânga și la dreapta pentru x. Din $x*e=x*(x'*x)=(x*x')*x=e*x=x$ rezultă că e este element neutru și la dreapta. **18.** Fie $a,b\in G$. Există $e,y\in G$ astfel încât $ae=a$ și $b=ya$. Avem $be=ya\cdot e=ya=b$, deci e este element neutru la dreapta. Analog există $e'\in G$ astfel încât $e'b=b$, $\forall\, b\in G$. Evident $e'=e=$ elementul neutru al lui G. Dacă $a\in G$ există $a', a''\in G$ astfel încât $a'a=e=aa''$ și cum $a'=a'e=a'(aa'')=(a'a)a''=ea''=a''$, rezultă că există a^{-1} și $a^{-1}=a'=a''$. **21.** Cum $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\0&c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'&ab'+bc'\\0&cc'\end{pmatrix}$ și din $ac\neq 0$, $a'c'\neq 0$ rezultă că $(aa')(cc')\neq 0$, conchidem că G este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea. Se observă că $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a^{-1}&-ba^{-1}c^{-1}\\0&c^{-1}\end{pmatrix}\in G$ și atunci $(G,\cdot)$ este grup. **22.** Avem $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+b\\0&1\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-a\\0&1\end{pmatrix}\in G$, de unde rezultă că $(G,\cdot)$ este grup. **24.** Se observă că $A_\alpha^{-1}=A_{-\alpha}$. **25.** Se folosește faptul că $\begin{vmatrix}u&v\\-\bar{v}&\bar{u}\end{vmatrix}=u\bar{u}+v\bar{v}$ și că $|AB|=|A|\cdot|B|$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
29. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $|A|\neq 0$. Atunci pentru $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avem $B=A^{-1}\Leftrightarrow AB=I_2\Leftrightarrow BA=I_2$. Așadar, $A^{-1}={}^tA\Leftrightarrow A{}^tA=I_2\Leftrightarrow {}^tAA=I_2$, ceea ce revine la afirmațiile din enunțul exercițiului.
33. Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Avem $A\in SO(2)\Leftrightarrow|A|=1$ și $A^{-1}={}^tA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ și $|A|=1\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$ și $a^2+b^2=1\Leftrightarrow a=\cos\alpha$ și $b=\sin\alpha$ cu $\alpha\in\mathbb{R}$.



pag.34. 6. Din $\sigma\circ x=\pi$ rezultă $x=\sigma^{-1}\circ\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&4&3\end{pmatrix}$.

pag.38. 1. Fie A_a matricea din G asociată lui $a \in \mathbb{R}$. Avem $A_aA_b = A_{a+b}$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ și $A_a^{-1} = A_{-a}$, de unde rezultă că $(G, \cdot)$ este grup. Funcția $f : \mathbb{R} \to G, f(a) = A_a$ este bijectivă și $f(a + b) = A_{a+b} = A_aA_b = f(a) f(b)$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$. Rezultă că $(\mathbb{R}, +) \simeq (G, \cdot)$. **2.** Avem $f\left((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\right)=f\left(ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}\right)=$ $=\begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix}=f(a+b\sqrt{2})\cdot f(c+d\sqrt{2})$. **4.** Se verifică cu mijloacele analizei matematice că f este funcție bijectivă. Pentru $x, y \in G$ avem $f(x*y)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}=f(x)+f(y)$. **8.** Funcția $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{tg}\,x$ este bijectivă și $f(x*y)=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y))=\mathrm{tg}(x)+\mathrm{tg}(y)=f(x)+f(y)$. **9.** Avem $f(\alpha) = I_2 \Leftrightarrow \cos\alpha = 1$ și $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.** (i) Fie $x', y' \in G$. Există $x, y \in G$ astfel încât $x' = f(x)$, $y' = f(y)$. Avem $x'y' = f(x) f(y) = f(xy) = f(yx) = f(y) f(x) = y'x'$. (ii) $x'^3 = f(x)^3 = f(x)f(x)f(x) = f(x^3) = f(e) = e'$.

13. (i)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(ii) Dacă $f : G \to \mathbb{Z}_4$ este izomorfism, fie $x \in G$ astfel încât $f(x)=\hat{3}$. Avem $\hat{2}=\hat{3}+\hat{3}=f(x)+f(x)=f(x^2)=f(e)=\hat{0}$. Contradicție.

14. Fie G un grup cu patru elemente. Dacă $x^2 = e$, $\forall\ x \in G$, atunci $(G, \cdot) \simeq (\mathcal{K}, \circ)$ (vezi ex. 13). În caz contrar, există $a \in G$ astfel încât $a^2 \neq e$. Fie $b = a^2$. Evident $b \neq e$ și $b \neq a$ și fie $c = ab$. Avem $c \neq e$, $c \neq a$, $c \neq b$, deci $G = \{e, a, b, c\}$. Acum tabla operației lui G se completează astfel:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

și comparând cu tabla grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$ se deduce că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$.

15. (i) Dacă $a^2 \neq e$, atunci $a \neq a^{-1}$.

16. Fie $\rho=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. Atunci $U_n=\{1, \rho, \rho^2, ..., \rho^{n-1}\}$.

Dacă $f: U_n \to U_n$ este endomorfism și $f(\rho)=\rho^m$ cu $0 \leqslant m < n$, atunci $f(\rho^i) = f(\rho)^i = \rho^{mi} = (\rho^i)^m$, $\forall\ x = \rho^i \in U_n$. Automorfismele lui U_{10} sunt descrise cu $m \in \{1, 3, 7, 9\}$. **17.** (i) Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1}$ de unde $x_1 = x_2$. Pentru $y \in G$ și $x = a^{-1}ya$ avem $f(x) = y$; (ii) $f(xy) = a(xy)a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f(x) f(y)$.

pag.45. 2. Fie $z, w \in H$. Există $h, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $z^k = 1$, $w^k = 1$. Avem $(zw)^{hk} = (z^h)^k(w^k)^h = 1$, $(z^{-1})^h = (z^h)^{-1} = 1^{-1} = 1$, deci H este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Din $z^h = 1$ rezultă $1=|1|=|z^h|=|z|^h$, de unde $|z|=1$, deci $H \subseteq U$. Dacă $z=\cos\sqrt{2}\pi+i\sin\sqrt{2}\pi$, atunci $z \in U$ și $z \notin H$. **3.** Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $B=\frac{1}{2}(A+{}^tA)$ și $C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$. Atunci $A = B + C$, $B \in H$, $C \in N$. **7.** Dacă $H = O = \{0\}$, luăm $n = 0$ și avem $O = 0\mathbb{Z}$. Dacă $H \neq 0$ și $x \in H$, $x \neq 0$, atunci $-x \in H$. Rezultă că H conține numere întregi pozitive. Fie n cel mai mic număr pozitiv din H. Atunci $H = n\mathbb{Z}$. **8.** Evident $6\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$. Dacă $x \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$, atunci $2 \mid x$ și $3 \mid x$. Cum $(2, 3) = 1$, rezultă că $6 = 2 \cdot 3$ divide x, deci $x \in 6\mathbb{Z}$. **10.** Dacă $G = H \cup N$, atunci $H \not\subseteq N$ și $N \not\subseteq H$. Alegem $a \in H \setminus N$ și $b \in N \setminus H$. Dacă $ab \in H$, atunci $b = a^{-1}ab \in H$ contradicție. Așadar $ab \notin H$. Analog $ab \notin N$, dar $ab \in G = H \cup N$. Contradicție. **11.** Fie $a \in H$. Cum H este finit, funcția $f : H \to H$, $f(x) = ax$ este bijectivă. Există $b \in H$ astfel încât $ab = a$. Din $ab = a$ rezultă că $e = b \in H$. Cum f este bijectivă există $a' \in H$ astfel încât $aa' = e$. Avem $a^{-1} = a' \in H$, deci H este subgrup al lui G. **12.** Dacă $G = GL_2(\mathbb{R})$ și $a=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $C_G(a)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq 0\right\}$. **15.** Fie $c = ab$. Avem $c^{m^n}=(a^m)^n(b^n)^m=e$. Dacă $c^k = e$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $a^kb^k = e$ și ridicând la puterea m obținem $b^{mk} = e$, de unde $n \mid mk$. Cum $(n, m) = 1$, rezultă $n \mid k$. Analog se arată că $m \mid k$. Dar $(m, n) = 1$, deci $mn \mid k$, de unde $\operatorname{ord} ab = mn$. **16.** Fie $d = (k, m)$, $m = dm_1$, $k = dk_1$ și $b = a^k$. Avem $b^{m_1} = a^{m_1 k} = a^{m_1 d k_1} = (a^m)^{k_1} = e$. Dacă $b^t = e$, atunci $a^{tk} = e$, deci $m \mid tk$, de unde $m_1 \mid tk_1$. Dar $(m_1, k_1) = 1$ și atunci $m_1 \mid t$, de unde $\operatorname{ord} a^k = m_1 = \dfrac{m}{(m, k)}$. **18.** Cum $\operatorname{ord} a = n$, $H = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ este subgrup cu n elemente al lui D_n. Dacă $b \in H$, atunci $b = a^i$ și atunci din $ab = ba^{n-1}$ rezultă $a^{n-2} = e$ cu $n - 2 > 0$. Cum $\operatorname{ord} a = n$ rezultă că $n \mid n - 2$. Contradicție. Deci $b \notin H$ și atunci $bH \cap H = \varnothing$. Cum D_n are $2n$ elemente, avem $D_n = H \cup bH$. Se observă că $ab^j = b^j a^{(n-1)j}$, $a^i b = ba^{i(n-1)}$, de unde $a^i b^j = b^j a^{i(n-1)j}$.

pag.50. 4. Cum $T(O) = O$, avem $T = s_d$, unde d este o dreaptă ce trece prin O sau $T = R_\theta$ = rotație de unghi θ în jurul lui O. Rezultă $S = t_{-v} \circ s_d$ sau $S = R_{-\theta} \circ s_d$. **6.** Dacă R este rotația de unghi $\pi/2$ în jurul centrului pătratului iar d_1, d_2, d_3, d_4 sunt dreptele care trec prin vârfuri opuse sau prin mijloace de laturi opuse, atunci $D_4 = \{E, R, R^2, R^3, d_1, d_2, d_3, d_4\}$.

Test 1. 1. $A_1, A_2 \in M$, $A_1 \in \begin{pmatrix} 2x_1 & 3y_1 \\ y_1 & 2x_1 \end{pmatrix}$, $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$, $4x_1^2 - 3y_1^2 = 1$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2x_2 & 3y_2 \\ y_2 & 2x_2 \end{pmatrix}$, $x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$, $4x_2^2 - 3y_2^2 = 1$; $A_1A_2 = \begin{pmatrix} 2\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right) & 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1) \\ 2x_1y_2 + 2x_2y_1 & 2\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right) \end{pmatrix}$, $4\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right)^2 - 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1)^2 =$
$= (4x_1^2 - 3y_1^2)(4x_2^2 - 3y_2^2) = 1$, $A_1, A_2 \in M$. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \in M$, atunci $A, A^2, ..., A^n, ... \in M$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $x * y = \frac{1}{2}(xy + 2x + 2y) = \frac{1}{2}(x+2)(y+2) - 2$; $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$, $x + 2 \neq 0$, $y + 2 \neq 0$;
$x * y = \frac{1}{2}(x+2)(y+2) - 2 \neq -2$; $x * y = \frac{1}{2}(x+2)(y+2) = y * x$; $(x * y) * z = x * (y * z)$;
$x * e = e * x = x$, $e = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$; $x * x' = x' * x = e$, $x' = -\dfrac{2x}{x+2} = -2 + \dfrac{4}{x+2} \neq -2$.

3. $x, y \in G$, $x > a$, $y > a$; $k(x - a)(y - a) + a > a$; $x * y \in G$; $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in G$; $\exists e \in G$, $x * e = e * x = x$, $e = a + \frac{1}{k} \in G$; $x * x' = x' * x = e$, $x' = a + \dfrac{1}{k^2(x-a)} > a$; $x * y = y * x$, $\forall x, y \in G$;
$f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = k(x - a)$ bijecție.

Test 2. 1. $x, y \in M$, $x - 1 > 0$, $x - 1 \neq 1$; $y - 1 > 0$, $y - 1 \neq 1$, $1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} > 1$, $\ln\sqrt{y-1} \neq 0$;
$1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} \neq 2$; $x * y \neq y * x$; $1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} = 1 + (y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$; $(x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} = (y-1)^{\frac{1}{2}\ln(x-1)}$;
$\frac{1}{2}\ln(y-1) \cdot \ln(x-1) = \frac{1}{2}\ln(x-1) \cdot \ln(y-1)$. **2.** $x * y = (x-k)(y-k) + k$; $x - k \geqslant 0$, $y - k \geqslant 0$, $x * y \geqslant k$;
$e * x = x * e = x$; $e = 2k \in M$. **3.** $\forall A_1, A_2 \in G$, $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 + 4y_1 & 2y_1 \\ -7y_1 & x_1 - 4y_1 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}^*$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $x_1^2 - 2y_1^2 = 1$,
$A_2 = \begin{pmatrix} x_2 + 4y_2 & 2y_2 \\ -7y_2 & x_2 - 4y_2 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}^*$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $x_2^2 - 2y_2^2 = 1$;
$A_1A_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2 + 2y_1y_2 + 4(x_1y_2 + x_2y_1) & 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ -7(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 + 2y_1y_2 - 4(x_1y_2 + x_2y_1) \end{pmatrix}$;
$x = x_1x_2 + 2y_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$, $x^2 - 2y^2 = (x_1x_2 + 2y_1y_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 - 2y_1^2)(x_2^2 - 2y_2^2) = 1$,

$A_1A_2 \in G$; $(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)$, $\forall A_1, A_2, A_3 \in G$; $E = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 1 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} x-4y & -2y \\ 7y & x+4y \end{pmatrix} \in G$, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, $\forall A \in G$. Deci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Test 3. 1. Este parte stabilă. **2.** iii) $e_* = -I_3$.

Test 4. 1. b) $e_{\circ} = I_3$.

Inele și corpuri

pag.56. 5. Elementul zero al inelului $(\mathbb{Z}, \top, \perp)$ este -3, iar elementul unitate este -2. **6.** Elementele inversabile sunt $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. **14.** a) $U + V = O$; $UV = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$; b) $UX = \begin{pmatrix} \hat{3}a+\hat{5}b & \hat{3}b+\hat{5}d \\ \hat{5}a+\hat{4}c & \hat{5}b+\hat{4}d \end{pmatrix}$; $a = \hat{2}, b = \hat{5}, c = \hat{5}, d = \hat{3}$. Cum $XU = I_2$ și $UX = I_2$, U element inversabil.

pag.62. 1. Din $(1 + 1)^2 = 1 + 1$ rezultă $1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1$, de unde $1 + 1 = 0$. Pentru $x \in R$ avem $x + x = (1 + 1)x = 0x = 0$. De asemenea $x + y = (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$, de unde $xy + yx = 0$, deci $xy = -yx = yx$. **2.** b) Avem $k!(p-k)!\,C_p^k = p! = (1\cdot 2\cdot \ldots \cdot p-1)p$. Rezultă că p divide unul dintre factori și acesta nu poate fi decât C_p^k când $1 \leqslant k \leqslant p$. **3.** c) Fie $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Avem $B^3 = O_3$ și $A^3 = (I_3 + B)^p = I_3 + C_p^1 B + C_p^2 B^2 = I_3$ pentru că C_p^1 și C_p^2 se divid cu p. **10.** Dacă $f(x) = f(y)$ atunci $1 + x = 1 + y$, deci $x = y$. Așadar f este injectivă și cum R este finit, f este și surjectivă. Avem $f(0) + f(1) + f(a) + f(b) =$ $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + a + b$. Cum f este bijectivă, aceeași sumă este $0 + 1 + a + b$. Rezultă că $1 + 1 + 1 + 1 = 0$. **11.** Din $1 = (-1)^6 = -1$ rezultă $1 + 1 = 0$ și deci $x + x = 0, \forall x \in R$. Avem $(1+x) = (1+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^k = 1 + x^2 + x^4 + x$, de unde $x^4 = -x^2 = x^2$. Așadar $x = x^6 = x^4x^2 = x^2x^2 = x^4 = x^2$. **12.** Avem $x + x = 0$, $\forall x \in R$ și atunci

$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)((x^6 + x^4 + x^3) + (x^5 + x^3 + x^2) + (x^3 + x + 1)) =$
$= (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$.

pag.67-68. 4. Se observă că $\hat{a}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $\forall \hat{a}^2 \in \mathbb{Z}_3$, de unde $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 \neq \hat{0}$, dacă $\hat{a} \neq \hat{0}$ sau $\hat{b} \neq \hat{0}$. **5.** Se observă că $f \circ f$ este aplicația identică și se deduce că f este bijectivă. Avem $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ și $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Rezultă că f este automorfism. **7.** $a = b = 1$, $c = 6$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. **8.** Dacă $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, atunci $\det(A) = |z|^2 + |w|^2$, deci $\det(A) \neq 0$ dacă $A \neq 0$ și se constată că $A^{-1} \in K$. **9.** Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} = f(A)$. Se verifică $\widehat{A+B} = \hat{A} + \hat{B}, \widehat{AB} = \hat{A}\hat{B}$, de unde rezultă că f este morfism de inele. **10.** Avem $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ etc. De asemenea $f(-n) = -f(n) = -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. În final $f(p/q) = f(pq^{-1}) =$ $= f(p) \cdot f(q^{-1}) = f(p)\,f(q)^{-1} = pq^{-1}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $r = p/q$. **11.** b) Avem $g(r) = r$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. Cum $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$, aplicând g obținem $g(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$, deci $g(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. Dacă $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $x = a + b\sqrt{2}$, atunci $g(x) = g(a) + g(b)\,g(\sqrt{2}) = a + bg(\sqrt{2})$. Dacă $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, atunci $g = 1_K$. Dacă $g(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, atunci $g = f$. **14.** Presupunem că K este corp. Cum $(K, +)$ este grup abelian cu patru elemente, avem $1 + 1 + 1 + 1 = 0$. Avem $(1 + 1)(1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$ și cum K este corp, rezultă $1 + 1 = 0$. Cum $(K^*, \cdot)$ este grup de ordin 3, avem $a^3 = 1$ pentru $a \in K^*$, $a \neq 1$, ceea ce se mai scrie $(a + 1)(a^2 + a + 1) = 0$. Dar $a + 1 \neq 0$, deci

$a^2 + a + 1 = 0$. Reciproc, presupunem că există $a \in K$ astfel încât $a^2 = 1 + a$. Dacă $1 + 1 \neq 0$, atunci $K = \{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1\}$ și nu există $a \in K$ astfel încât $a^2 = 1 + a$. Rămâne adevărat că $1 + 1 = 0$. Egalitatea $a^2 = 1 + a$ se mai scrie $a(1 + a) = 1$, deci a și $1 + a$ sunt inversabili. Se observă că $K = \{0; 1; a; 1 + a)$ și deci K este corp. **15.** Se observă că $f(r) = r$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}$. Fie $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha = \beta^2$. Rezultă $f(\alpha) = f(\beta^2) = f(\beta)^2 > 0$. Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$. Există $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x - \varepsilon < r_1 < x < r_2 < x + \varepsilon$. Aplicând f, rezultă $f(x - \varepsilon) < r_1 < f(x) < r_2 < f(x + \varepsilon)$. Din $r_1 < f(x) < r_2$ rezultă că $|f(x) - x| < \varepsilon$ și cum ε este arbitrar, avem $f(x) = x$.

Test 1. 1. $e_* = 2, e_\perp = 3, e_+ = 0, e_\bullet = 1$; $f(e_*) = e_+$, $f(e_\perp) = e_\bullet$; $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 2$, $a = 1$, $b = -2$; f este funcție bijectivă; $f(x * y) = f(x) + f(y)$, $f(x \perp y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$; $(\mathbb{Z}, *, \perp) \simeq (\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

2. $f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$, $f(x + y\sqrt{3}i) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Q}$; f este funcție bijectivă; $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$, $f(z_1 z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}_1$, $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{3}i$, $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{3}i$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$. **3.** $x, y \in K$, $x \top y \in K$, $x \perp y \in K$. a) $(K, \perp, \top)$ este corp comutativ. Se verifică axiomele structurii de corp. $e_\perp = 1$, $e_T = e^3$, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. b) $e_+ = 0$; $e_\bullet = 1$; $f : \mathbb{R} \to K$, $f(x) = e^{ax} + b$; $f(e_+) = e_\perp$; $f(e_\bullet) = e_\top$; $f(0) = 1$; $f(1) = e^3$; $a = 3$; $b = 0$. Funcția f este bijectivă, $f(x + y) = f(x) \perp f(y)$; $f(xy) = f(x) \top f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Test 2. 1. $z = x + y\sqrt{5}$; $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Z}$; $f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$, $f(z) = A$ este funcție bijectivă. **2.** $f(x \oplus y) = f(x) \boxplus f(y)$; $f(x \odot y) = f(x) \boxdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. **3.** $x \perp y \in K$, $x \top y \in K$, $e_\perp = 0$; $e_\top = 1 - e$; $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $x'_\top = 1 - e^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$, $\forall x \in K$, $x \neq e_\top$; $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x)$ este funcție bijectivă; $f(x \perp y) = f(x) + f(y)$; $f(x \top y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in K$..

Polinoame

pag.76. 1. grad $f = 2$ dacă $m \neq 2$ și grad $f = 0$ dacă $m = 0$, grad $g = 5$ dacă $z \neq \pm i$, $\frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$, grad $g = 0$ pentru $z = -i$ și grad $g = 2$ în rest. **2.** $f = g$ pentru $z \in \left\{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$. **3.** grad$(f + g)$ este 2 dacă $\alpha \neq 1 \pm \sqrt{3}$ este 1 dacă $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$ și $\alpha \neq 2$ și este 0 în rest. gradfg este 4 dacă $\alpha \notin \{0, 2, 3\}$ este 3 dacă $\alpha \in \{0, 2, 3\}$.
6. b)$fg = (1 + i)X^3 + (1 + i)X^2 + 2(1 + 2i)X + 2(i - 1)$. **7.** $fg = \hat{4}X^6 + \hat{3}X^5 + \hat{4}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$.
11. $f = aX^2 + 2X + a$, $g = -aX + a - 2$, $a \neq 0$. **12.** $g = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}$. **14.** $f = X + 2$, $g = -X - 1$.
15. Cum $3\hat{a} = \hat{a} + \hat{a} + \hat{a} = \widehat{a + a + a} = \widehat{3a} = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_3$, rezultă că $f + f + f = 3f = 0$, $\forall f \in \mathbb{Z}_3[X]$. Avem $(f + g)^3 = f^3 + 3f^2g + 3fg^2 + g^3 = f^3 + g^3$ și deci $(\hat{2}X^2 + X + \hat{1})^3 = (\hat{2}X^2 + X)^3 + \hat{1}^3 = (\hat{2}X^2)^3 + X^3 + \hat{1}^3 = \hat{2}^3X^6 + X^3 + \hat{1} = \hat{2}X^6 + X^3 + \hat{1}$
16. Calculând $\alpha f + \beta g + \gamma h$ și egalând apoi coeficienții cu 0 se obține un sistem omogen de trei ecuații liniare de determinant nenul în necunoscutele α, β, γ, deci $\alpha = \beta = \gamma = 0$. **17.** Se poate folosi indicația de la exercițiul precedent. **18.** $a = 1$, $b = 3$, $c = -2$, $d = 3$. **21.** $f = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. **22.** $f = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}$, $g = \frac{4}{5}X - \frac{3}{9}$ sau $f = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}$, $g = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}$ etc. **23.** $a = 2$, $b = 7$, $c = 7$, $d = -2$. **24.** $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{9}{64}$.

pag.81. 1. a) $q = 2X^2 + 3X + 11$, $r = 25X - 5$; b) $q=\frac{1}{3}X-\frac{7}{9}, r=-\frac{26}{9}X-\frac{2}{9}$.

2. a) $q = X^2 + (2i - 1)X + 1$, $r = 0$; b) $q = iX^3 + 2X^2 - (1 + 5i)X + 5(i - 2)$, $r = 9 + 19i$. **3.** $b = 0$, $c = \pm i$ sau $b=\pm\sqrt{2}$, $c = 1$ sau $b=\pm i\sqrt{2}$, $c = -1$. **4.** $a = 2 - i$, $b = 3 - i$. **5.** $a = 10$, $b = -6$. **6.** $q=\hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{5}, r=0$.

7. $q=\hat{4}X^2+\hat{4}X+\hat{2}, r=\hat{3}X+\hat{2}$. **8.** $r = 7X^2 + (a - b)X + b$. **9.** $a=\hat{2}, b=\hat{1}$. **10.** Dacă $n = mq + r$, atunci $X^n - 1 = X^{mq+r} - X^r + X^r - 1 = (X^m - 1)g(X) + X^r - 1$ cu $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

pag.87. 1. a) $f(3) = 196$; b) $f(-2 - i) = -19 - 18i$. **2.** a) $f = (X - 1)^4 + 6(X - 1)^3 + 9(X - 1)^2 - 3$; b) $f = (X + i)^4 - 2i(X + i)^3 - (1 + i)(X + i)^2 - 5(X + i) + 7 + 5i$. **3.** $q=\hat{5}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{5}, r=\hat{5}$. **4.** Se dezvoltă polinomul $X^3 - X + 1$ după puterile lui $X - 2$. Avem $X^3 - X + 1 = (X - 2)^3 + 6(X - 2)^2 + 11(X - 2) + 7$, de unde $a = 6$, $b = 11$, $c = 7$. **5.** $g\in\left\{\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{1},\ X^3+\hat{2}X^2+X+\hat{1},\ \hat{2}X^3+\hat{2}X^2+\hat{1}\right\}$. **6.** Cum $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ și $f(1) = f(-1) = 0$ rezultă că $X^2 - 1$ divide f. **7.** Avem $f(1) = 0$ și $f'(1) = 0$, unde $f' = (n + 2)\,nX^{n+1} - (n + 1)^2X^n + 1$, de unde rezultă că $(X - 1)^2$ divide f. **8.** $\lambda = -2$. **9.** $a = -1$, $b = 2$. **10.** Atribuind lui X valorile 0, 3 și 2 se deduce că $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, deci $f(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)q(X)$ cu $q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Folosind acum relația dată se deduce că, $q(X) = q(X + 1)$, deci $q(X) = a \in \mathbb{R}^*$, de unde $f = a(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ cu $a \neq 0$. **11.** $a = -9$, $b = 12$. **12.** Condițiile $f(k) = 2^k$, $k = 1, 2, 3$ reprezintă un sistem Cramer în necunoscutele a, b, c. Se obține $a = -5$, $b = 10$, $c = -4$. **13.** $f = X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 1$. **14.** Avem $X^2 + X + 1 = (X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)$ unde $\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cum $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$, se verifică $f(\varepsilon) = f(\varepsilon^2) = 0$, deci $X^2 + X + 1$ divide f. **15.** $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$.

pag.98. 1. a) $(f, g) = X^2 + X + 1$. **2.** $(f, g) = 1$, $[f, g] = fg$. **4.** Se calculează c.m.m.d.c. și se găsește $(f, g) = 1$. **5.** $(f, g) = X^3 - 1$ și $[f, g] = (X^3 - 1)(X^3 + 1)(X^6 + X^3 + 1)$. **6.** $a = 6$, $b = 7$. **7.** $a=\frac{49}{8}, b=\frac{19}{16}$.

8. $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2) = (X - i - 1)(X + i - 1)(X - i + 1)(X + i + 1)$.

$$g=(X^2+3)(X^2-3X+3)(X^2+3X+3)=(X+i\sqrt{3})(X-i\sqrt{3})\left(X-\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(X-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

9. Se arată că $X^3 - 2$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$. $f=(X-\sqrt[3]{2})(X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})=(X-\sqrt[3]{2})(X-\varepsilon\sqrt[3]{2})(X-\varepsilon^2\sqrt[3]{2})$ unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.** Avem $f(\hat{2})=f(\hat{3})=\hat{0}$, deci f se divide prin $(X-\hat{2})(X-\hat{3})$. Se obține $f=(X-\hat{2})(X-\hat{3})(X^2+X+\hat{1})$ și $X^2+X+\hat{1}$ este ireductibil.

11. $f=(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\cdot(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

12. $f=(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$. **13.** Avem $f(1) = f'(1) = 0$, deci $(1 - X)^2$ divide pe f.

14. $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-X^4=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

15. Se presupune contrariul și se obține o contradicție. **16.** $f=(X+\hat{2})^2(X^2+\hat{1})$

17. $\hat{a}=\hat{1}$. **21.** $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$, $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$ cu $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ și $h = c_0 + c_1X + \ldots + c_{m+n}X^{m+n}$. Dacă rezultatul din enunț nu este adevărat, fie s și t minimi astfel încât $p \nmid a_s$ și $p \nmid b_t$. Cum $c_{s+t} = \sum\limits_{i+j=s+t} a_ib_j$ rezultă că $p \mid a_sb_t$, deci $p \mid a_s$ sau $p \mid b_t$. Contradicție. **22.** Presupunem prin absurd că $f = g_1h$, $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_uX^u$, $h = c_0 + c_1X + \ldots + c_vX^v$ cu $b_u \neq 0$, $c_v \neq 0$, $u < n$, $v < n$. Avem $p \mid b_0$ și $p \nmid c_0$ sau $p \nmid b_0$ și $p \mid c_0$. În primul caz există $k \in \mathbb{N}^*$ a.î. p divide $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ și $p \nmid b_k$. Din $a_k = b_kc_0 + \ldots + b_0c_k$ rezultă că $p \mid b_kc_0$, deci $p \mid b_k$ sau $p \mid c_0$. Absurd. **23.** Se aplică exercițiul precedent. **24.** Dacă $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ de grade $u < n$, $v < n$, atunci $\hat{f}=\hat{g}\hat{h}$ cu $\text{grad}\,\hat{g}=u<n$ și $\text{grad}\,\hat{h}=v<n$. Contradicție.

pag 109-110. 1. 2 rădăcină triplă. **2.** –2 rădăcină simplă. **3.** $\lambda = 5$, –1 rădăcină dublă. **4.** $X^3 - 8 = (X-2)(X - i\sqrt{3}+1)(X+i\sqrt{3}+1)$, $X^4 + i = (X-z_0)(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$, unde $z_k = \cos\frac{3\pi+2k\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi+2k\pi}{8}$, $k = 0, 1, 2, 3$. **5.** $a = 3$, $b = -4$, $f = 3(X-1)^2\left(X+\frac{1-i\sqrt{2}}{3}\right)\left(X+\frac{1+i\sqrt{2}}{3}\right)$. **6.** a) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = \frac{2}{3}$; c) $x_1 = 2+\sqrt{10}$, $x_2 = 2-\sqrt{10}$, $x_3 = 2i$, $x_4 = 3i$. **7.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, $x_5 = 5$. **8.** $g = X^3 - 5X - 2$. **9.** $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -50$. **10.** $a = 20$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

11. $a = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **12.** $a = -6$, $b = -9$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$. **13.** $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = -2p$, $S_3 = -3p$, $S_4 = 2p^2$. Avem $S_n + pS_{n-2} + qS_{n-3} = 0$, oricare ar fi $n \geqslant 3$. Acum prin inducție rezultă că $S_n \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$. **14.** $a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$. **15.** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -a^2 + a - 1 < 0, \forall a \in \mathbb{R}$. **16.** Avem $x_k\overline{x}_k = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ și $f(X) = (X - x_1) \dots (X - x_k)$. Rezultă că $\overline{f(-1)} = (-1)^n(1+\overline{x}_1)\dots(1+\overline{x}_n) = (-1)^n\frac{(1+x_1)\dots(1+x_n)}{x_1x_2\dots x_n} = f(-1)$, de unde $f(-1) \in \mathbb{R}$. **19.** $f = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$. **20.** $f = X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 9$. **21.** Fie ε o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$. Dacă $X^2 + X + 1$ divide f, atunci $f(\varepsilon) = 0$. Rezultă că $(-1)^{m-n}\varepsilon^{2(m-n)} = 1$, deci $(-1)^{m-n} = 1$ și $\varepsilon^{2(m-n)} = 1$. Deducem că $m - n$ se divide prin 2 și 3, deci prin 6. **24.** Dacă ε este rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$, atunci $\varepsilon^3 = -1$. Din $f(\varepsilon) = 0$ rezultă că $n = 6k + 2$ sau $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$. **28.** a) $-\frac{1}{2}$; b) 1 și –3.

29. Dacă există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci $f(X) = (X - a)g(X)$ cu $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Rezultă $f(0) = -ag(0)$ și $f(1) = (1 - a)g(1)$. Cum unul dintre numerele $-a$ și $1 - a$ este par, se obține o contradicție. **31.** $f = X^3 + 12X - 30$. **32.** Dacă $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci $f(X) = (X - a)g(X)$ cu $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Avem $f(0)f(1) \dots f(n) = -a(1 - a)(2 - a) \dots (n - a)g(0)g(1) \dots g(n)$. Folosind formula pentru aranjamente se arată că $(n + 1)!$ divide produsul a $n + 1$ numere întregi consecutive. **33.** Dacă $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{2n}X^{2n}$ cu $a_{2n} \neq 0$ și $r = \frac{p}{q}$ este număr rațional scris sub formă inductibilă și dacă $f(r) = 0$ avem $a_0q^{2n} + a_1pq^{2n-1} + \dots + a_{2n-1}p^{2n-1}q + a_{2n}p^{2n} = 0$ membru stâng al egalității precedente este impar. Contradicție.

pag 118-120. 1. $\pm(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right)$; $\pm(1+2i)$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. **2.** i, $i\varepsilon$, $i\varepsilon^2$ cu $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; z_0, $z_0\varepsilon$, $z_0\varepsilon^2$, unde $z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$; z_0, $z_0\varepsilon$, $z_0\varepsilon^2$, unde $z_0 = -2 + i$; z_0, $z_0\varepsilon$, $z_0\varepsilon^2$, unde $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$. **3.** $(2 + i)^3 = 2 + 11i$; z_0, $z_0\varepsilon$, $z_0\varepsilon^2$ unde $z_0 = 2 + i$. **4.** z_0, z_0i, $-z_0$, $-z_0i$, unde $z_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. **5.** $z^8 = 2^8 5^4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\pm\sqrt[4]{20}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **6.** $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **7.** Avem $|z| = 0$, dacă $z = 0$ sau $|z| = 1$ și atunci $z^8 = 1$, adică z este rădăcină de ordin 8 a unității. **8.** a) $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -2 - 3i$. **9.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = -i$, $x_3 = i$. **10.** $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. **11.** c) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $x_{3,4} = \pm(2+i)$. **12.** a) $x_{1,2} = \pm a$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{ab}$. **14.** a) 1, ε, ε^2, 2, 2ε, $2\varepsilon^2$ unde $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Primitive

pag.133-134. 7. a), b) și c): funcția f este continuă. **9.** a) Fie $G(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}$. Se arată că G este derivabilă și $G'(x)=f(x)+\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}, & x=0 \\ 0 & , x=0\end{cases}=f(x)+h(x)$. G' admite primitive, h este continuă, deci f admite primitive;

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0 \\ 0 & , \text{dacă } x=0\end{cases}+\frac{1}{2}$ se ține seama de a). **10.** b) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}+\begin{cases}0, & x\neq 0 \\ a, & x=0\end{cases}$. Funcția

$g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}$ admite primitive. Rezultă că f admite primitive $\Leftrightarrow h(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0 \\ a, & x=0\end{cases}$ admite primitive $\Leftrightarrow a=0$;

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & , x=0\end{cases}+\begin{cases}0, & x\neq 0 \\ a-1, & x=0\end{cases}$. Rezultă $a=1$; d) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}-\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}+\begin{cases}0, & x\neq 0 \\ a, & x=0\end{cases}$.

Rezultă $a=0$. **11.** a) f are discontinuități de primă speță (pentru orice $x_0\in\mathbb{Z}$);

b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0 \\ 0, & x>0\end{cases}+\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$. Arătăm că funcția $g(x)=\begin{cases}0 & , x\leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ nu admite primitive. Presupunem că G ar fi o primitivă a lui g. Atunci $G(x)=\begin{cases}c_1, & x\leqslant 0 \\ x\sin\frac{1}{x}+c_2, & x>0\end{cases}$. Se arată că G nu este derivabilă în $x=0$; c) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0 \\ 2x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}-\begin{cases}0, & x=0 \\ \cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}+\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0 \\ 0, & x\neq 0\end{cases}$. **12.** f nu are proprietatea lui Darboux.

$\left(\frac{1}{4}\in\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right), f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right.$ și $\left.f(x)\neq\frac{1}{4},\ \forall x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$. **13.** Fie $F'_1(x)=f(x)$, $\forall\, x\in[a,c]$ și $F'_2(x)=f(x)$, $\forall\, x\in[c,b]$. Atunci $F(x)=\begin{cases}F_1(x) & , x\in[a,c] \\ F_2(x)+F_1c)-F_2(c), & x\in(c,b]\end{cases}$ este primitivă a lui f. **14.** Fie F o primitivă a lui f. Avem: $(F\cdot g)'=f\cdot g+F\cdot g'\Rightarrow f\cdot g=(F\cdot g)'-F\cdot g'$. $(F\cdot g)'$ admite primitive iar $F\cdot g'$ este continuă.

Test 1. 1. Nu are proprietatea lui Darboux. **2.** a) $\frac{x^2}{2}+2x+4\ln(x-2)+\mathscr{C}$; b) $\frac{9}{13}\cdot\sqrt[9]{x^{13}}+\mathscr{C}$; c) $\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+\mathscr{C}$; d) $\frac{1}{2}\cdot\cos^2 x-\cos x+\mathscr{C}$. **3.** Funcția f este continuă. $F(x)=x\sqrt{x}(20-6x)$ pentru $x\leqslant 2$ și $F(x)=x\sqrt{x}(6x-20)+32\sqrt{2}$ pentru $x>2$.

Test 2. 1. f este continuă. **2.** a) $x-2\ln(x+1)+\mathscr{C}$; b) $\frac{10}{13}\cdot\sqrt[10]{x^{13}}+\mathscr{C}$; c) $\ln\frac{2x-5}{2x+5}+\mathscr{C}$; d) $-2\operatorname{ctg}2x+\mathscr{C}$. **3.** f este continuă. $F(x)=-e^{4-2x}$ pentru $x\leqslant 2$ și $F(x)=e^{2x-4}-2$ pentru $x>2$.

Integrala definită

pag.141. 1. a) 1/5; b) $\sqrt{n^2+1}-n$; c) $2(b-a)/5$; d) $(b-a)/2n$. **2.** a) 206 / 225; b) 3; c) 0,507. **3.** a) 0,326; b) 0,7; c) 73/60. **6.** a) 3; b) 2; c) 6.

pag.146-147. 1. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{19}{7}$; c) 0; d) –78; e) 10; f) $\frac{152}{3}$; g) $-\frac{1}{60}$; h) $-\frac{4}{3}$. **2.** a) $\frac{1}{6}$; b) 1; c) $\frac{3}{2}+\ln 2$; d) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$; e) $\frac{62}{5}$; f) $\frac{45}{4}$; g) $\frac{4}{7}(8\sqrt{2}-1)$; h) 12. **3.** a) $\frac{72}{5}$; b) $2\sqrt{3}$; c) $16\sqrt{2}-2$; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $e-\frac{1}{e}$; f) $\frac{90}{ln10}$; g) $\frac{2}{\ln 2}$; h) 2. **4.** a) 4; b) 8; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{9}{2}$; e) 36; f) 9; g) 5; h) 9. **5.** a) $\frac{7}{12}$; b) $\frac{4}{3}+\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) 4 + 4ln2; e) $\frac{11}{4}$; f) $\frac{3}{\ln 2}+\frac{56}{3}$. **6.** a) $\frac{r^2}{4}$; b) π^2; c) 0; d) $\frac{\pi^2}{2}$. **7.** a) 1; b) $\frac{8}{3}$; c) 1; d) $\frac{32}{3}$. **8.** a) 4 + 4ln2; b) $4\sqrt{2}$; c) 4 + $2\pi^2$; d) $\frac{19}{3}$. **9.** a) $\frac{5}{6}$; b) $2-\sqrt{2}$; c) $\frac{11}{6}+\ln 2$. **10.** a) 3; b) 6; c) 2; d) $\frac{13}{2}$; e) $-2\pi^2$; f) $2\ln 5-\frac{77}{60}$; g) $2-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; h) $\frac{5}{2}+\ln 2$. **11.** a) $\frac{5}{6}$; b) $22+\frac{1}{2}$; c) $e-\frac{1}{2}$; d) 1. **12.** a) 8; b) 0; c) $\frac{3\pi}{4}$; d) $\frac{11\pi}{4}$.

pag.154. 1. a) $\frac{21}{4}$; b) $-\frac{3}{2}+\ln 2$; c) $\frac{3}{2}-\ln 4$; d) 1 – ln3. **2.** a) 2 + ln2; b) $\frac{11}{32}$; c) 1; d) ln6. **3.** a) $18+\frac{6}{7}$; b) 4; c) $\frac{21}{2}$; d) $\frac{3}{10}$. **4.** a) $7+\frac{11}{15}$; b) 8; c) $3+\ln\sqrt{2}$; d) $2-\frac{3\pi}{8}$. **5.** a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln(2+\sqrt{3})$; c) $\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$; d) $\frac{\pi}{6}+\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **6.** a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{4}$. **7.** a) $2\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{2}$; c) $1-\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{1}{2}$. **8.** a) 24; b) $\frac{7}{6}$; c) ln2; d) $1-\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$. **9.** a) 4; b) $-\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{5}{2}+\ln 2$; d) $\ln\frac{4}{3}-1$. **10.** a) $\ln\frac{\pi}{2}$; b) $2\sqrt{2}-\pi$; c) $-\ln\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{2}{\pi}$.

pag.159. 3. a) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; b) $\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{2}$; c) $4\ln 2-1$.

5. Se aplică metoda primitivelor surori. $J_1=\int\frac{f(x)\,dx}{af(x)+bg(x)}$, $J_2=\int\frac{g(x)}{af(x)+bg(x)}dx$, $a\cdot J_1+b\cdot J_2=x+\mathscr{C}$; $nbJ_1+maJ_2=\int\frac{bg'(x)+af'(x)}{af(x)+bg(x)}dx=\ln\left|af(x)+bg(x)\right|+\mathscr{C}$. Din aceste două relații se determină I_1.

pag.167-169. 1. a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$; b) $\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$; $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2-\frac{\pi^2}{18}$; c) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}-1$. **2.** a) $6e^2-2$; b) e^2-2; c) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}$. **3.** Două integrări prin părți; a) $\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; b) $-\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; c) $\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$; d) $\frac{e}{2}(\sin 1+\cos 1)-\frac{1}{2}$. **4.** a) $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$; b) ln(ln3); c) calculați $(e^x\cos x)'$; –1; d) $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** a) $\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; b) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{\sin^2 x}=-(\mathrm{ctg}\,x)'$; $2\sqrt{3}$; d) $\frac{48\sqrt{3}}{5}$. **6.** a) 2(1 – ln3); b) 4(1 – ln3); c) 4 + ln2 – π; d) $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. **7.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{8}$; c) $2-\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{4}+e-1-\mathrm{arctg}\,e$. **8.** a) $\frac{\pi}{2}-1$; b) 1; c) 1; d) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}$.
9. Se folosesc paritatea și imparitatea unor funcții; a) $2\ln(1+\sqrt{2})$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0; d) $1-\frac{2}{e}$. **10.** a) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$; b) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 4$; c) 0; d) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **11.** Se folosesc schimbarea $nx=t$ și periodicitatea lui $\left|\sin t\right|$; a) 2; b) $\frac{\pi^2}{4}$.

12. a) $3-\ln 2-\frac{\pi}{2}$; b) $5-\ln 2-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{64}{315}$; d) $\frac{8}{15}(1+\sqrt{2})$. **13.** a) $x = at$; $a^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)$; b) $x = \sin t$; $\frac{\pi}{2}-1$; c) $\frac{1}{x}=t$; $\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$. **14.** a) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-2$; b) $2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; c) $1-\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{18}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1}$. **15.** a) $x = \cos t$; $-\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{1}{12}(\pi+\ln 4-2)$; c) $\frac{\pi}{2}-\ln 2$; d) $x^2 = (x^2 + 1) - 1$; $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}\ln 2$. **16.** a) 0; b) $3-\frac{3}{2}\ln 3-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; c) $\ln 50+2\operatorname{arctg} 2-3-\frac{\pi}{2}$. **17.** a) $\frac{\pi}{2}+2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$; b) amplificare cu $1+\sqrt{x}$; $x=\sin^2 t$; $\frac{4}{3}-\frac{3\pi}{8}$; c) $2x+1=t$; $1+\frac{3}{2}\ln\sqrt{3}$; d) $\frac{4}{n}-1-\frac{4}{n^2}\ln(n+1)$. **18.** a) $x=\ln t$; $2-\frac{\pi}{2}$; b) $2-\frac{5}{e}$; c) $\pi-2$; d) $x=\sin^2 t$; $\frac{1}{4}$.

19. a) $\frac{1}{3}\left(\pi+2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; b) $x = \operatorname{arctg} t$; $\frac{1}{4}\ln 2$; c) $x=y+n\pi$; $\frac{1}{2}(-1)^n e^{-n\pi}(1-e^{-\pi})$; d) $\frac{1}{n^2}$. **20.** Se stabilesc ecuații pe care le verifică integralele; a) $x=\frac{1}{y}$; 0; b) $x=\frac{\pi}{4}-y$; $\frac{\pi}{8}\ln 2$; c) $\operatorname{arctg} x = y$; $\frac{\pi}{8}\ln 2$; d) $x=ay$; $\frac{\pi}{8a}(2\ln a+\ln 2)$. **21.** a) $x = \pi - y$; $\frac{\pi^2}{4}$; b) funcția se aduce la forma $(f(x)e^x)'$; $e^{\frac{\pi}{2}}$. **22.** a) $I_n = e - nI_{n-1}$; $e-1$; 1; $e-2$; $-2e+6$; b) $(2n + 1)I_n = (2n - 1)I_{n-1}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{16}$; $\frac{\pi}{32}$; $\frac{5\pi}{256}$; c) $I_n=I_{n-1}-\frac{1}{n!}$; $e-1$; $e-2$; $e-\frac{5}{2}$; $e-\frac{16}{6}$; d) $2nI_n=2^{n-1}\sqrt{2}+(2n-1)I_{n-1}$; $\ln(1+\sqrt{2})$; $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$; $\frac{1}{8}(7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2}))$; $\frac{1}{48}(67\sqrt{2}+15\ln(1+\sqrt{2}))$.
23. $nI_n = (n-1)I_{n-2}$; $\frac{\pi}{2}$; 1; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2}{3}$. **24.** $I_n=\frac{1}{(n-1)2^n}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}$; 1; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{1}{8}(2+\pi)$; $\frac{1}{32}(8+3\pi)$.

Test 1. 1. $7+\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$. **3.** $13\ln 2 - 3$. **4.** $\ln 3$. **5.** $4e^3 + 2$.

Test 2. 1. $2(1 - \ln 2)$. **2.** $1+\ln\frac{3}{4}$. **3.** $\frac{1}{4}(5e^5+e)$ **4.** $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** $\frac{\pi}{4}$.

Aplicații ale integralei definite

pag.173 I. 1. $\frac{32}{3}$. **2.** $\frac{32}{3}$. **3.** $\frac{10}{3}$. **4.** $\pi - 2$. **5.** $\frac{1}{6}$. **6.** $\frac{3}{\ln 2}-\frac{8}{3}$. **7.** $e+\frac{1}{e}-2$. **8.** $1-\frac{(e-1)^2}{2}$. **9.** $\frac{2}{3\ln 3}$.

pag.179-181. 1. a) $\frac{2}{3}$; b) $\ln 3$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) 2; e) 1; f) $\ln a_n$ este sumă Riemann; $\frac{4}{e}$.

Testul 1. 1. $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\operatorname{Im} f=(0;1]$, $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **2.** $3+\frac{1}{3}$ **3.** a) $I_7=\frac{2^{15}}{15}$; b) $I_{k+1}=-\frac{8+k}{7-k}I_k$; $I_0=-\frac{(7!)^2}{14!}I_7$; $3\ln 3-\frac{1}{2}$.

Testul 2. 1. $2\pi^2$. **2.** $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}e^{-x}(x^2-2nx+n(n-1))$; $I_{k+1}=-2^{k+1}e^{-2}+(k+1)I_k$; $A=\frac{3}{2}+\frac{11}{2}e^{-2}$.
3. $V(a)=\pi\operatorname{arctg} a+\frac{a\pi}{1+a^2}$, $\lim\limits_{a\to\infty}V(a)=\frac{\pi^2}{2}$.

Probleme recapitulative

Grupuri. 1. $AB \in M, \forall A, B \in M, (AB)C = A(BC), I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{z}{xy} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$.

2. $a = b, a \in \{0, -1\}$. **3.** $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$; $x = 0, e = -2$, dar pentru $x = 1, x * e = e - 1 - e - 2 \neq 1 = x$. **4.** $a = b = 1$. **5.** $a \in \{0, 1\}$. **6.** $a = 3$. **7.** $a \in \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$. **8.** $a \in (1, 2]$. **9.** $e = 0$, $x' = \frac{2x}{x-2} \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $(x * y) * z = x * (y * z)$; $x * y = y * z, \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$. **10.** $ab \in M, \forall a, b \in M$; $a^2 - 5b^2 = 1$, $e = 1 + 0\sqrt{5}$, $a = x + y\sqrt{5}$, $a^{-1} = x - y\sqrt{5}$. **11.** $x, y \in M$, $3 < x < 5$, $3 < y < 5$, $|x-4| < 1, |y-4| < 1$, $|x * y - 4| < 1$; $x * y = (x-4)(y-4) + 4 = y * x$. **12.** $x, y \in (2, 4)$, $2 < x < 4$, $2 < y < 4$, $|x-3| < 1$, $|y-3| < 1$, $x * y = (x-3)(y-3) + 3; |x * y - 3| < 1; x * y = y * x$; $x * e = x \Rightarrow e = 4 \notin M$. **13.** $x, y \in M, x * y \in M$; $x * y = y * x$, $1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} = 1 + (y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$,
$\frac{1}{2}\ln(y-1)\ln(x-1) = \frac{1}{2}\ln(x-1)\ln(y-1), \forall x, y \in M$. **14.** $A_1A_2 \in M$, $A_1A_2 = A_2A_1$, $\forall A_1, A_2 \in M$. **15.** $m = \frac{1}{2}$. **16.** $A_x \cdot A_y \in M$, $E = A_0$, $A_xA_y = A_yA_x$, $\forall A_x, A_y \in M$. **17.** $x, y \in M$, $|x-6| < 1, |y-6| < 1$, $|x * y - 6| < 1$ $x * y = (x-6)(y-6) + 6; (x * y) * z = x * (y * z)$; $e = 7 \in M$; $x * y = y * x, x \in \{5, 7\}$; $x' = 6 + \frac{1}{x-6}$, $x' \in \{5, 7\}$. **18.** $x, y \in M$, $x * y \in M$, $(x * y) * z = x * (y * z)$, $e_* = e$, $x * y = y * x$, $x * x' = e$, $e^{\ln x \ln x'} = e$, $\ln x \ln x' = 1$, $x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$, $\forall x \in M$. **19.** Nu există $e_*, e_\top, e_\perp$. **20.** $A_1A_2 \in M, \forall A_1, A_2 \in M$; $I = I_2$. Dacă $A \in M$ există A^{-1} dacă și numai dacă $x \neq 0$ și $y = 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-1}y^{-1}z & y^{-1} \end{pmatrix}$. **21.** $a_1, a_2 \in M, a_1a_2 \in M$; $a = x + y\sqrt{7}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, $x^2 - 7y^2 = 1$, $e = 1$, $x^{-1} = x - y\sqrt{7}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x^2 - 7y^2 = 1$. **22.** a) $x * y = (x-3)(y-3) + 3$, $x, y \in G$; $x - 3 > 0$, $y - 3 > 0$, $x * y > 3$, $x * y \in G$. b) $a \neq 0$, f este bijectivă; $f(xy) = f(x) * f(y)$, $a = 1$, $b = 3$. c) Inducție matematică. **23.** $x * y \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in \mathbb{Z}$, $(x * y) * z = x * (y * z)$, $e = 2$, $x' = 2 - x$, $x * y = y * x, \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$; $f(x) = x - 2$ este bijectivă; $f(x * y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. **24.** $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. **25.** $x, y \in G$, $|x| < 3, |y| < 3, |x * y| < 3$, $x * y \in G$; $(x * y) * z = x * (y * z)$; $e = 0$; $x' = -x$; $x * y = y * x$; $f: \mathbb{R} \to G$, bijectivă și $f(x+y) = f(x) * f(y)$; $f^{-1}: G \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{x+3}{x-3}$ bijectivă, $f^{-1}(x * y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$. **26.** $A_1, A_2 \in G$, $A_1A_2 \in G$, $E = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $x^2 + y^2 \neq 0$; $f^{-1}: \mathbb{C}^* \to G$, $f^{-1}(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$; $f: G \to \mathbb{C}^*$, $f(A) = z$, $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $z = x + iy$. f este bijectivă, $f(AB) = f(A) \cdot f(B)$. **27.** $A_1A_2 \in G$, $A_1, A_2 \in G$, $(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)$, $I_3 \in G$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

28. a) $x, y \in G$, $x * y = (x-3)(y-3) + 3$, $x * y \in G$; $(x * y) * z = x * (y * z)$, $e = 4 \in G$, $x' = 3 + \frac{1}{x-3} = \frac{3x-8}{x-3} \in G$, $x * y = y * x, \forall x, y \in G$. b) $f: G \to \mathbb{R}_+^*$, bijectivă și $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G$. **29.** $e_* = -1$, $e_\perp = 1$; $x'_* = -2 - x \in \mathbb{Z}$, $x'_\perp = 2 - x \in \mathbb{Z}$; f bijectivă, $f(x * y) = f(x) \perp f(y)$. **30.** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon + 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$; $A^3 = E$, $A^{-1} = A^2$,

$(A^2)^{-1} = E$. **31.** $A_1, A_2 \in G, A_1A_2 \in G$. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{x^2 - 3y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ -3y & x \end{pmatrix} \in G$, $f: G \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $f(A) = x + y\sqrt{3}$, $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$ este bijectivă, $f^{-1}: \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to G$, $f^{-1}(x + y\sqrt{3}) = A$, $f(z_1z_2) = f(z_1)\cdot f(z_2)$; $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{3}, z_2 = x_2 + y_2\sqrt{3}$; $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$. **32.** a) $x * y = (x-1)(y-1)+1 \in G, e = 2 \in G$, $x' = 1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1}$, $x * y = y * x$. b) Inducție matematică. **33.** $x * y = 1-(x-1)(y-1), x, y \in G, x * y \in G; e = -1 \in G, x' = 1 + \dfrac{4}{x-1} \in G$, $x * y = y * x$. **34.** a) $x * y = (x - m)(y - m) + m$, $x * y \in G$, $e = m + 1$, $x' = \dfrac{1 - m^2 + mx}{x - m}$, $x * y = y * x$. **35.** $z_1 * z_2 = (z_2 - i)(z_2 - i) + i$, $e = 1 + i$, $z' = \dfrac{2 + iz}{z - i} \in \mathbb{C}_1$. b) Inducție matematică. **36.** $A_x \cdot A_y \in G, A_xA_y = A_{xy} = A_{yx}$; $I_3 = A_1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **37.** $x, y \in G$, $x * y \in G$; $e = 0$, $x' = \dfrac{x}{x-k}$, $x \neq k$. **38.** $a \in G, x, y \in G, x * y \in G$; $a\cdot a' = a'\cdot a = e, e_* = a', x'_* * x = x * x'_* = e_* = a'$, $x'_* = x'a'a'$, $xy = yx$, $x * y = y * x$. **39.** a) $e^{ax} \cdot e^{bx} = e^{(a+b)x} \in G$. a) $(e^{ax}e^{bx})e^{cx} = e^{(a+b+c)x} = e^{ax} \cdot (e^{bx}e^{cx})$; $e = 1$, $(e^{ax})' = e^{-ax}$; b) $f: G \to \mathbb{R}$, $f(e^{ax}) = a$, f este bijectivă și $f(e^{ax}e^{bx}) = f(e^{ax}) + f(e^{bx})$.

40. a) $x * y = \dfrac{xy}{xy + (x-1)(y-1)} \in G$, $e = \dfrac{1}{2} \in (0, 1)$, $x' = 1 - x \in (0, 1)$, $x * y = y * x$.

b) f bijectivă și $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$. **41.** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \perp z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \top z_2 \in \mathbb{C}$; $e_1 = -ai$, $e_\top = a$; $z'_\perp = -z - 2ai$, $z'_\top = -z + 2a$; f bijectivă, $f(z_1 \perp z_2) = f(z_1) \top f(z_2)$.

Inele și corpuri 1. $x \perp y \in \mathbb{Z}$, $x \top y \in \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, \perp)$ este grup abelian, $e_\perp = 3$, $x'_\perp = 6 - x$, $e_\top = 4$, $(\mathbb{Z}, \top)$ este monoid; $x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$. **2.** $(\mathbb{C}, +)$ este grup abelian, $e_\top = 0$, $z' = -z$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $(\mathbb{C}, *)$ monoid comutativ, $e_* = 1 + i$; $z * (z_1 + z_2) = (z * z_1) + (z * z_2)$. **3.** a) $z_1, z_2 \in A$, $z_1 + z_2 \in A$, $z_1z_2 \in A$; $e_+ = (0, 0)$; $-z = (-x, -y)$; $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $e_\cdot = (1, 0)$, $z_1z_2 = z_2z_1$; $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$; $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ;
b) f este bijectivă, $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$; $f(z_1z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$. **4.** $A_1 + A_2 \in A$, $A_1, A_2 \in A$; $e_+ = O_2$, $-A = A'$, $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$; $A_1 \cdot A_2 \in A$, $A_1, A_2 \in A$; $e_\cdot = I_2$; $A(A_1 + A_2) = AA_1 + AA_2$. **5.** $(A, \perp, \top)$ este inel comutativ. $x \in A$, $x' \in A$, $x \top x' = x' \top x = e_\top$, $e_\top = -1$; $x \perp y = (x + 2)(y + 2) - 2$, $x \perp x' = -1$, $(x + 2)(x' + 2) - 2 = -1$, $x' = -2 + \dfrac{1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{Q}\setminus\{-2\}$, $e_\perp = -2$; $x \top (y \perp z) = x \top y \perp x \top z$. **6.** $A_1, A_2 \in K$, $A_1A_2 \in K$, $A_1 + A_2 \in K$, $e = O_2$, $(K, +)$ este grup abelian. $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x + y & y \\ y & x - y \end{pmatrix}$, $(K - \{O_2\}, \cdot)$ este grup abelian. $e = I_2$.
$A^{-1}_{x,y} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{x^2 - 2y^2} & \dfrac{-y}{x^2-2y^2} \\ -\dfrac{y}{x^2 - 2y^2} & \dfrac{x+y}{x^2-2y^2} \end{pmatrix}$; $A_1(A_2 + A_3) = A_1A_2 + A_1A_3$; $A_1A_2 = A_2A_1$. **7.** $z_1, z_2 \in K$, $z_1 + z_2 \in K$, $z_1z_2 \in K$, $e_+ = 0$, $e_\cdot = 1$, $(K, +)$ grup abelian, $(K, \cdot)$ grup abelian, $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$. **8.** $(K, \perp)$ grup abelian, $(K - e_\perp, \top)$ grup abelian. $x \top (y \perp z) = x \top y \perp x \top z$. **9.** $f: A_1 \to A_2$, $f(z_1) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $z_1 = x + iy$, $x, y \in \mathbb{Z}$; f este bijectivă; $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$; $f(z_1z_2) = f(z_1)f(z_2)$. **10.** $f: K_1 \to K_2$, $f(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$, $z = x + y\sqrt{3}$, $x, y \in \mathbb{Q}$.
f este bijectivă și $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$; $f(z_1z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

Primitive. Integrale nedefinite. Integrale definite. II. 1. a) $\frac{14}{3}$; b) $\frac{2}{3}+\frac{32\sqrt{2}}{7}$; c) $\frac{5\sqrt{5}-7}{12}$; d) $2\ln 5-4+2\sqrt{e-1}+2\operatorname{arctg}2-2\operatorname{arctg}\sqrt{e-1}$; e) 1 – 2ln2; f) $\frac{17}{6}-4\ln 2$; g) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; h) $\frac{2}{\pi}$. **2.** a) ln3; b) 1 – ln2; c) $\ln 3-\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{2}-\ln 3$. **3.** a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{2}{15}$; c) ln3; d) 8π. **4.** a) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$; b) 2π; c) $\frac{4}{35}(16-9\sqrt{2})$; d) $\frac{\pi}{2}-1$. **5.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{8}\left(2+\ln\frac{27}{16}\right)$; c) $1-e+(1+e)\ln(1+e)-\ln 4$; d) $-2\operatorname{arctg}\alpha+\ln\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, unde $\alpha=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$. **6.** a) 4; b) 0; c) 4; d) 4. **7.** a) $2\ln\frac{5}{3}$; b) $e+\frac{1}{e}-2$; c) $\frac{1}{2}(1+e^2)$; d) $\frac{e}{2}(1+e^4)$. **8.** a) $2-\frac{2}{e}$; b) $2e-2$; c) 4π; d) 4π. **9.** a) $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; b) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$; c) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{4}(-1+\ln 4)$. **10.** a) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1+\sqrt{2})$; b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; c) 2; d) 1. **11.** a) $\frac{1}{16}(\pi^2+4)$; b) $\frac{1}{16}(\pi^2-4)$; c) $-\frac{1}{2}\pi^2$; d) $\frac{\pi}{2}$. **12.** a) 2; b) $\frac{\pi}{2}$; c) π^2; d) 2. **13.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{5\pi}{32}$; d) $\frac{4}{9}$. **14.** a) $e^{\pi/2}$; b) $e^{\pi/4}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **15.** a) $\frac{22}{3}$; b) 8. **16.** a) $\frac{32}{3}$; b) $\frac{7}{6}$. **17.** a) $\frac{28}{3}$; b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}-1$; c) $\frac{1}{4}+\ln 2$; d) $\frac{4}{3}+\frac{4}{\pi}$. **18.** Se minorează și se majorează funcțiile $\sqrt{x^4+1}$ și $e^{x^2}+e^{1-x^2}$. **19.** a) 0; b) 0; c) 7; d) ln4. **20.** a) $I_n=e-nI_{n-1}$; $e-1$; 1; $e-2$; $6-2e$; b) $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$; $1-\frac{1}{e}$; $1-\frac{2}{e}$; $2-\frac{5}{e}$; $6-\frac{16}{e}$; c) $(2n+3)I_n=2nI_{n-1}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{16}{105}$; $\frac{32}{315}$; d) $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$; 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{48}{105}$. **21.** $\frac{10}{3}$.

Aplicații ale integralei. 1. a) f este strict crescătoare pe $(-\infty,-2)$ și pe $(-2,+\infty)$; b) $\alpha=3$, $\beta=-7$; c) $|3-7\ln 2|$. **2.** a) $f'(x)=-2\cos x(2\sin x-1)$; 0, $\frac{\pi}{2}$, π puncte de minim, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ puncte de maxim; b) 4. **3.** a) $f'(x)=\frac{x+2}{x+1}$, f strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$; b) $A(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$; c) $\lim\limits_{\alpha\to-1}A(\alpha)=\frac{3}{2}$.
4. a) $\lim\limits_{h\nearrow 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=-\infty$; b) $F(x)=\left(6-2x-\frac{(3-x)^2}{5}\right)\sqrt{3-x}$; c) $c=2$; d) $\frac{9}{4}$; e) $\frac{45\pi}{2}$.
5. a) $f'(x)=-3\sin 3x$, $f''(x)=-9\cos 3x$; c) $2+\frac{\pi}{9}$; d) $\frac{\pi^2}{4}+\frac{2\pi}{3}$. **6.** a) f strict descrescătoare pe $(-\infty,\ln 2)$, strict crescătoare pe $(\ln 2,+\infty)$; b) $S=6$; $V=\pi(15-8\ln 4)$; c) $5\ln 4-6$. **7.** a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\sin^4 4x=(\sin^2 4x)^2=\left(\frac{1-\cos 8x}{2}\right)^2=$ $=\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\cos 8x+\frac{1}{8}\cos 16x$; c) $V=\frac{3\pi^2}{32}$. **8.** a) $F(x)=\ln|\ln x|+\mathscr{C}$; b) $A=-\frac{1}{2}\ln(\ln\alpha)-\left(1-\frac{\alpha}{e}\right)$.

9. a) $f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$. **10.** b) $\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_0^3(f(x)+f(-x))dx=6$; c) $S=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. **14.** a) $\frac{2}{\pi}$; b) $\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$; c) $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$; d) $\frac{3\sqrt{3}}{e}$.

Probleme de tip bacalaureat

Grupuri

1. a) $I_2 = H(0)$. **b)** $2A$. **c)** $x, y > -\frac{1}{2} \Rightarrow (2x+1)(2y+1) > 0 \Rightarrow 4xy + 2x + 2y > -1 \Rightarrow 2xy + x + y > -\frac{1}{2}$.

d) $H(x)H(y) = (I_2 + xA)(I_2 + yA) = I_2 + (x + y)A + 2xyA = H(x + y + 2xy)$.

e) Se obține din punctele anterioare și proprietățile înmulțirii matricelor; $(H(x))^{-1} = H\left(\frac{-x}{1+2x}\right)$ și $\frac{-x}{1+2x} > -\frac{1}{2}$ pentru $x > -\frac{1}{2}$.

f) $f : H \to \mathbb{R}$, $f(H(x)) = \ln(2x + 1)$ este izomorfismul căutat.

g) Aplicând izomorfismul f în ambii membri obținem $\ln(2x + 1) = \ln(2^{2004} \cdot 1004!)$, de unde $x = \frac{2^{1004} \cdot 1004! - 1}{2}$.

2. a) Din calcul legea este asociativă.

b) $(x \circ y) - (x-2)(y-2) = 2$. **c)** $e = 3$.

d) Din $x \circ y = x$ și din b) rezultă $(x - 2)(y - 2) = x - 2$, $\forall y \in \mathbb{R}$, de unde $x = 2$.

e) Din b) deducem că: $x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n = (x_1 - 2)(x_2 - 2)...(x_n - 2) + 2$ (inducție matematică); $x \in \{-2004, -2003, ..., 0, 1, 2\}$.

3. a) Notăm $X(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$; $I_3 = X(\hat{0}, \hat{0}, \hat{0}) \in \mathcal{M}_p$.

b) Se obține $X(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \cdot X(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = X(\widehat{a+x}, \widehat{b+y+az}, \widehat{c+z}) \in \mathcal{M}_p$.

c) Din b), prin inducție matematică, se obține $X^n(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = X\left(\widehat{na}, \widehat{nb + \frac{n(n-1)ac}{2}}, \widehat{nc}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și deoarece p este impar, avem $\widehat{pa} = \widehat{pb + \frac{p(p-1)ac}{2}} = \widehat{pc} = \hat{0}$, deci $X^p(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = I$.

d) Utilizând egalitatea de la b), alegem $\hat{a}, \hat{c}, \hat{x}, \hat{z}$ astfel încât $\widehat{az} \neq \widehat{xc}$. De exemplu, $X(\hat{0}, \hat{1}, \hat{2})$ și $X(\hat{1}, \hat{1}, \hat{2})$ nu comută.

e) Din $A^p = I$ rezultă $A^{-1} = A^{p-1} \in \mathcal{M}_p$ și din a), b), c), d), proprietățile înmulțirii matricelor și ale operațiilor din $\mathbb{Z}_p$, deducem că $(\mathcal{M}_p, \cdot)$ este grup necomutativ.

f) Dacă p este prim, cum $A^p = I$ și $A \neq I$ rezultă că $\text{ord}A \mid p$, $\text{ord}A \neq 1$, deci $\text{ord}A = p$. Reciproc, procedăm prin reducere la absurd. Presupunem p compus și fie $p = mn$ cu $m, n > 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ și $A \in \mathcal{M}_p$ cu $\text{ord}A = p = mn$. Avem $B = A^m \in \mathcal{M}_p$, $B \neq I$ și $\text{ord}B = r < p$, contradicție. Deci p este prim.

g) $(\mathcal{M}_p, \cdot)$ este grup necomutativ cu p^3 elemente.

4. a) Calcul direct.

b) Se arată că, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, avem $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

c) Pentru $n = 2$, rezultă din a). Vom demonstra că $P(k) \to P(k + 1)$. Presupunem $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{k-1} = 2^{k-2}(x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2}) \cdots (x_{k-1} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$. Atunci

$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_k = \left(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{k-1}\right) \circ x_k = 2\left(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{k-1} - \frac{1}{2}\right)\left(x_k - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} =$

$= 2\left[2^{k-2}(x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2})\cdots(x_{k-1} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] \cdot \left(x_k - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} =$

$= 2^{k-1}(x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2})\cdots(x_k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$. Folosind metoda inducției matematice rezultă că

$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n = 2^{n-1}(x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2})\cdots(x_n - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

d) $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy-x-y+1 & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 2xy-x-y+1 \end{pmatrix} = A(2xy-x-y+1)$.

e) Vom nota $x^{(n)} = x \circ x \circ \cdots \circ x$, compunerea făcându-se de n ori, $n \geq 2$. Conform punctului **c)**, $x^{(n)} = 2^{n-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Din punctul d) rezultă că $A^n(x) = A\left(x^{(n)}\right) = A\left(2^{n-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\right)$. În aceste condiții $A^{2005}(x) = A\left(2^{2004}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2005} + \frac{1}{2}\right)$.

Având în vedere, în plus, că din $A(x) = A(y)$ rezultă $x = y$, ecuația $A^{2005}(x) = A(x)$ se reduce la $A\left(2^{2004}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2005} + \frac{1}{2}\right) = A(x)$ și, în final, la $x = 2^{2004}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2005} + \frac{1}{2}$. Notând $y = x - \frac{1}{2}$, se obțin pentru y valorile $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, ceea ce înseamnă ca ecuația dată admite soluțiile: 0, $\frac{1}{2}$, 1.

f) Fie $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $A(x)C = A(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, implică

$\begin{pmatrix} ax + g(1-x) & bx + h(1-x) & cx + i(1-x) \\ 0 & 0 & 0 \\ gx + a(1-x) & hx + b(1-x) & ix + c(1-x) \end{pmatrix} = A(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x(a-g) + g = x \\ x(b-h) + h = 0 \\ x(c-i) + i = 1-x \\ x(g-a) + a = 1-x \\ x(h-b) + b = 0 \\ x(i-c) + c = x \end{cases}$. Se obține astfel că $a = i = 1$ și că $b = c = g = h = 0$. Din $CA(x) = A(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, mai rezultă și $d = f = 0$. În aceste condiții $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{P} - \mathcal{N} = \varnothing$ și $\mathcal{M} \cap \mathcal{P} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

5. a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2 = 3(x+1)(y+1) - 1$;

b) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$; $(x \circ y) \circ z = \big(3(x+1)(y+1)-1\big) \circ z = 3[3(x+1)(y+1)-1+1](z+1)-1 =$
$= [9(x+1)(y+1)(z+1) - 1 = 3(x+1)[3(y+1)(z+1)-1+1]-1 = x \circ (y \circ z)$.

c) $3ex + 3x + 3e + 2 = x$ implică $x(3e + 2) + 3e + 2 = 0$, deci $e = -\dfrac{2}{3}$.

d) $(-1) \circ x = 3(x+1)((-1)+1) - 1 = -1$.

e) Din $x \circ y = -1$, rezultă $3(x + 1)(y + 1) - 1 = -1$, deci $(x + 1)(y + 1) = 0$, adică $x = -1$ sau $y = -1$.

f) $\log_2 x \circ \log_2 y = -1$ implică, conform punctului e), $\log_2 x = -1$ sau $\log_2 y = -1$, deci $x = \dfrac{1}{2}$ sau $y = \dfrac{1}{2}$.

6. a) Notăm cu $e \in \mathbb{R}$ elementul neutru al legii; avem $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + e - 9 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 9$. Deci „$\circ$“ are element neutru.

b) Notăm cu x' simetricul elementului x față de legea „$\circ$“. Atunci $x \circ x' = x + x' - 9 = 9$, de unde $x' = 18 - x, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $0 \circ \ldots \circ 5 = 0 + \ldots + 5 - 9 \cdot 5 = -30$.

d) $4^x \circ 2^x = 11 \Leftrightarrow 4^x + 2^x - 9 = 11$. Notăm 2^x cu t și obținem $t^2 + t - 20 = 0$, de unde $t_1 = 4$ și $t_2 = -5$; din $2^x = 4$ rezultă $x = 2$, iar $2^x = -5$ nu are soluție. Deci ecuația are o singură soluție reală.

e) Ecuația se mai scrie $\sqrt{x-2} + \sqrt{102-x} = 10$, $x \in [2, 102]$. Prin ridicare la pătrat, ea devine $x - 2 + 102 - x + 2\sqrt{x-2}\sqrt{102-x} = 100$, care are soluțiile $x = 2$ și $x = 102$. Deci suma soluțiilor este 104.

7. a) Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

b) $(x \circ y) \circ z = (x+3)(y+3)(z+3) - 3 = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Pentru a găsi $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$, egalăm $a \circ b$ cu un număr natural. Considerăm $a \circ b = (a+3)(b+3) - 3 = k$, pentru $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 3$, de unde $(a+3)(b+3) = k$, adică $a + 3 = \dfrac{k}{b+3}$. Obținem $a = \dfrac{k}{b+3} - 3$, deci $\left\{\left(\dfrac{k}{b+3} - 3, b\right) \middle| b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 3\right\}$, mulțimea având o infinitate de perechi (a, b) de forma de mai sus.

d) $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -3 \Leftrightarrow (\log_2 x + 3)(\log_3 x + 3) - 3 = -3 \Leftrightarrow (\log_2 x + 3)(\log_3 x + 3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(\log_2 x = -3 \text{ sau } \log_3 x = -3\big) \Rightarrow$ ($x_1 = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$ sau $x_2 = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$). Ecuația are două soluții reale.

e) $2^x \circ 3^x = -3 \Leftrightarrow (3^x + 3)(2^x + 3) - 3 = -3 \Leftrightarrow (3^x + 3)(2^x + 3) = 0$, de unde $2^x = -3$ și $3^x = -3$; ecuațiile nu au soluții, deci mulțimea nu are nici un element.

8. a) Se verifică prin calcul direct.

b) Din $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ avem $(x - 1)(y - 1) \neq 0$ rezultă $2(x - 1)(y - 1) + + 1 \neq 1$, adică $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) $e = \dfrac{3}{2}$.

d) $x * x = 2(x-1)^2 + 1$; $x * x * x = 2^2(x-1)^3 + 1$. Se demonstrează prin inducție matematică că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-1)^n + 1$.

e) Din punctul d) avem $x * x * x * x * x = 17 \Leftrightarrow 2^4(x-1)^5 + 1 = 17 \Leftrightarrow (x-1)^5 = 1$; obținem $x = 2$.

9. a) $(-10) \circ 1 = 1$.

b) Inecuația dată este echivalentă cu $x^2 + x \leqslant 0$, cu soluția pozitivă $x \in [-1, 0]$.

c) Notând $2^x = y$, $y > 0$ ecuația devine $y^2 + y - 2 = 0$, cu soluția pozitivă $y = 1$, de unde obținem $x = 0$.

d) Considerăm $x=\dfrac{1}{2}$ și căutăm $y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ y=\dfrac{1}{3}$. Găsim $y=-\dfrac{61}{6}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. **e)** Se verifică axiomele grupului.

10. a) $A\cdot A=A\cdot A\Rightarrow A\in G$;, $I_2\cdot A=A\cdot I_2=A\Rightarrow I_2\Rightarrow G$.

b) $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b&-a\\-d&-c\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=c$ și $a=d$. Rezultă

$G=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\y&x\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{C}\right\}$ și $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\notin G$.

c) $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2\Rightarrow A^2=I_2$

d) $B=aI_2+bA=\begin{pmatrix}a&-b\\-b&a\end{pmatrix}\in G$.

e) $A^2=I_2\Rightarrow A^{2005}=A\cdot A^{2004}=A\cdot I_2^{1002}=A$.

f) Da. Adunarea este asociativă, are invers și element neutru în G.

11. a) $x\circ y=2xy-x-y+4$; $(x\circ y)\circ z=4xyz-2xy-2yz-2xz+x+y+z+6z$;
$x\circ(y\circ z)=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z+6x$. Deci $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, dacă și numai dacă $x=z$.

b) Notăm cu e elementul neutru al legii „$\circ$“ și din $x\circ e=x$, rezultă $(2x-1)e=2x-4$, deci legea nu are element neutru.

c) $x\circ 2=3\Rightarrow 4x-x-2+4=3x+2=3\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$. Cardinalul mulțimii este 1.

d) $(-1)\circ 0=5; (-1)\circ 0\circ 1=5\circ 1=8$.

e) Din $x\circ x=2x^2-2x+4=x$ rezultă $2x^2-3x+4=0; \Delta<0$ deci nu există x care să verifice proprietatea.

12. a) $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$; $(f\circ g)(x)=a(cx+d)+b=acx+ad+b\in G$.

b) $1_{\mathbb{R}}=1\cdot x+0\in G$.

c) $f(x)=ax+b$, $c=\dfrac{1}{a}, d=\dfrac{-b}{a}$, $g(x)=cx+d$; conform a) rezultă $(f\circ g)(x)=x=1_{\mathbb{R}}$, deci există $g(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}\in G$.

d) $(1_{\mathbb{R}}\circ f)x=f(x)=(f\circ 1_{\mathbb{R}})(x)=(ax+b)$.

e) $f(x)=2x+1$, $g(x)=3x-1$; $(f\circ g)(x)=2(3x-1)+1=6x-1$; $(g\circ f)(x)=3(2x+1)-1=6x+2$; rezultă $f\circ g\neq g\circ f$.

f) $H=\{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid h(ax+b)=ah(x)+b\}$; $x=0\Rightarrow h(b)=ah(0)+b, \forall a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$; b fix și a variabil implică $h(0)=0$ și $h(b)=b, \forall b\in\mathbb{R}$. Deci $H=\{x\}$.

13. a) Prin calcul direct.

b) $A\circ B=B\circ A$, deci legea e comutativă.

c) Da, $(A\circ B)\circ C=ABC+2AC+2BC+2C+2AB+4A+4B+4I_3+2C+2I_3=A\circ(B\circ C)$.

d) $-I_3$ este element neutru.

e) Monoid comutativ.

f) $I_3\circ I_3=I_3+6I_3=7I_3$.

14. a) Se verifică prin calcul direct.
b) $(x \circ y) \circ z = 3(x \circ y + 1)(z+1) - 1 = 3^2(x+1)(y+1)(z+1) - 1 = x \circ (y \circ z)$.
c) $a \circ b = 3(a+1)(b+1) - 1$. Luăm $a = \frac{15}{2} - 1$, $b = \frac{2}{3} - 1$ și obținem cerința.
d) $x \circ e = x$ sau $3(x+1)(e+1) = x+1$ sau $e + 1 = \frac{1}{3}$ sau $e = -\frac{2}{3}$.
e) $x \circ y = -1$ sau $3(x+1)(y+1) = 0$ de unde rezultă $x + 1 = 0$ sau $y + 1 = 0$.
f) Pentru $n = 2$ și $n = 3$ s-a verificat. Apoi
$\underbrace{a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n}_{x} \circ a_{n+1} = x \circ a_{n+1} = 3(x+1)(a_{n+1}+1) - 1 = 3^n(a_1+1)\ldots(a_n+1)(a_{n+1}+1) - 1$.

Inele și corpuri

1. a) Elementele inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{12}$ sunt $\{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\}$, deci sunt 4 elemente.
b)Ecuația $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$ are soluțiile $\hat{x} = \hat{2}$ și $\hat{x} = \hat{8}$, deci două soluții. Produsul lor este $\hat{4}$.
c) Soluțiile ecuației $\hat{x}^2 = \hat{x}$ sunt $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{9}\}$, deci suma lor este $\hat{2}$.

d) Soluțiile ecuației $\hat{x}^4 = \hat{0}$ sunt $\{\hat{0}, \hat{6}\}$, deci numărul lor este 2.

e) Probabilitatea este $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

2. a) Elementul neutru este –1. **b)** Simetricul lui 2 este $-\frac{7}{4}$.
c) Suma soluțiilor este $\hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = \hat{3}$. **d)** 0,5.
3. a) $\hat{x}^3 = \hat{x}$ are în $\mathbb{Z}_3$ soluțiile $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$. **b)** Orice element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{2006}$ are inversul $-\hat{x}$ față de adunare; 2006 elemente. **c)** 5 soluții. **d)** $\hat{0} \cdot \hat{1} = \hat{0}$.
4. a) $\hat{x} \in \{\hat{2}\}$. O soluție. **b)** $\hat{0} \cdot \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$. **c)** Două.
5. a) Se verifică regulile grupului. **b)** $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{p-1} \Rightarrow (x, p) = 1$. Rezultă că există $a, b \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $xa + pb = 1$, deci $\hat{x}\hat{a} = \hat{1}$. **c)** Se verifică axiomele corpului. **d)** $\hat{x}^2 = \hat{1} \Rightarrow (\hat{x} - \hat{1})(\hat{x} + \hat{1}) = \hat{0}$, de unde $\hat{x} = \hat{1}$ sau $\hat{x} = -\hat{1} = \widehat{p-1}$.
e) $\forall \hat{x} \in \{\hat{2}, \hat{3}, \ldots \widehat{p-2}\}$, există $\hat{y} \in \{\hat{2}, \hat{3}, \ldots \widehat{p-2}\}$ astfel încât $\hat{x} \neq \hat{y}$ și $\hat{x}\hat{y} = \hat{1}$ (conform b) și d)). Deci $\hat{1} \cdot \hat{2} \ldots \widehat{p-2} \cdot \widehat{p-1} = \hat{1} \cdot \widehat{p-1} \cdot (\hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-2}) = \widehat{p-1}$. **f)** Dacă p este număr compus, atunci există $1 < d < p$ astfel încât $d \mid p$ și $d \neq \frac{p}{d}$. Atunci $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1}$ este divizibil cu $d \cdot \frac{p}{d} = p$.

Polinoame

1. a) $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. **b)** $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. **c)** $f \equiv 0$. **d)** $\hat{0}$.

2. a) $P'(X) = 3X^2 + 2aX + b$. $P''(X) = 6X + 2a$. $P^{(3)}(X) = 6$.
b) $X^3 + aX^2 + bX + c - (3X^2 + 2aX + b) + 6X + 2a - 6 = X^3 + (a-3)X^2 + (b - 2a + + 6)X + c - b + 2a - 6$.
c) $Q'(X) = P'(X) - P''(X) + P^{(3)}(X) - P^{(4)}(X) = P'(X) - P''(X) + P^3(X)$, de unde concluzia.
d) $(e^x Q(x))' = e^x(Q(x) + Q'(x)) = e^x P(x)$.
e) P este o funcție continuă și atunci are proprietatea lui Darboux. Cum P nu se anulează, rezultă că ea păstrează semn constant.
f) $f(x) = e^x Q(x) \Rightarrow f'(x) = e^x P(x) > 0$ (sau < 0) după cum $P(x) > 0$ (sau $P(x) < 0$), de unde rezultă că f strict crescătoare (sau strict descrescătoare), după cum $P(x) > 0$ (sau $P(x) < 0$).

g) Avem $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ și $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și, cum f este strict monotonă, rezultă $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $Q(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci Q nu are rădăcini reale.

3. a) Se verifică direct că f nu are rădăcini în $\left\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$.

b) $C = 2$, $R = -1$.

c) $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=2g\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)-1=2\left(4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}\right)-1=2\cos\frac{\pi}{3}-1=0$.

d) Se deduce din a) și c).

e) Dacă $h \equiv 0$ concluzia este evidentă, iar dacă $h \not\equiv 0$, arătăm că grad$h \geqslant 3$. Într-adevăr dacă grad$h = 1$ rezultă $\cos\frac{\pi}{9}\in\mathbb{Q}$, contradicție; dacă grad$h = 2$, din teorema împărțirii cu rest rezultă $f=h\cdot c+r$ $(c, r\in\mathbb{Q}[X], \text{grad}h\leqslant 1)$, adică $0=f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=r\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$. Atunci $\cos\frac{\pi}{9}\in\mathbb{Q}$ sau $r \equiv 0$ și din d) rezultă $r \equiv 0$ și $f = h \cdot c$, adică grad $g = 1$. În concluzie f are o rădăcină rațională, contradicție.
Deci grad$h \geqslant 3$ și din teorema împărțirii cu rest rezultă $h = f \cdot q + s$ cu $q, s \in \mathbb{Q}[X]$, grad$s \leqslant 2$, adică $0=f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=s\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=0$. Obținem $s\equiv 0$, de unde $h \,\vdots\, f$.

4. a) $f(-2) = 6$, $f(2) = -2$, deci $f(-2) \cdot f(2) = -12$.

b) Dacă polinomul f ar avea rădăcina $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ cu $(p, q) = 1$, atunci $p \mid 2$ și $q \mid 1$, de unde rezultă că $r \in \{\pm1, \pm2\}$.
Cum $r \in \{\pm1, \pm2\}$ nu sunt rădăcini, rezultă că polinomul f nu are rădăcini raționale.

c) Cum $f(-\infty) = -\infty$, $f(-2) = 6$, $f(1) = -2$ și $f(\infty) = \infty$, polinomul f va avea trei rădăcini reale.

d) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

e) Scriem că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcini ale polinomului $f: x_1^3-6x_1+2=0$; $x_2^3-6x_2+2=0$ și $x_3^3-6x_3+2=0$.
Înmulțind relațiile anterioare cu x_1^k, x_2^k respectiv x_3^k și adunându-le, obținem $S_{k+3} - 6S_{k+1} + 2S_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

f) Cum $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 12$, relația $S_n \in \mathbb{Z}$ va fi adevărată $\forall n \in \mathbb{N}$.
Într-adevăr, verficarea fiind făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Din relația anterioară, avem $S_{n+1} = 6S_{n-1} - 2S_{n-2} \in \mathbb{Z}$, ceea ce trebuia arătat.

5. a) Conform relațiilor lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

b) $f(1) \cdot f(-1) = -1 \cdot 9 = -9$. **c)** Fie $\frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui f, $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Atunci din $q \mid 1$ și $p \mid 3$ rezultă $q \in \{\pm1\}$, $p \in \{\pm3, \pm1\}$, deci singurele rădăcini raționale posibile ar fi ±1, ±3. Acestea nu sunt rădăcini pentru f, deci f nu are rădăcini raționale.

d) x_i rădăcină pentru f implică $x_i^4=5x_i-3, \forall i=\overline{1,4}$. Atunci $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=5(x_1+x_2+x_3+x_4)-12=-12$.

e) Presupunem că $f\left(\frac{p}{q}\right)=k\in\mathbb{Z}$ unde $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$. Considerăm polinomul $g=f-k$, deci $g\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)-k=0$.
Rezultă că $\frac{p}{q}$ este rădăcină a lui g, deci $q \mid 1$, de unde $q \in \{\pm1\}$. În concluzie $\frac{p}{q}=\pm p\in\mathbb{Z}$, fals. Prin urmare, $f\left(\frac{p}{q}\right)=k\in\mathbb{Z}$ nu are soluție, deci $\{x\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z} \mid f(x)\in\mathbb{Z}\}$ este vidă.

f) Conform raționamentului de la exercițiul e) putem spune că, dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $f(r) \in \mathbb{Z}$, atunci $r \in \mathbb{Z}$.
Observăm că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, $f(k)$ este impar. Dacă $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, atunci $f(r) \notin \mathbb{Z}$. Dacă $r \in \mathbb{Z}$, atunci $f(r)$

este impar. Deoarece $f(1) = -1$ și f continuă, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ implică $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Im}(f)$, adică $\mathrm{Im}(f)$ conține o infinitate de numere pare. Cum acestea nu pot fi atinse decât în puncte iraționale, rezultă că mulțimea $\{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \mid f(x) \in \mathbb{N}\}$, este infinită.

6. a) $f(x) = (x-1)(x-2)\,q(x) + r$, rezultă $f(1) = f(2)$, deci $a = -4$;

b) $x_1x_2x_3 = 6$; $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$, deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2a$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3 - x_1^2 + ax_1 - 6 = 0 \\ x_2^3 - x_2^2 + ax_2 - 6 = 0 \\ x_3^3 - x_3^2 + ax_3 - 6 = 0 \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 1 + 2a + a - 18 = 0, \text{ de unde } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 19 - 3a;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^4 - x_1^3 + ax_1^2 - 6x_1 = 0 \\ x_2^4 - x_2^3 + ax_2^2 - 6x_2 = 0 \\ x_3^4 - x_3^3 + ax_3^2 - 6x_3 = 0 \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 19 + 3a + a - 2a^2 - 6 = 0, \text{ de unde}$$

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2a^2 - 4a + 25$. Înlocuind în relație obținem $2a^2 - 4a + 25 - 1 + 2a = 24$, adică $a^2 = a$, de unde $a \in \{0, 1\}$.

c) Rădăcinile raționale se găsesc printre divizorii termenului liber (presupunând că ele există). Dar nici un divizor nu este soluție, așadar f nu are rădăcini raționale.

d) Se efectuează calculele.

e) Determinantul matricei asociate sistemului este egal cu $5(m^3 - m^2 - 6)$ și, conform punctului c), este nenul pentru $m \in \mathbb{Q}$. Soluția sistemului este $(0, 0, 0)$.

7. a) $f(0) = 25$.

b) Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

c) Rezolvând ecuația $x^2 + 5x + 5 = 0$, obținem două soluții reale. Deci polinomul f are 4 rădăcini reale.

d) Produsul $x_1 \ldots x_4$ este egal cu 25.

e) Suma $x_1 + \ldots + x_4$ este egală cu -10.

8. a) Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

b) Polinomul f nu are rădăcini reale.

c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0$.

d) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8 = 1$.

e) Din **a)**, $(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1) \mid f$, deci restul este egal cu 0.

9. a) Cum $x_1, x_2 \in \{2, 3\}$, rezultă că soluțiile sunt reale și strict pozitive. Două soluții.

b) Vom rezolva ecuația $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Notăm $x^2 = t$ și obținem $t^2 - 5t + 6 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = 2$ și $t_2 = 3$. Deci rădăcinile ecuației inițiale sunt: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \sqrt{3}$; $x_4 = -\sqrt{3}$. Prin urmare, f are patru rădăcini reale.

c) Fie $\frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui f; atunci $q \mid 1$ și $p \mid 6$, deci $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Se observă ușor că acestea nu sunt rădăcini, deci f nu are rădăcini raționale.

d) Utilizând relațiile lui Viète, avem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

e) Dacă x_1 este rădăcină a lui f, atunci $-x_1$ este rădăcină a lui f. Exponenții la care apar rădăcinile în sumă fiind impari, rezultă că $x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005} = 0 \in \mathbb{N}$.

10. a) $f(-1) + f(1) = 6$.

b) Dacă f are rădăcina rațională $r = \frac{p}{q}$ cu $(p, q) = 1$, atunci $p \mid 1$ și $q \mid 1$, deci $r \in \{\pm 1\}$. Dar 1 și -1 nu sunt rădăcini pentru f, deci polinomul f nu are rădăcini raționale.

c) $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$. Deci expresia este egală cu 0.

d) Suma este 0.

e) Produsul este 1.

11. a) $y_1 + y_2 = -1$, conform relațiilor lui Viète.

b) $f = g(X^3 + 1)$.

c) $(X - 1)f = (X - 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = X^6 - 1$.

d) Conform relațiilor lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1$.

e) $f(y_1) = g(y_1)(y_1^3 + 1) = 0$, deci $f(y_1)f(y_2) = 0$.

13. a) $f(-1)=0$.

b) Conform teoremei restului, dacă $f(-1)=0$, atunci restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 0.

c) f are o rădăcină reală și două complexe, deci probabilitatea este $\frac{1}{3}$. **d)** $x_1 + x_2 + x_3 = -1$.

e) x_1 este rădăcină a lui f, $x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1 = 0$, de unde $x_1^4 + x_1^3 + x_1^2 + x_1 = 0$. Analog obținem $x_2^4 + x_2^3 + x_2^2 + x_2 = 0$ și $x_3^4 + x_3^3 + x_3^2 + x_3 = 0$. Adunând ultimele trei relații vom avea: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)$. Calculând parantezele din membrul drept obținem: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3$.

14. a) Restul împărțirii este 0.

b) Cum $x_1^3 = 8$, rezultă că $|x_1| = 2$. **c)** $x_1^6 = 8^2 = 64$.

d) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 = 16$. **e)** $S_1 = x_1 + x_2 = -2$, $S_1 + S_3 = 14$.

Primitive

1. a) $f'(x) = 3x^2 + 1$. **b)** $\int f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x\right)$. **c)** $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x$. **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x\cdot(3x^2+1)}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^3+3x}{x^4} = 0$.

2. a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$. **b)** $\int f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x\right)$. **c)** $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + 1 = 0$, $\Delta < 0$, deci $f'(x) = 0$ nu are soluții reale; rezultă f nu are nici un punct de extrem local. **d)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)+3}{x-1} = f'(1) = 2$.

Integrala definită

1 a) $f_0(x) = x$.

b) $f_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} \cdot t'dt = \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}}\Big|_0^x + 2(n-1)\int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^n}dt = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)f_{n-1}(x) - 2(n-1)f_n(x)$.

c) Din b) rezultă $f_n(x) = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} f_{n-1}(x)$ și cu $x \to \infty$ se obține c).

d) Din c) rezultă $I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} = \ldots = \frac{(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)\ldots 4\cdot 2} I_1 = \frac{(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

e) Verificarea imediată; presupunând $P(k)$ adevărat obținem $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$ și se arată că $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$, de unde concluzia.

f) Din d) și e) rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} I_n=0$, deci membrul stâng al egalității din f) este 0; limita din membrul drept este egală cu ∞.

g) De exemplu: $f_n(t)=e^{-nt}$; $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ambii membri ai egalității de demonstrat vor fi egali în urma efectuării calculelor.

2. a) $\frac{\pi}{2}$. **b)** $\frac{\sin nx}{n}+C$.

c) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cdot\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx=\frac{\cos^n x\sin nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin nx\sin x dx$.

d) Se aplică formula $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

e) $2I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^n x\cos nx+\cos^{n-1}x\sin nx\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos(n-1)xdx=I_{n-1}$

f) Din e) rezultă $I_n=\frac{I_{n-1}}{2^1}=\frac{I_{n-2}}{2^2}=\ldots=\frac{I_0}{2^n}=\frac{\pi}{2^{n+1}}\xrightarrow{n\to\infty}0$; pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^n x\cos nx)=0$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx=0$; egalitatea e demonstrată. **g)** De exemplu $f_n(x)=ne^{-nx}$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, continue, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1=g(x)$, $g:(0,1)\to\mathbb{R}$ continuă și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-nx}dx=\lim\limits_{n\to\infty}(1-e^{-n})=1$; $\int_0^1\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=\int_0^1 0dx=0$.

3. a) Se obține prin calcul direct.

x	$-\infty$ 1 ∞
$x-1$	$-$ 0 $+$
$x^{2005}-1$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+$ 2005 $+$

b) $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x(e^t-t-1)dt=\left(e^t-\frac{t^2}{2}-t\right)\Big|_0^x=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1.$

c) Cum verificarea este făcută, să arătăm că $P_n\to P_{n+1}$.

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt=\int_0^x\left(e^t-1-\frac{t}{1!}-\ldots-\frac{t^n}{n!}\right)dt=\left(e^t-t-\frac{t^2}{2!}-\ldots-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)\Big|_0^x=e^x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) Să observăm că $f_0(x)=e^x-1\geqslant 0, \forall x\geqslant 0$. $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt\geqslant 0\Rightarrow e^x-(x+1)\geqslant 0, \forall x\geqslant 0\Leftrightarrow e^x\geqslant x+1, \forall x\geqslant 0.$

e) Arătăm prin inducție că $f_n(x)\geqslant 0$, $\forall x\geqslant 0$. Cum verificarea a fost făcută la punctul d), arătăm că $P_n\Rightarrow P_{n+1}$. $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt\geqslant 0$, deoarece $f_n(x)\geqslant 0$, $\forall x\geqslant 0$.

f) Pentru $x=0$ inegalitatea este evidentă. Pentru $x>0$ avem

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+C_n^1\cdot\frac{x}{n}+C_n^2\frac{x^2}{n^2}+\ldots+C_n^k\frac{x^k}{n^k}+\ldots+C_n^n\frac{x^n}{n^n}=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{x^2}{n^2}+$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{x^k}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots\cdot 1}{n!}\cdot\frac{x^n}{n^n}=1+\frac{x}{1!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}}_{\leqslant 1}+\frac{x^2}{2!}\cdot\underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{\leqslant 1}+$$

$$+\ldots+\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cdot\underbrace{\frac{n(n-1)\ldots 1}{n^n}}_{\leqslant 1}\leqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

g) Din inegalitatea de la punctul f) obținem $e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\leqslant e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \forall x\geqslant 0$, de unde $0\leqslant f_n(x)\leqslant e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \forall x\geqslant 0$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

4. a) $f(1) = 2005$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $f(x)=\frac{x^{2005}-1}{x-1}$, pentru $x\neq 1$. Cum $f(1) > 0$, rezultă $f(x) > 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

d) $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$, deci $F'(x) = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

e) Cum $F'(x) > 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că F este strict crescătoare, deci injectivă. Din $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$, rezultă că F este surjectivă. Deci F este bijectivă.

f) Fie $I=\int_0^a g(x)dx$. Schimbăm variabila: $g(x) = t \Rightarrow x = F(t)$. Pentru $x = 0$ avem $F(t) = 0$, deci $t = 0$ iar pentru $x = a$, avem $F(t) = a = F(1)$, adică $t = 1$. Deci

$$I=\int_0^1 tF'(t)dt=\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1(t+t^2+..+t^{2005})\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2006}=a-1+\frac{1}{2006}=a-\frac{2005}{2006}.$$

5. a) $g(0) = -1$ și $h(0) = 0$.

b) $g'(x)=2e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)-2e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$, deci

$g'(x)=2e^{-x}\frac{x^n}{n!}$; cum $h'(x)=\frac{1}{n!}f(x)=\frac{2}{n!}e^{-x}x^n$, rezultă $g'(x)=h'(x)$.

c) Considerăm funcția $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $u(x) = g(x) - h(x)$. Cum $u(0) = -1$ și $u'(x) = g'(x) - h'(x) = 0,\ \forall x \geqslant 0$, rezultă că u este constantă și deci $u(x) = -1,\ \forall x \geqslant 0$. Atunci $h(x) = g(x) + 1,\ \forall x \geqslant 0$.

d) Cum $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \geqslant 0$, rezultă că $h(x) \geqslant 0,\ \forall x \geqslant 0$, deci $g(x) \geqslant -1,\ \forall x \geqslant 0$. Cum $f'(x)=2(-e^{-x}x^n+nx^{n-1}e^{-x})=2x^{n-1}e^{-x}(n-x)$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, n]$. Deci $1+g(x)=h(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f(t)\,dt\leqslant\frac{1}{n!}\int_0^x f(x)dt=\frac{1}{n!}xf(x)=\frac{2e^{-x}x^{n+1}}{n!},\ \forall x\in[0, n]$.

e) Fie $a_n=\frac{x^{n+1}}{n!}$, cu $x > 0$. Atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}<1,\ \forall n > x$, deci șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător și cum $a_n > 0$, este și mărginit, deci convergent. Fie $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$. Atunci, trecând la limită relația $a_{n+1}=a_n\frac{x}{n+1}$, rezultă $L = L\cdot 0$, adică $L = 0$, deci $a_n \to 0$. Pentru $x = 0$, este evident că $a_n \to 0$.

f) Din inegalitățile de la d) avem $-1\leqslant 1-2e^x\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\leqslant\frac{2e^{-x}x^{n+1}}{n!}-1$, de unde rezultă $0\leqslant e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\leqslant\frac{x^{n+1}}{n!},\ \forall x\in[0, n],\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Fie $x \geqslant 0$ fixat și considerăm $n \geqslant x$ variabil.

Trecem la limită după n relațiile și obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\right)=0$ sau că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x,\ \forall x\geqslant 0.$$

6. a) Evident, folosind $0 \leqslant t \leqslant 1$, adică $0 \leqslant t^n \leqslant 1$.
b) Se obține din a) prin integrarea inegalităților.
c) Se aplică criteriul cleștelui în b).

d) $I_n(x)=\int_0^x t^{n-1}dt-\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt=\frac{x^n}{n}-I_{n-1}(x)$.

e) Se obține scriind relațiile de la d) pentru $k = 1, 2, ..., n$ și adunându-le.

f) Din **e)** rezultă $I_0(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n I_n(x)$ și $I_0(x) = \ln(1 + x)$.

7. a) $I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1 x^2dx=1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

b) $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx=x(1-x^2)^n\Big|_0^1+2n\int_0^1(1-x^2)^{n-1}\cdot x^2dx=2n\cdot\int_0^1(1-x^2)^{n-1}\cdot(x^2-1+1)dx=-2n\cdot I_n+2n\cdot I_{n-1}$.

Obținem $(1+2n)\cdot I_n=2nI_{n-1}$, de unde $I_n=\frac{2n}{1+2n}\cdot I_{n-1}, \forall n\geqslant 2, n\in\mathbb{N}^*$ (s-a folosit metoda integrării prin părți).

c) Folosind punctul b) putem scrie: $I_n=\frac{2n}{2n+1}\cdot I_{n-1}$; $I_{n-1}=\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}\cdot I_{n-2}$; ...; $I_2=\frac{4}{4+1}\cdot I_1$; $I_1=\frac{2}{3}$.

Înmulțim membru cu membru cele n egalități și obținem

$I_1\cdot I_2\cdot...\cdot I_n=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}\cdot...\cdot\frac{4}{4+1}\cdot\frac{2}{2+1}\cdot I_{n-1}\cdot I_{n-2}\cdot...\cdot I_1$, de unde $I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot...\cdot\frac{2n}{2n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) $f'(x)=\frac{1}{x}, \forall x>0$.

e) Din teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[x, x + 1]$ rezultă că $\exists\ c \in (x, x + 1)$ a.î. $\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}=\frac{1}{c}$. Cum $c \in (x, x + 1)$ avem $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ și, folosind relația anterioară, obținem $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}, \forall x>0$.
f) $0 \leqslant (1 - x^2)^n \leqslant 1, \forall\ x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant 1$.

g) $0 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1, \forall\ x \in [-1, 1] \Rightarrow (1 - x^2)^n \geqslant (1 - x^2)^{n-1}, \forall\ x \in [0, 1]$, deci I_n descrescător și mărginit, conform punctului **f)**, deci convergent.

8. a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt=e^x-1$. **b)** $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x(e^t-1)dt=e^x-1-x$.
c) Cum verificarea este făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

$f_{n+2}(x)=\int_0^x f_{n+1}(t)dt=\int_0^x\left(e^t-1-\frac{t}{1!}-\frac{t^2}{2!}-...-\frac{t^n}{n!}\right)dt=e^x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-...-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
d) Cum $\lim_{x\to-\infty} f_0(x)=0$, rezultă că $y = 0$ este ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.

e) Demonstrăm prin inducție matematică; pentru $n = 1$ este evident. Apoi, din $0<f_n(t)\leqslant e^t\frac{t^n}{n!}, \forall t>0$, integrând, rezultă $0<\int_0^x f_n(t)dt\leqslant\int_0^x e^t\frac{t^n}{n!}dt\leqslant\int_0^x e^x\cdot\frac{t^n}{n!}dt=e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
f) Cum $f_n'(x)=f_{n-1}(x)$ și $f_n''(x)=f_{n-2}(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, avem din **e)** că f_n este convexă pe $(0, \infty)$, $\forall\ n \geqslant 2$. Apoi

se verifică ușor că f_0 și f_1 sunt convexe pe $\mathbb{R}$.

g) Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă din e) că $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0,\ \forall x>0$. Din această egalitate, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{1!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)=e^x,\ \forall x>0$.

9. a) $f'(x)=2x-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\ln(x+1)\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{3}+\ln 2$.

c) $f''(x)=2+\dfrac{2}{(x+1)^3}$, deci există un singur punct de inflexiune.

d) $f'(1)=2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$.**e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{x^3}{3}+\ln x\right)=\dfrac{1}{3}$.

10. a) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$.

b) $|f(x)-f(y)|=2ce^{-c^2}\cdot|x-y|\leqslant|x-y|$, deoarece $2c<e^{c^2}$, $\forall c>1$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}\overset{\text{L'Hospital}}{=}f(0)=1$.

d) $g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x(t)dt$. Facem schimbarea de variabilă $t=x\cdot u$, adică $dt=x du$ și $t\in[0,x]$ și obținem $u\in[0,1]$.
Rezultă $g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot x\cdot\int_0^1 f(u\cdot x)du=\int_0^1 f(u\cdot x)du$

e) $|g(x)-g(y)|=\left|\int_0^1\big(f(tx)-f(ty)\big)dt\right|\leqslant\int_0^1|f(tx)-f(ty)|dt\leqslant|x-y|\cdot\int_0^1 tdt=\dfrac{|x-y|}{2}$. Prin inducție matematică am aplicat b). **f)** Presupunem că ar fi două soluții, a și b; atunci $|g(a)-g(b)|=|a-b|\leqslant\dfrac{|a-b|}{2}$, conform punctului e), contradicție. Deci, dacă există, soluția ecuației $g(x)=x$ e unică.

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}g(x)=f(0)=1>\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\frac{1}{t^2}dt}{x}=0$. (am folosit $e^{-x^2}=\dfrac{1}{e^{x^2}}<\dfrac{1}{x^2}$ pentru $x>1$). Din cele două limite rezultă că există x_0, cu $g(x_0)>x_0$ și există x_∞, cu $g(x_\infty)<x_\infty$, deci conform teoremei valorii intermediare, există a cu $g(a)=a$.

11. a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f'(x)=3+\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) $f'(x)=3+\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^4+6x^2+3+2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\left(3\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}(3x+1)^2+\dfrac{23}{12}\right)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) $\int_0^1 f(x)dx=3\cdot\dfrac{x^2}{2}-\operatorname{arctg}x\,\Big|_0^1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}$.

e) Cum f este strict crescătoare, rezultă că este injectivă; apoi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, arată că f este surjectivă.

f) Fie $I=\int_{-1}^{\frac{5}{2}} g(x)dx$; notăm $g(x) = t \Rightarrow x = f(t)$ și $dx = f'(t)dt$. Apoi $x = -1 \Rightarrow t = 0$ și $x=\dfrac{5}{2}\Rightarrow t=1$. Deci $I=\int_0^1 t\cdot f'(t)dt = tf(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt = 2-\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

12. a) $\ln(x+\alpha)-A\ln x=\ln\dfrac{x+\alpha}{x^A}=\ln\dfrac{x+\alpha}{x}$, deci $A = 1$.

b) $y = 0$. **c)** $f'(x)=\dfrac{\alpha}{x(x+\alpha)}$. **d)** 1.

e) $\int_{2005}^{2006} f'(x)dx = f(x)\Big|_{2005}^{2006}=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_{2005}^{2006}=\ln\left(\dfrac{2005\cdot 2007}{2006^2}\right)=\ln\dfrac{(2006-1)(2006+1)}{2006^2}=\ln\left(1-\dfrac{1}{2006^2}\right)$, deci $B = 1$.

13. a) $f'(x)=2xe^{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2}=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$.

d) $\int_0^1 f'(x)=f(x)\Big|_0^1=e-1$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}=0$.

14. a) $I_1(0)+I_2(0)+\ldots+I_{2006}(0)=0$.

b) $I_1(x)=\int_0^x I_0(t)dt=\int_0^x 2dt=2x$.

c) Vom demonstra prin inducție propoziția $P(n)$: $I_n(x)=\dfrac{2x^n}{n!}$, $\forall n\geqslant 1$.

$P(1)$: $I_1(x)=\dfrac{2x}{1!}=2x$, adevărat. Verificarea fiind făcută, vom demonstra $P(k) \to P(k+1)$.

$I_k(x)=\dfrac{2x^k}{k!}\Rightarrow\int_0^x I_k(t)dt=\int_0^x\dfrac{2t^k}{k!}dt=\dfrac{2}{k!}\int_0^x t^k dt=\dfrac{2}{k!}\cdot\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^x=\dfrac{2x^{k+1}}{(k+1)!}$, deci $P(k+1)$ adevărată, rezultă $I_n(x)=\dfrac{2x^n}{n!}$, $\forall n\geqslant 1$. Prin urmare $I_{10}(x)=\dfrac{2x^{10}}{10!}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\dfrac{(n+1)!}{2x^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n+2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)=0$.

e) Cum $I_n(x)=\dfrac{2x^n}{n!}$, $I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)=2\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)\leqslant$

$$\leqslant 2\left(2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)=2\left(2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=6-\frac{2}{n}<6.$$

Atunci $0\leqslant\frac{I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)}{n}\leqslant\frac{6}{n}$ și, aplicând criteriul „cleștelui”, rezultă că $\lim\frac{I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)}{n}=0$.

15. **a)** $f_0(\pi) = \sin\pi = 0$.

b) Dacă $x_n = 2n\pi$, atunci $f_0(x_n) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f_0(x_n)=0$. Dacă $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, atunci $f_0(y_n) = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f_0(y_n)=1$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f_0(x)$ nu există. **c)** $f_1(\pi) = \cos\pi = -1$.

d) $\int_0^{2\pi} f_1(x)dx=\int_0^{2\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{2\pi}=0$.

e) $f_0(x) = \sin x$; $f_1(x) = -\cos x$; $f_2(x) = -\sin x$; $f_3(x) = -\cos x$; $f_4(x) = \sin x$. Deci valoarea funcției se repetă din 4 în 4, rezultă $f_{10}(x) = f_2(x) = -\sin x$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)}{n}=0$ deoarece numărătorul este constant, putând lua una din valorile 0, $\cos x$, $\cos x - \sin x$, $-\sin x$. Cum numitorul tinde la ∞, rezultă fracția tinde la 0.

16. **a)** Se verifică prin calcul direct că $f(x)=x-\frac{1}{x^2-1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x-1}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x-1-x^3+x}{x^2-1}=0$. Deci asimptota oblică la graficul lui f este $y = x$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. **d)** $\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4\left(x-\frac{1}{x^2-1}\right)dx=\int_2^4 x\,dx-\int_2^4\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_2^4-\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^4 = 6-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$.

e) $f'(x)=1+\frac{2x}{(x^2-1)^2}>1\Leftrightarrow x>0$. Deci mulțimea este $(0, \infty)\setminus\{1\}$.

17. **a)** Se verifică prin calcul direct.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+\frac{1}{x^2+1}\right)=-1$.

c) $f'(x)=2x-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) $f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}(x^4+2x^2+1-1)=\frac{2x^3(x^2+2)}{(x^2+1)^2}$, rezultă că $f'(x)<0$, $\forall x<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$, rezultă că f nu admite asimptotă către ∞.

f) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2-1)dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

18. **a)** $f'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

b) $f(1)f(-1)f'(1)f'(-1) =\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{4}=-\frac{1}{16}$.

c) $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow -(1+x^2) \leqslant 2x \leqslant 1+x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$ și $(1+x)^2 \geqslant 0$.

d) Calcul direct. **e)** $\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) = 2-\operatorname{arctg} x\Big|_0^2 = 2-\operatorname{arctg} 2$. **f)** 0.

19. a) $f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$. **b)** $\int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0) = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+3} = \infty$. **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2}\cdot x} = 0$.

e) Funcția e monotonă pe $[0, \infty)$ și pe $(-\infty, 0]$, deci unica soluție este $x = 0$. **f)** 0.

Aplicații ale integralei definite

1. a) Asimptota este $y = 0$. **b)** $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = -\frac{2}{25}$.

d) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{4}$. **e)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+4} = 1$.

2. a) $f(a) = a,\ f(b) = b$.

b) $\frac{a+b-1}{2} < a$, iar funcția fiind de gradul al doilea și convexă este crescătoare pe $\left[\frac{a+b-1}{2}; +\infty\right)$.

c) Folosim continuitatea și monotonia funcției f.

d) Aria este $\int_a^b f(x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - (a+b-1)\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + abx\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^3}{6}$.

e) Evident, deoarece se observă că $\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b f^{-1}(x)dx = b^2-a^2$ și $\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^3}{6}$.

f) Evident, deoarece în acest caz $\int\limits_a^b f^{-1}(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^3}{6}$.

g) Se obține $N = n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$ care este prim doar dacă $m = 2$ și $n = 3$.

3. a) Se știe că 2π este perioada principală a funcției cos.
b) Vom folosi următorul tabel:

	$3\pi/2$		2π		3π		4π	...	12π		$25\pi/2$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	0	...	0	–	
$f(x)$	0	↗	1	↘	–1	↗	1	...		↘	

Deci, punctele de maxim local pentru f sunt: 2π, 4π, 6π, 8π, 10π și 12π. În concluzie, f are șase puncte de maxim local în intervalul $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{25\pi}{2}\right]$.

c) Aria suprafeței este $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}|f(x)|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=3$.

d) Vom demonstra și aplica următorul rezultat:

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție periodică cu $T>0$ perioadă principală, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x|f(t)|dt}{x}=\dfrac{\int_0^T|f(x)|dx}{T}$.

Se știe că $\int_0^T|f(x)|dx=\int_a^{a+T}|f(x)|dx$, $\forall\ a\in\mathbb{R}$. Fie $n_x=\left[\dfrac{x}{T}\right]$. Cum $x\to\infty$ rezultă că $n_x\to\infty$.

$$\int_0^x|f(t)|dt=\int_0^T|f(t)|dt+...+\int_{(n_x-1)T}^{n_xT}|f(t)|dt+\int_{n_xT}^x|f(t)|dt=n_x\int_0^T|f(x)|dx+\underbrace{\int_{n_xT}^x|f(t)|dt}_{R}.$$

$\dfrac{\int_0^x|f(t)|dt}{x}=\dfrac{n_x\cdot\int_0^T|f(x)|dx+R}{n_xT+r}=\dfrac{\int_0^T\left|f+\dfrac{R}{n_x}\right|}{\left|T+\dfrac{r}{n_x}\right|}\to\dfrac{\int_0^T|f(x)|dx}{T}$ deoarece R este mărginită, $r\in[0,\ T]$. În acest caz limita va fi $\dfrac{2}{\pi}$.

4. a) $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

b) $t=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=\dfrac{e-e^{-1}}{2}=\dfrac{e^2-1}{2e}$.

c) Cum $f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$, rezultă că nu are puncte de inflexiune.

d) $f'(0)=0$.

e) Cum $f'(x)=0$ are o soluție și derivata își schimbă semnul la stânga și la dreapta lui 0, avem un punct de extrem local.

5. a) Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Funcția nu este derivabilă în 3 puncte: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left|x^3-\dfrac{x}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\dfrac{x}{2}-x^3\right)dx=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{16}$.

d) $f''(x)=-6x<0$. Deci f este concavă.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot...\cdot f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$.

6. a) $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+3)\ln 2}-\dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 2}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$.

c) $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{2x^3+4x-2x^3-6x}{(x^2+2)(x^2+3)}=-\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{2x}{(x^2+2)(x^2+3)}$, deci $f'(x)>0$, $x<0$, sau $f'(x)<0$, $x>0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\ln\dfrac{x^2+3}{x^2+2}=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală.

e) Din c) și d) rezultă $0 < f(x) \leqslant \log_2 3 - 1$.

f) $\int_0^x \log_2(t^2+a^2)dt = t\log_2(t^2+a^2)dt\Big|_0^x - \frac{2}{\ln 2}\int_0^x \frac{t^2}{t^2+a^2}dt = x\log_2(x^2+a^2) -$

$-\frac{2}{\ln 2}\int_0^x \left(1-\frac{a^2}{t^2+a^2}\right)dt = x\log_2(x^2+a^2) - \frac{2x}{\ln 2} + \frac{2a}{\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

g) $\text{Aria} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \log_2(x^2+3)dx - \int_0^1 \log_2(x^2+2)dx = \log_2 4 - \frac{2}{\ln 2} + \frac{2\sqrt{3}}{\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} -$

$-\log_2 3 + \frac{2}{\ln 2} - \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \log_2 3 + \frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

7. a) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ este asimptotă la graficul funcției f către $+\infty$.

b) $f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

c) Din tabelul de variație, rezultă că $f(x) \in [0, 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci cel mai mic $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) < a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ este $a = 1$.

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$-$	|	$+$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	|	$-\infty \nearrow 1$

d) $\left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx\right| = \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\right| = \left|\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right| = \left|2-2-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\frac{x^3}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{x+1}\right) = -1$.

8. a) Se verifică relația $f(0) = f(1)$.

b) Se verifică ușor că funcția f are perioada $t = 1$.

c) $f(x) = \begin{cases} x(2-x),\ x\in[0;1) \\ 1-x^2,\ x\in[-1;0) \end{cases}$, implică $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$, deci nu există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

d) Cum $f(x) = 1 - (\{x\} - 1)^2$ și $\{x\} \in [0, 1)$, avem $0 \leqslant f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) $\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 x(2-x)dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

9. a) $f'(x) = 4x^3 - 2$. **a)** $f'(2) = 30$.

b) $f''(x) = 12x^2$, deci nu are puncte de inflexiune.

c) Un punct de extrem local: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right)$.

d) $A = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^4 - 2x)dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^2\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}$.

10. a) $f'(x) = 2x + 3$. **b)** $f'(2) = 7$. **c)** $f''(x) = 2$, deci funcția nu are puncte de inflexiune.

d) Punctul $x = -\frac{3}{2}$ este singurul punct de extrem local.

e) $\int_0^1 (x^2 + 3x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{17}{6}$.

11. a) $f'(x) = 2x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(1) = 2$. **c)** $f''(x) = 2$, deci f nu are puncte de inflexiune.

d) Cum $f'(x) = 0$ are soluția $x = 0$, funcția are un punct de extrem local: $(0, 1)$.

e) $\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

12. a) $f'(x) = 2x + 1$.

b) $f'(x) > 0,\ \forall x > -\frac{1}{2}$.

c) $f(0) + f(1) + \ldots + f(n) = \sum_{k=0}^{n}(k^2+k+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{3}$.

d) Din c) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(0)+f(1)+\ldots+f(n)}{n^3} = \frac{1}{3}$.

e) $A = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2+x+1) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$

13. a) Se verifică prin calcul direct că $f(x) - \frac{1}{3(x-2)} + \frac{1}{3(x+1)} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty$, deci $x = -1$ și $x = 2$ sunt asimptote verticale la graficul lui f. Rezultă că f admite două asimptote verticale.

c) $\int_3^4 f(x)dx = \frac{1}{3}\int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\frac{x-2}{x+1}\Big|_3^4 = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{2}{5} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln 4 - \ln\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} = \ln\frac{2}{5}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(3) + f(4) + \ldots + f(n)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{n+1}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{11}{18}$

14. a) Se verifică prin calcul direct că $f(x) - 2 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0,\ \forall x \in [0, \infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, deci $y = 2$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f. **c)** $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$.

d) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = 2x\Big|_0^1 - \ln(x+1)\Big|_0^1 - \ln(x+2)\Big|_0^1 = 2 - \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2 - \ln 3$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}(2x - \ln(x+1) - \ln(x+2) + \ln 2) = 2$.

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathscr{C},\ \alpha \neq -1$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + \mathscr{C},\ a \in \mathbb{R}_{+}^{*} \setminus \{1\}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \mathscr{C}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathscr{C},\ a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathscr{C},\ a \neq 0$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathscr{C}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + \mathscr{C}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \mathscr{C}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + \mathscr{C}$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + \mathscr{C}$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = -\ln|\sin x| + \mathscr{C}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathscr{C},\ a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \mathscr{C}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathscr{C},\ a > 0$$