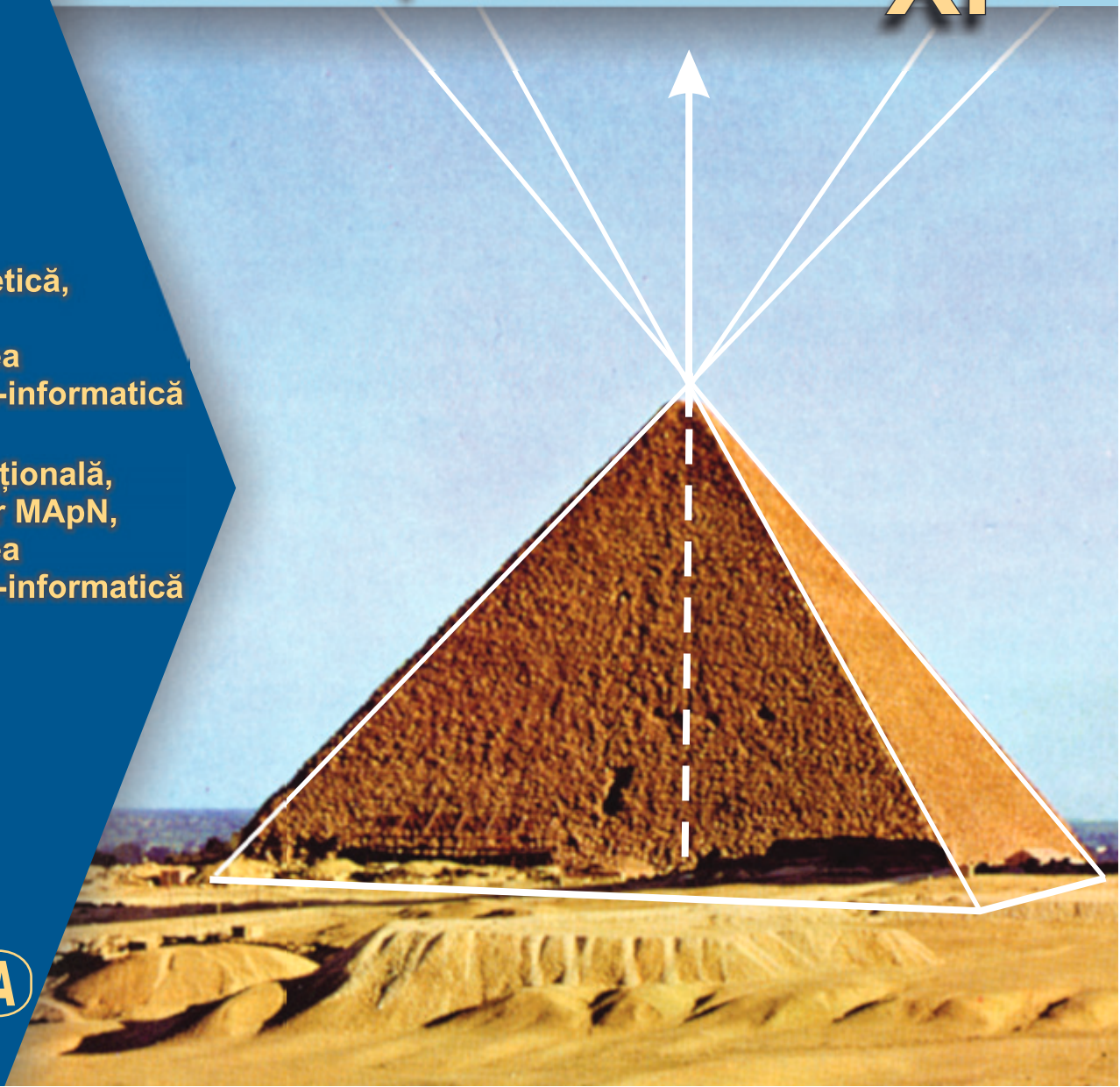
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Gabriela Streinu-Cercel
Gabriela Constantinescu
Gabriela Oprea
Manuela Prajea
Gheorghe Stoianovici
Boris Singer
Costel Chiteş
Ioan Marinescu
Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a



M1

- Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică
- Filiera vocațională, profil militar MApN, specializarea matematică-informatică

SIGMA

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Gabriela Streinu-Cercel Gabriela Constantinescu Gabriela Oprea Manuela Prajea
Boris Singer Gheorghe Stoianovici Costel Chiteș Ioan Marinescu Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M1

• Filiera teoretică, profil real,
specializarea matematică-informatică

• Filiera vocațională, profil militar MApN,
specializarea matematică-informatică

SIGMA

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Culturii nr. 4742 din 21.07.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Referenți: *lector univ. dr.* Cristian Voica
prof. dr. gr. I Căiniceanu Gheorghe

Redactor: Corina Cîrtoaje
Tehnoredactor: Camelia Cristea, Andrei Cîrtoaje
Coperta: Camelia Cristea, Ion Tilea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică M1 : manual pentru clasa a XI-a / Gabriela Streinu-Cercel, Gabriela Constantinescu, Gabriela Oprea, ... - București : Sigma, 2006
ISBN (10) 973-649-264-8 ; ISBN (13) 978-973-649-264-8

I. Streinu-Cercel, Gabriela
II. Constantinescu, Gabriela
III. Oprea, Gabriela

51(075.35)

© 2006 – Editura SIGMA
Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii SIGMA.
Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii SIGMA.

ISBN (10) 973-649-264-8
ISBN (13) 978-973-649-264-8

Editura SIGMA

Sediul central:
Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Distribuție:
Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Anticariat:
e-mail: comenzi_anticar@editurasigma.ro; web: www.anticar.ro

Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare

1. Permutări

Cu elementele unei mulțimi finite se pot forma mai multe permutări. De exemplu, (2, 3, 5, 4, 1), (2, 1, 3, 4, 5), (3, 4, 2, 1, 5) sunt permutări ale mulțimii {1, 2, 3, 4, 5}.

Cu elementele mulțimii {☾, ☼, ❀} putem forma 6 permutări diferite:

(☾, ☼, ❀), (☾, ❀, ☼), (☼, ☾, ❀), (☼, ❀, ☾), (❀, ☼, ☾), (❀, ☾, ☼).

Reprezentarea ☾ ☼ ❀ nu este o permutare deoarece nu este dată ordinea elementelor. Într-o permutare cu n elemente, fiecare element trebuie să ocupe o anumită poziție numerotată de la 1 la n.

Noțiunea de permutare

În cele ce urmează ne vom ocupa de permutările mulțimii finite de numere naturale $A = \{1, 2, ..., n\}$.

Fie $\varphi : A \to A$ o bijecție a mulțimii A și notăm $\varphi(1) = i_1$, $\varphi(2) = i_2$, ..., $\varphi(n) = i_n$. Funcția φ poate fi reprezentată printr-un tablou cu două linii:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix};$$

prima linie indică poziția k pe care se află elementul i_k din linia a doua, sau, cu alte cuvinte, locul ocupat de elementul i_k în șirul finit $(i_1, i_2, ..., i_n)$.

Definiție.

Fie mulțimea $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \to A$ se numește *permutare de gradul n*. Mulțimea tuturor permutărilor de gradul n se notează cu S_n. Permutările din S_n le vom nota cu litere grecești: φ, σ, τ, ... (citim: fi, sigma, tau, ...)

O permutare $\sigma \in S_n$ poate fi notată prin:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

sau

$(i_1\, i_2 \dots i_n)$, unde $i_1 = \sigma(1)$, $i_2 = \sigma(2)$, ..., $i_n = \sigma(n)$.

1) În câte moduri se pot clasa 4 elevi care participă la un concurs sportiv, dacă nu sunt 2 elevi pe același loc în clasament?

2) Care dintre următoarele tablouri reprezintă permutări?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3) Scrie toate permutările din S_3.

Observații.

♦ O permutare σ este o funcție bijectivă și, ca urmare, toate elementele $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(n)$ sunt distincte și aparțin mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$. În clasa a X-a s-a demonstrat că numărul de funcții bijective definite pe o mulțime dată, cu n elemente, cu valori în aceeași mulțime, este $n!$ (citim: n factorial).

♦ S_n, mulțimea permutărilor de grad n, are $n!$ elemente.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$$

Compunerea permutărilor. Proprietăți

Definiție.

Fie $\sigma, \tau \in S_n$ două permutări de ordinul n. Permutarea $\sigma \circ \tau$ este definită prin relația $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$, $\forall k = \overline{1, n}$ și se numește *produsul* (sau *compunerea*) *permutărilor* σ, τ (în această ordine).

Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}$,

atunci $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & ... & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$.

Produsul $\sigma \circ \tau$ se mai notează $\sigma\tau$.

Notăm: $\sigma \circ \sigma = \sigma\sigma = \sigma^2$; $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$; $\sigma^4 = \sigma^3\sigma, ..., \sigma^{n+1} = \sigma^n\sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nu are sens să vorbim despre produsul a două permutări de ordin diferit (ele fiind definite pe mulțimi diferite).

EXEMPLU

Să considerăm permutările de gradul al 4-lea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Produsul $\sigma \circ \tau$ este permutarea

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

$$\sigma^2 = \sigma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \sigma^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Proprietățile înmulțirii (compunerii) permutărilor rezultă din proprietățile compunerii funcțiilor bijective.

4) Completează permutările:

a) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & ? \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & ? & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & ? \end{pmatrix}$.

5) Câte elemente au mulțimile de permutări S_1, S_2 și S_5?

6) Scrie toate permutările σ din S_4 pentru care $\sigma(2) = 3$ și $\sigma(3) = 4$.

7) Fie permutările de gradul al 3-lea

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determină $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, σ^3, σ^4, σ^5, σ^6.

b) Determină $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = e$,

unde $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8) Care egalitate este adevărată?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9) Fie permutările:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculează: $\sigma\tau$, $\tau\varphi$, $\sigma\varphi$, $\varphi\sigma$, $\varphi\tau$, $(\sigma\tau)\varphi$, $\sigma(\tau\varphi)$, $\sigma(\tau\sigma)$, $\sigma^2\tau$, $\sigma\tau^2$.

10) Fie permutarea $\sigma \in S_4$,

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determină:

a) σ^2, $\sigma^2\sigma$, $\sigma\sigma^2$;

b) σ^3, $\sigma^3\sigma$, $\sigma\sigma^3$.

Teoremă.

1) Înmulțirea permutărilor este *asociativă*:
$\forall \sigma, \tau, \theta \in S_n$, $\sigma(\tau\theta) = (\sigma\tau)\theta$

2) Permutarea $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, numită *permutare identică de gradul n*, este elementul neutru pentru înmulțirea permutărilor:

$$\forall \sigma \in S_n,\ e\sigma = \sigma e = \sigma.$$

3) Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există permutarea notată σ^{-1}, numită *inversa permutării* σ, cu $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Observații.

♦ Compunerea permutărilor nu este comutativă. Mai precis, oricare ar fi $n \geqslant 3$, există φ, σ permutări de gradul n cu $\varphi\sigma \neq \sigma\varphi$.

♦ $\sigma^0 = e$; $\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n, \forall n \in \mathbb{N}$;
se poate arăta că $\sigma^a\sigma^b = \sigma^{a+b}$ și $(\sigma^a)^b = \sigma^{ab}, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

♦ Inversa unei permutări $\sigma : A \to A$ este chiar funcția inversă $\sigma^{-1} : A \to A$ asociată funcției bijective σ.

EXEMPLU

1) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; atunci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Verificare:

$$\sigma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să calculăm σ^2, σ^3, σ^4, σ^5.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e,$$

de unde $\sigma^3 = \sigma^{-1}$, $\sigma^5 = \sigma$, deoarece $\sigma^3 \cdot \sigma = e$ și
$\sigma^5 = \sigma^4 \cdot \sigma = e \cdot \sigma = \sigma$.

2) Să rezolvăm ecuația $\sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție.

$$\sigma = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Fie permutările $\sigma, \tau, \theta \in S_3$:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Determină:
a) $\sigma\tau$; $(\sigma\tau)\theta$; $(\theta\tau)\sigma$
b) $\tau\sigma$; $\sigma(\tau\theta)$; $\theta(\tau\sigma)$
Ce observi?

Arată că $\sigma^2\tau^2 \neq (\sigma\tau)^2$.

12) Fie σ, τ, φ permutări din S_n.
Arată că:
$\sigma\tau = \tau\sigma \Leftrightarrow \sigma^2\tau^2 = (\sigma\tau)^2$;
$\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$;
$\tau\sigma = \varphi\sigma \Leftrightarrow \tau = \varphi$.

13) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$.

Determină $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = \sigma^{-1}$.

14) Notăm permutările de gradul al 3-lea cu:

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Completează tabelul de mai jos, punând în fiecare pătrățel pe linia i și coloana j produsul $\sigma_i\sigma_j$:

	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
e				σ_3		
σ_1						
σ_2						
σ_3					σ_2	
σ_4	σ_4					
σ_5						

Inversiuni, semnul unei permutări

Definiție. Fie σ o permutare de grad n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Perechea ordonată (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ se numește *inversiune a permutării* σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Notăm cu $m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ.

Observăm că, într-o permutare $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, inversiunea (i, j), $i < j$ este o pereche de elemente din prima linie pentru care în linia a doua avem $\sigma(i) > \sigma(j)$.

EXEMPLU

Permutarea de gradul al 3-lea, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 < 2 & 3 \\ 3 > 1 & 2 \end{pmatrix}$, are inversiunile (1, 2) și (1, 3). Perechea (2, 3) nu este inversiune a permutării σ, deci permutarea σ are două inversiuni ($m(\sigma) = 2$).

Observații.

♦ Permutarea identică e are 0 inversiuni, deci $m(e) = 0$. Reciproc, dacă $m(\sigma) = 0$, atunci σ este permutarea identică.

♦ Permutarea $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ cu $\sigma(k) = n - k + 1$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ are numărul maxim de inversiuni posibile deoarece toate perechile (i, j), $i < j$ sunt inversiuni pentru σ. Ca urmare, $m(\sigma) = \dfrac{n(n-1)}{2} = C_n^2$ este numărul tuturor submulțimilor de două elemente dintr-o mulțime de n elemente. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ avem $0 \leqslant m(\sigma) \leqslant C_n^2$.

Definiție. Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *semnul* (signatura) *permutării* σ, unde $\sigma \in S_n$.

Semnul unei permutări este +1 sau –1 și $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ este funcție.

Definiție. Permutarea $\sigma \in S_n$ este *pară*, respectiv *impară*, dacă are un număr par, respectiv impar de inversiuni, adică $\varepsilon(\sigma) = +1$, respectiv $\varepsilon(\sigma) = -1$.

EXEMPLU

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. În linia a doua numărăm de câte ori fiecare element este mai mare decât unul dintre succesorii săi. După primul element, 4, urmează elementele mai mici 3, 2, 1 ; după 5 urmează tot trei elemente mai mici; după 3 urmează două elemente mai mici, 2 și 1, iar după 2 urmează un singur element mai mic, 1. În concluzie, numărul de inversiuni ale acestei permutări este $m(\sigma) = 3 + 3 + 2 + 1 = 9$, deci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^9 = -1$. Permutarea σ este o permutare impară.

15) Scrie toate inversiunile permutării $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

16) Fie permutarea de ordinul al 7-lea, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Care dintre următoarele perechi sunt inversiuni ale permutării σ ?
(1 2), (1 4), (1 6), (2 4), (3 7), (6 7), (2 3), (3 5).

17) Scrie toate inversiunile permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

18) Scrie toate inversiunile permutărilor

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Câte inversiuni au permutările σ, τ, φ?

19) Determină numărul inversiunilor permutărilor σ, $\tau \in S_5$:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

20) Determină semnul permutărilor σ, $\tau \in S_5$:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrie toate inversiunile permutărilor:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Câte inversiuni au fiecare din permutările σ, τ, φ?

2. Fie permutarea $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Determină: a) σ^2, $\sigma^2\sigma$, $\sigma\sigma^2$; b) σ^3, $\sigma^3\sigma$, $\sigma\sigma^3$.

3. Fie permutările de gradul al 2-lea: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Completează tabelul alăturat, punând în fiecare pătrățel compunerea dintre permutarea indicată de linie și cea indicată de coloană.

	e	σ
e		
σ		

Realizează un astfel de tabel pentru permutările de gradul al 4-lea.

4. Calculează permutările φ, σ, τ, dacă:

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\tau\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Pentru fiecare $\sigma \in S_3$, determină: $\min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k = e\}$.

6. Arată că pentru orice $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$.

7. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Determină permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma $S_\sigma = \sum_{k=1}^{n} a_k a_{\sigma(k)}$ este:

a) minimă; b) maximă.

8. a) Arată că, pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, semnul permutării σ este $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

b) $\forall \sigma, \tau \in S_n, \varepsilon(\sigma \cdot \tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.

9. Fie $n \geqslant 2$, $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Permutarea τ_{ij} din S_n, $\tau_{ij}(k) = \begin{cases} k, \text{ pentru } k \neq i, k \neq j \\ j, \text{ pentru } k = i \\ i, \text{ pentru } k = j \end{cases}$

se numește *transpoziție* (se mai notează și $(i\ j)$).

Calculează numărul de inversiuni ale următoarelor transpoziții din S_6:
$(1\ 2)$, $(2\ 4)$, $(1\ 5)$, $(1\ 6)$, $(3\ 6)$.

10. Ce transpoziții de ordinul 4 nu se află în mulțimea: $\{(1\ 2); (1\ 3); (2\ 3); (2\ 4); (3\ 4)\}$?

Care sunt transpozițiile de ordinul al 5-lea?

11. Fie $(i\ j) \in S_n$ o transpoziție de ordinul n. Arată că $(i\ j)^2 = e$, adică orice transpoziție este propria sa inversă.

12. Compune permutările:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $(1\ 2)$;

b) $(1\ 2)$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $(5\ 7)$;

d) $(5\ 7)$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ce observi?

13. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculează $(1\ 2)\sigma$.
b) Calculează $(2\ 4)(1\ 2)\sigma$.
c) Calculează $(3\ 7)(2\ 4)(1\ 2)\sigma$.
d) Calculează $(4\ 6)(3\ 7)(2\ 4)(1\ 2)\sigma$. Ce obții?
e) Scrie σ sub forma unui produs de transpoziții.

14. Demonstrează că orice permutare de ordinul n se descompune în produsul a cel mult n transpoziții.

15. Arată că orice transpoziție este impară.

16. Calculează permutările $\sigma, \tau \in S_5$, dacă: $\sigma(1\ 3)(2\ 3)(4\ 5) = e$, $(1\ 3)(2\ 3)(4\ 5)\tau = e$.

17. Află permutarea $\tau \in S_n$, în fiecare din cazurile:

a) $\tau(1) + 1 = \tau(2) + 2 = \ldots = \tau(n) + n$;

b) $\tau(1) - 1 = \tau(2) - 2 = \ldots = \tau(n) - n$;

c) $\frac{\tau(1)}{1} = \frac{\tau(2)}{2} = \ldots = \frac{\tau(n)}{n}$.

Matrice

2. Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice. Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea unei matrice cu scalar

Tabel de tip matricial

O companie de tranzacții financiare oferă la vânzare pachete de câte 1000 de acțiuni la 4 întreprinderi, A, B, C, D. Directorul companiei alcătuiește tabelul alăturat, cu numărul de pachete de acțiuni din fiecare fel vândute în fiecare zi a unei anumite săptămâni de lucru.

	L	Ma	Mi	J	V
A	29	34	32	26	35
B	20	21	25	30	19
C	25	26	32	31	26
D	24	26	31	30	27

Dacă se cunosc semnificațiile liniilor și coloanelor pentru acțiunile A, B, C, D, respectiv zilele săptămânii de lucru L, Ma, Mi, J, V, atunci tabelul „centralizator” se poate reduce la forma alăturată.

$$\begin{pmatrix} 29 & 34 & 32 & 26 & 35 \\ 20 & 21 & 25 & 30 & 19 \\ 25 & 26 & 32 & 31 & 26 \\ 24 & 26 & 31 & 30 & 27 \end{pmatrix}$$

Acest tablou cu 4 linii și 5 coloane este o matrice formată din $4 \cdot 5 = 20$ de numere reale. Fiecare număr poate fi precizat cu ajutorul a doi indici; primul indice este indicele de linie, iar al doilea este indicele de coloană. De exemplu, numărul 27 se găsește pe linia a patra și coloana a cincea, se notează a_{45} și reprezintă în acest caz numărul de pachete din acțiunea D vândute vineri.

Noțiunea de matrice a intervenit în studiul sistemelor de ecuații liniare. Ea a fost introdusă de matematicianul englez Arthur Cayley (1821-1895) în 1858. El a folosit pentru matrice notația $\|a_{ij}\|_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. În 1913, C.E. Cullis propune notația $\left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, iar în 1919, la sugestia lui M. Bôcher, s-a introdus notația $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Vom utiliza noțiunea de matrice, în studiul sistemelor de ecuații liniare.

De exemplu, să considerăm următorul sistem: $\begin{cases} x+3y+2z=6 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$. Toți coeficienții care apar în scrierea sistemului intervin în rezolvare, atât prin valoarea lor cât și prin poziția pe care o ocupă. Nu este același lucru dacă un anumit coeficient apare în fața unei necunoscute sau a alteia. Pentru a pune în evidență mulțimea coeficienților, precum și poziția pe care o ocupă fiecare coeficient, vom atașa sistemului matricele următoare: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

În clasele anterioare s-au rezolvat sisteme cu două sau trei ecuații și necunoscute ($m = n = 2$ sau $m = n = 3$), prin metoda reducerii sau metoda substituției.

Rezolvă sistemul: $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

Metoda reducerii

$\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Big| \cdot 3$

$\begin{cases} x+3y=4 \\ 6x-3y=3 \end{cases}$

$7x = 7$, $x = 1$

$1 + 3y = 4$, $3y = 3$, $y = 1$.

Obținem $x = 1$, $y = 1$.

Metoda substituției

$\begin{cases} x=4-3y \\ 2(4-3y)-y=1 \end{cases}$

Ultima ecuație devine:

$8 - 6y - y = 1$

$7 - 7y = 0$

$y = 1$, $x = 4 - 3y = 4 - 3 = 1$

Obținem $x = 1$, $y = 1$.

1) Un magazin oferă la vânzare foarte multe tipuri de mărfuri. Se poate descrie situația stocurilor magazinului printr-un singur număr, care va reprezenta valoarea totală a mărfii. Cum putem să organizăm informația despre stoc, astfel încât să putem ști câte obiecte sunt de fiecare fel și cât costă fiecare obiect?

2) Rezolvă prin metoda substituției și, apoi, prin metoda reducerii sistemele:

a) $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ 3x-2y+z=2 \\ 7x-y-z=2 \end{cases}$.

Definiție.

Fie S un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Numerele a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numesc *coeficienții necunoscutelor* x_j, $j = \overline{1, n}$, iar numerele b_i, $i = \overline{1, m}$ se numesc *termeni liberi*.

Există metode generale de rezolvare care conduc la operații aplicate coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi. Aceștia pot fi „grupați" în următoarele *matrice*:

matricea sistemului

matricea completă a sistemului

matricea termenilor liberi

matricea necunoscutelor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matrice, mulțimi de matrice

Definiție.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și fie E o mulțime de numere ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Se numește *matrice de tipul (m, n) cu elemente din* E, o funcție $A: \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to$ E; notăm $A(i, j) = a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Notăm $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, sau $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Mulțimea tuturor matricelor de tip (m,n) cu elementele din mulțimea E se notează prin $\mathcal{M}_{m,n}$(E).

Observație.

Matricele sunt o generalizare a vectorilor; vectorii sunt matrice cu o linie (matrice linie), sau cu o coloană (matrice coloană).

Definiție.

Matricea pătratică de ordinul n, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, este o matrice cu n linii și n coloane.

Matricea linie $(a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn})$ este *diagonala principală*, iar matricea $(a_{1n}\ a_{2(n-1)}\ \ldots\ a_{n1})$ este *diagonala secundară* a matricei A.

Mulțimea tuturor matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din mulțimea E se notează prin $\mathcal{M}_n$(E).

3) Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2x + 3y = \pi \\ \pi x - y + 2z = e \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Scrie matricea sistemului, matricea completă a sistemului, matricea termenilor liberi și matricea necunoscutelor. Din ce mulțimi de matrice fac parte aceste matrice?

Atenție! Atunci când o necunoscută nu apare într-o ecuație, înseamnă că ea are coeficientul 0. De exemplu, în prima ecuație a acestui sistem necunoscuta z are coeficientul 0.

4) Fie sistemul $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3y - \frac{1}{2}z = 1 \\ 2z - t = 2 \\ t + x = 4 \end{cases}$.

Scrie matricea sistemului, matricea completă a sistemului, matricea termenilor liberi și matricea necunoscutelor. Din ce mulțimi de matrice fac parte aceste matrice?

5) Scrie o matrice pătratică de ordinul 5 cu elementele 0 și 1, astfel încât suma elementelor pe fiecare linie și, respectiv, pe fiecare coloană să fie 1.

6) Cum poți prezenta distanțele (în km) dintre reședințele de județ, atât pe calea ferată cât și pe șosea?

7) Scrie câte o matrice de tipul (2, 3) cu elemente din mulțimea:

a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{C}$.

8) Scrie o matrice coloană cu patru linii, folosind elementele 0, 1 și –1.

9) Scrie o matrice linie cu cinci coloane, cu elemente numere reale, în care suma elementelor să fie 10.

10) Ordonează după incluziune mulțimile de matrice cu m linii și n coloane: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$.

11) a) Scrie o matrice pătratică de ordinul 3, cu elementele 1 și –1, în care produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, să fie –1.

b) Scrie diagonala principală a acestei matrice.

EXEMPLU

Matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5 & 2\\ 3 & 7 & -2 & 8\\ 15 & 1 & 4 & -3\\ -5 & 6 & 9 & 10\end{pmatrix}$ are diagonala principală $(-1 \quad 7 \quad 4 \quad 10)$ și diagonala secundară $(2 \quad -2 \quad 1 \quad -5)$

Definiție.

Transpusa unei matrice A de tip (m, n) este matricea ${}^tA$ de tip (n, m) definită prin ${}^tA(i, j) = A(j, i)$, $\forall\ i=\overline{1,n}$, $\forall\ j=\overline{1,m}$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad {}^tA=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

EXEMPLU

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\\ 4 & 7\\ 5 & -3\end{pmatrix},\quad {}^tA=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 7 & -3\end{pmatrix}$$

Deci, prin transpunerea matricei A, linia i din matricea A devine coloana i în matricea ${}^tA$ și coloana j din matricea A devine linia j în matricea ${}^tA$.

Egalitatea matricelor

Definiție.

Două matrice de tip (m, n), $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ și $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, se numesc *egale* dacă $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}$.

EXEMPLU

Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 5 & y & z\end{pmatrix}$.

Matricele A și B sunt de același tip, $(2, 3)$, și $A = B$ dacă și numai dacă $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

Adunarea matricelor

Definiție.

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Suma matricelor A și B este matricea $C=(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ i \in \{1, ..., m\}$, $\forall\ j \in \{1, ..., n\}$.

Matricea sumă C se notează $A + B$.

RETINE

Două matrice sunt egale dacă sunt de același tip și elementele corespunzătoare sunt respectiv egale.

Matricele se pot aduna numai dacă sunt de același tip.

12) Calculează suma elementelor diagonalei principale a matricei de ordin 21:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots & 1\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1\\ \dots & & & & & & & \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

13) Care este transpusa matricei $A = (1 \quad -i \quad 2i)$?

14) Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

Verifică relația: ${}^t({}^tA) = A$ (dacă transpunem de două ori o matrice, obținem matricea inițială).

15) Care dintre următoarele perechi de matrice sunt egale?

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & i^4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6-2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$;

d) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6\end{pmatrix}$;

e) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Cum adunăm matricele?

16) Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Verifică egalitatea: $A+B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

17) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y & x\\ y & x & y\end{pmatrix}$.

Determină numerele x și y știind că $A+B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

EXEMPLU

Un magazin are două sucursale, M_1 și M_2, în care vinde automobile de tipurile P_1, P_2, P_3.

Fie A, B matricele care reprezintă numărul de autoturisme vândute în prima, respectiv a doua zi de la deschidere:

$$A=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\\1&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&4\\3&1\\2&3\end{pmatrix}$$

Cele 2 coloane indică vânzările din magazinele M_1 și M_2, iar cele 3 linii reprezintă vânzările articolelor P_1, P_2, respectiv P_3. Care sunt vânzările din cele două zile, la cele două sucursale M_1 și M_2, pentru produsele P_1, P_2, P_3?

Soluție.

$$C=A+B=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\\1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4\\3&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&7\\5&1\\3&7\end{pmatrix}$$ este matricea

reprezentând vânzările din cele două zile, la cele două sucursale M_1 și M_2, pentru produsele P_1, P_2, P_3.

Teoremă. ***Proprietățile adunării matricelor.***

Pentru orice matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$:

1. $A + B = B + A$ (*comutativitatea*);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*asociativitatea*);
3. $A+O_{m,n}=O_{m,n}+A=A$, unde $O_{m,n}$ este matricea nulă de tip (m, n) (are toate elementele 0);
4. există *matricea opusă* $-A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A+(-A)=(-A)+A=O_{m,n}$.

Pentru $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$, avem $-A=(-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

Definim operația de scădere a două matrice: $A - B = A + (-B)$.

Demonstrează teorema pentru matrice de tipul (2, 3)!

Adunarea matricelor, particularizată pentru matrice cu o singură linie (sau coloană), ne conduce la adunarea vectorilor.

Înmulțirea matricelor cu scalari

Extindem definiția înmulțirii vectorilor cu scalari și obținem...

Definiție.

Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\lambda \in \mathbb{C}$. *Produsul dintre numărul* λ (numit scalar) *și matricea* A este matricea $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$, cu $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $\forall\, i \in \{1, ..., m\}$, $\forall\, j \in \{1, ..., n\}$.

Matricea B se notează $\lambda \cdot A$ sau λA.

18) Fie $A=\begin{pmatrix}2&6&4\\i^2&0&-i\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&9&1\\i^4&0&i^3\end{pmatrix}$.

a) Calculează $A + B$.
b) Calculează ${}^tA + {}^tB$.

19) Fie $A=(i\ \ i^4\ \ i^3)$ și $B=\begin{pmatrix}i\\-i\\i^3\end{pmatrix}$.

a) Calculează $A + {}^tB$.
b) Calculează ${}^tA + B$.

20) Fie $A=\begin{pmatrix}2x&0&t\\4&3y&3\\v&-z&3z\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-4&-v&-1\\-x&-2y&u\\-v&-2z&-2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}16&6&-2\\-6&3&5\\0&-3&1\end{pmatrix}$.

Află x, y, z, u, v, t, știind că $A + B = C$.

21) Determină x, y dacă:

$$\begin{pmatrix}0&5y\\x&-2x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4x&2y\\2y&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y&-1\\7&3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4x\\y&2y\end{pmatrix}$$

22) Determină matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dacă: $\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}-X+\begin{pmatrix}0&1\\5&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4\\-2&1\end{pmatrix}$.

23) Scrie matricele următoare:

a) $O_{2,3}$; b) $O_{2,2} \overset{not}{=} O_2$; c) $O_{3,3} \overset{not}{=} O_3$;
d) $O_{1,2}$; e) $O_{2,1}$; f) $O_{3,1}$; g) $O_{1,3}$.

Cum înmulțim o matrice cu un număr?

24) Determină numerele x, y, z, t dacă

$$2\begin{pmatrix}1&-2\\x&-y\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}z&-2t\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}.$$

25) Calculează $2A$, $3B$, $5B$, $-5B$, $A-5B$, dacă: $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

26) Calculează $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x\begin{pmatrix}1+i&1-i\\1-2i&-2+3i\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2-i&-1+3i\\i&3-i\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5-i&-1+7i\\1&4+i\end{pmatrix}$$

EXEMPLU

Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$; $2A=\begin{pmatrix}2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 4 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 8 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

Se demonstrează ușor următoarea ...

Teoremă. ***Proprietățile înmulțirii cu scalari a matricelor***
Pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $a, b \in \mathbb{C}$:
1) $1 \cdot A = A$ 2) $(a+b)A = a\cdot A + b\cdot A$
3) $a(A+B) = a\cdot A + a\cdot B$ 4) $(ab)A = a(bA)$.

27) Determină matricele X, Y cu:

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}8 & 7 & -2\\ 1 & -6 & 5\end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -1\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}\end{cases}.$$

Indicație.
Înmulțim ecuația a doua cu –2 și o adunăm la prima ecuație. Înlocuim matricea Y într-o ecuație a sistemului și obținem matricea X.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie matricele

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Calculează:
a) $A+B$;
b) $A-B-{}^tC$;
c) $C-2\,{}^tA$.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculează:
a) $A+{}^tA$;
b) λA, $\lambda\in\mathbb{C}$;
c) $x\in\mathbb{C}$ cu $x\cdot A={}^tA$.

3. Fie $A\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ și $B\in\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$. Care dintre următoarele operații sunt posibile:
a) $A+B$; b) $A+{}^tB$; c) ${}^tA+B$; d) ${}^tA+{}^tB$?

4. a) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$.
a) Arată că ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$;
b) Demonstrează că, pentru orice două matrice $X, Y\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, au loc relațiile ${}^t(X+Y)={}^tX+{}^tY$, ${}^t(\lambda X)=\lambda\,{}^tX, \forall\lambda\in\mathbb{C}$.

5. Determină numerele reale x, y pentru care avem $\begin{pmatrix}\sin^2 x & \cos^2 y\\ \mathrm{tg}^2 y & \mathrm{tg}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

6. Determină x, y, z numere reale astfel încât:
$x\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

7. Determină matricele $X, Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ dacă
$X-3Y=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ și $2X-5Y=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

8. Calculează suma $S=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & k & k^2 & k^3\\ -1 & 2 & 3 & k(k+1)\end{pmatrix}$

9. Dacă ε este o soluție a ecuației $x^2+x+1=0$, calculează suma: $\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}\varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k}\\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k}\end{pmatrix}$.

10. Arată că nu există matrice cu 2006 linii și 2007 coloane având toate elementele +1 sau –1, astfel încât produsul elementelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie egal cu –1.

3. Operații cu matrice: înmulțirea

Înmulțirea matricelor

Exercițiu rezolvat.

Pentru fabricarea produselor X și Y, o întreprindere utilizează piesele P_1, P_2, P_3. Tabelul alăturat reprezintă necesarul pentru fabricație; astfel, pentru fabricarea unei unități din produsul X, sunt necesare 5 bucăți P_1, 2 bucăți P_2, 1 bucată P_3. Asociem acestui tabel matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

	P_1	P_2	P_3
X	5	2	1
Y	2	3	2

Tabelul alăturat reprezintă, pentru fiecare piesă de tipul P_1, P_2, respectiv P_3, în unități monetare, costul de producție și costul de transport. Asociem acestui tabel matricea $B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

	cost producție	cost transport
P_1	10	1
P_2	5	3
P_3	1	2

Pentru fabricarea unei unități din X, costul total de producție al pieselor este $5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 61$, iar costul total de transport este $5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 13$.

Calculează în mod analog costurile pentru fabricarea unei unități din Y.

Putem aranja calculele astfel: $\begin{pmatrix} \boxed{5 \quad 2 \quad 1} \\ 2 \quad 3 \quad 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{61} & 13 \\ 37 & 15 \end{pmatrix}$

și obținem repartiția costului de producție și a costului de transport pentru fiecare articol.

Acest exemplu ne conduce la următoarea ...

Definiție.

Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ și $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$. *Produsul matricelor* A și B (în această ordine) este matricea $C = (c_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$, unde $\forall\, i \in \{1, ..., m\}$, $\forall\, k \in \{1, ..., p\}$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$.

Matricea produs C se notează $A \cdot B$.

Să explicităm modul în care se înmulțesc două matrice.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$, unde $C = A \cdot B$.

Elementele din prima linie a matricei C sunt:

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1}$ (produsul dintre linia 1 din A și coloana 1 din B),

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ... + a_{1n}b_{n2}$ (produsul dintre linia 1 a matricei A și coloana 2 a matricei B),

...

$c_{1p} = a_{11}b_{1p} + a_{12} \cdot b_{2p} + ... + a_{1n} \cdot b_{np}$ (produsul dintre linia 1 a matricei A și coloana p a matricei B).

Elementele liniei a doua din C se obțin înmulțind linia 2 din A, pe rând, cu coloanele matricei B, adică:

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + ... + a_{2n}b_{n1}$, $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + ... + a_{2n}b_{n2}$, . . . , $c_{2p} = a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + ... + a_{2n}b_{np}$.

În general, elementele din linia i a matricei C se obțin înmulțind, pe rând, linia i din A cu coloanele lui B.

EXEMPLU

Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{Z})$, deci $A\cdot B$ are sens și

$$AB=\begin{pmatrix}-1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1 & -1\cdot7+2\cdot0+3\cdot2 & -1\cdot(-1)+2\cdot4+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot(-2)+3\cdot(-1)\\ 4\cdot2+(-2)\cdot3+1\cdot1 & 4\cdot7+(-2)\cdot0+1\cdot2 & 4\cdot(-1)+(-2)\cdot4+1\cdot0 & 4\cdot0+(-2)\cdot(-2)+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1 & 9 & -7\\ 3 & 30 & -12 & 3\end{pmatrix}$$

RETINE

Matricea A poate fi înmulțită cu matricea B numai dacă numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B.

Observație.

Produsul de matrice $A\cdot B$ este matricea obținută cu produsele scalare dintre vectorii linie ai matricei A și fiecare vector coloană din matricea B. Remarcăm astfel legătura dintre înmulțirea matricelor și produsul scalar al vectorilor: produsul dintre vectorul (matrice) $u\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ cu vectorul (matrice) $v\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ este numărul $u\cdot v\in\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})=\mathbb{C}$.

Precizăm că produsul scalar al vectorilor este un număr, spre deosebire de produsul vectorilor (sau matricelor) cu un scalar care este un vector (respectiv o matrice).

Teoremă. *Proprietățile înmulțirii matricelor.*

Fie $m, n, p, q\in\mathbb{N}^*$

1. Oricare ar fi matricele $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$:

$$\boxed{(AB)C=A(BC)}$$

(*asociativitatea*)

2. Oricare ar fi matricele A de tip (m, n), B și C de tip (n, p):

$$\boxed{A(B+C)=AB+AC}$$

(*distributivitatea înmulțirii la stânga față de adunare*).

3. Oricare ar fi matricele A, B de tip (m, n), C de tip (n, p):

$$\boxed{(A+B)C=AC+BC}$$

(*distributivitatea înmulțirii la dreapta față de adunare*).

4. *Matricea unitate de ordinul n,* $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$

este *element neutru față de înmulțire*, adică $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem

$$\boxed{A\cdot I_n=I_n\cdot A=A}$$

Atenție! În general, $A\cdot B\neq B\cdot A$. Dacă $A\cdot B=B\cdot A$, spunem că matricele A și B comută între ele.

Cum înmulțim matricele?

1) Verifică înmulțirea matricelor următoare: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot0\\ 0\cdot0+1\cdot(-1) & 0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot2+1\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

2) Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Verifică egalitatea: $A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 13\\ -7 & -10\end{pmatrix}$

3) Înmulțește matricea linie $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$ cu matricea coloană $\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 4\\ -3\end{pmatrix}$.

4) Înmulțește matricea linie $\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ cu matricea coloană $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

5) Știind că $A\cdot\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 12\\ 7\\ 8\end{pmatrix}$, află tipul matricei A și dă exemple de matrice A.

Observații.

♦ Considerăm sistemul de ecuații liniare:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}.$$ Fie A matricea sistemului, X matricea necunoscutelor și B matricea termenilor liberi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ și } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Obținem scrierea matricială a sistemului (S): $AX = B$.

EXEMPLU

Verifică rezolvarea ecuației matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluție.

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Numărul de linii ale lui X este 3, egal cu numărul de coloane ale lui A, iar numărul de coloane ale lui X este 2, egal cu numărul de coloane ale lui B.

Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, $A\cdot X=\begin{pmatrix} a-e & b-f \\ a-c+2e & b-d+2f \end{pmatrix}$.

Din $A\cdot X = B$, rezultă $\begin{cases} a-e=-1 \\ b-f=3 \\ a-c+2e=6 \\ b-d+2f=0 \end{cases}$. Soluțiile sunt:

$a=\alpha-1$; $b=\beta+3$; $c=3\alpha-7$; $d=3\beta+3$; $e=\alpha$; $f=\beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Deci, problema are o infinitate de soluții de forma

$$X=\begin{pmatrix} \alpha-1 & \beta+3 \\ 3\alpha-7 & 3\beta+3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Caz particular: $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Rezultă $X=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Verificare: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Calculează, dacă este posibil, produsul matricelor $A \cdot B$:

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7) Verifică dacă $A \cdot B \neq B \cdot A$, pentru

$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

8) Verifică dacă $AB = BA$, pentru

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9) Verifică proprietățile înmulțirii matricelor pentru $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Determină matricele X care au proprietatea: $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot X$.

11) Fie matricele:

$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuațiile matriciale:

a) $AX = I_2$; b) $AX = B$

12) Fie matricele:

$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuațiile matriciale:

a) $AX = XB$; b) $AXA = B$.

13) Determină matricea X, dacă:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14) Determină matricea X, dacă:

$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ridicarea la putere a matricelor pătratice

Definiție.

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq O_n$, definim $A^0 = I_n$ (matricea unitate cu n linii și n coloane) și $A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Observăm că $A^{k+p} = A^k \cdot A^p$, $\forall k,\ p \in \mathbb{N}$.

Proprietăți. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice care comută între ele: $AB = BA$. Relațiile următoare se demonstrează ca relațiile asemănătoare cu numere:

a) $A^iB^k = B^kA^i$, $\forall i,\ k \in \mathbb{N}$;

b) $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2} \cdot B + \ldots + A \cdot B^{k-2} + B^{k-1})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$;

c) $A^k + B^k = (A + B)(A^{k-1} - A^{k-2} \cdot B + \ldots - A \cdot B^{k-2} + B^{k-1})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$, k impar;

d) $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^{k-i} B^i$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (*binomul lui Newton*).

În cele ce urmează vom indica câteva metode de ridicare la putere a matricelor pătratice de ordinul n, $n \in \{2, 3\}$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să calculăm A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Calculăm

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vom demonstra prin metoda inducției matematice că

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}, \forall n \geqslant 2.$$

Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Într-adevăr $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$, deci A^{k+1} este de forma de mai sus. Atunci $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2) Calculează A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Metoda I. (*Metoda șirurilor recurente*)

Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3a+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Presupunem și demonstrăm prin inducție că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & a_k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a_k \in \mathbb{R}$.

Cum ridicăm o matrice la o putere?

15) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculează:

a) $A^2 = A \cdot A$;

b) A^3.

16) Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculează:

a) AB și BA;

b) $A^2 - B^2$ și $(A - B)(A + B)$.

Ce constați?

17) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arată că $\forall\, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu A la înmulțire este de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) Calculează A^n și X^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

18) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determină X de forma $X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ astfel încât $X^nA = B$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

19) $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Calculează A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -a^2 \cdot I_2;$$

$A^3 = A^2A = -a^2A$; $\quad A^4 = A^3A = -a^2A^2 = a^4I_2$.

Demonstrăm prin inducție matematică relația: $A^{4n} = a^{4n} \cdot I_2$.

Pentru $k = 1$ relația se verifică.

Presupunem $A^{4k} = a^{4k} \cdot I_2$ și demonstrăm că $A^{4(k+1)} = a^{4(k+1)} \cdot I_2$.

Avem $A^{4(k+1)} = A^{4k}A^4 = a^{4k}I_2 \cdot a^4I_2 = a^{4(k+1)}I_2$, deci presupunerea este adevărată.

Avem $A^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & a+k+a_k\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & a_{k+1}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

unde $a_{k+1}=a_k+k+a$, $\forall\, k\geqslant 1$.

Din această relație de recurență deducem:

$$\begin{aligned}
&a_1=a\\
&a_2=a_1+1+a\\
&a_3=a_2+2+a\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_k=a_{k-1}+(k-1)+a.
\end{aligned}$$

$$a_k=a+\big(1+2+\ldots+(k-1)\big)+(k-1)a=ka+\frac{k(k-1)}{2}.$$

Așadar $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & na+\dfrac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Metoda a II-a. (*Metoda binomului lui Newton*)

Scriem matricea A sub forma $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&a\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=I_3+B$.

Cum $I_3\cdot B=B\cdot I_3$, aplicăm formula binomului lui Newton: $A^n=(I_3+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kB^k$. Calculăm inductiv puterile lui B:

$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B^3=O_3$, $B^k=O_3$, $\forall\, k\geqslant 3$.

Atunci: $A^n=C_n^0B^0+C_n^1B+C_n^2B^2=$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n&na\\0&0&n\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\dfrac{n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n&na+\dfrac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

3) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Determină A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție. (*Metoda trigonometrică*)

$A^2=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}$. Presupunem $A^k=\begin{pmatrix}\cos k\alpha & \sin k\alpha\\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha\end{pmatrix}$;

arătăm că $A^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\alpha & \sin(k+1)\alpha\\ -\sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha\end{pmatrix}$.

Deducem că $A^n=a^{4k}\cdot I_2$ pentru $n=4k$; $A^n=a^{4k}\cdot A$ pentru $n=4k+1$; $A^n=-a^{2(2k+1)}\cdot I_2$ pentru $n=4k+2$; $A^n=-a^{2(2k+1)}\cdot A$ pentru $n=4k+3$.

20) Calculează A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, pentru:

$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

21) Calculează A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, pentru:

$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\-a&1&-\dfrac{a^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$;

22) Calculează A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, pentru:

$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&a+b&0\\b&0&a\end{pmatrix}$, $a,\,b\in\mathbb{R}$.

23) Calculează $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^{2001}$.

24) Fie $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{pmatrix}$, unde ε este soluție a ecuației $x^2+x+1=0$. Calculează A^n, $n\geqslant 1$.

25) Determină $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de forma $X=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}$ astfel încât $X^2-7X+3I_2=O_2$.

26) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

Determină A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, știind că $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$ și $\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$.

Într-adevăr,

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha & \sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha\\ -(\sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha) & \cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\alpha & \sin(k+1)\alpha\\ -\sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha\end{pmatrix}.$$

În concluzie, $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

27) Calculează A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, unde A este matricea:

a) $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

a) Arată că ${}^t(A\cdot B)={}^tB\cdot{}^tA$.

b) Arată că, între o matrice X de tip (m, n) și o matrice Y de tip (n, m), are loc relația: ${}^t(X\cdot Y)={}^tY\cdot{}^tX$.

2. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Calculează: AB, BA, $AB-BA$, $A^2=A\cdot A$, B^2, A^2-B^2.

3. Determină matricea X care verifică ecuația $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 12 & -6 & -9\end{pmatrix}$.

4. Fie $X(a)=\begin{pmatrix}1+5a & 10a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arată că $\forall\, a, b\in\mathbb{R}$, $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$;

b) Determină $(X(1))^2$;

c) Arată că: $(X(1))^n=X(2^n-1)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

5. Găsește toate matricele cu elemente în mulțimea $\{0,1\}$ care transformă prin înmulțire matricea $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ în $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$.

6. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și mulțimea $\mathcal{M}=\{C(x)=xA+B,\ x\in\mathbb{R}^*\}$. Arată că

a) $C(x)\cdot C(y)=C(y)\cdot C(x)$, $\forall\, C(x), C(y)\in\mathcal{M}$;

b) $I_2\in\mathcal{M}$.

7. a) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Determină toate matricele X astfel încât $A^2\cdot X=X\cdot A^2$ și arată că nu există nici o matrice Y astfel încât $A^2\cdot Y-Y\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Arată că, oricare ar fi $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB-BA\neq I_n$.

8. Determină matricea X, dacă:

a) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

9. Rezolvă ecuația matricială:

$$X-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

10. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$. Arată că:

a) A verifică ecuația $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$;

b) $ad=bc$ implică:

$\exists\, r\in\mathbb{N}^*$ cu $A^k=r^{k-1}\cdot A$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$.

11. Determină $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația:

a) $X^2={}^tX$; b) $X^2=I_2$; c) $X\cdot{}^tX=O_2$.

12. Fie matricele

$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculează A^n și B^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n=I_2$?

13. Arată că $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{12} = 2^{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Calculează A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, unde A este matricea:

a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

15. Calculează:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{2001}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{2008}$;

c) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X + I_2$, calculează $f(A)$.

17. Fie matricea $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i > j \\ (-1)^{i+j} C_j^i, \text{ dacă } i < j \end{cases}.$$ Calculează A^n.

18. a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculează $\sum_{k=1}^{n} A^k$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determină $\sum_{k=1}^{n} A^k$, $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Calculează A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

20. Dacă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avem egalitatea matriceală $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a+b & a+2b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, arată că $y - x$, $z - y$, $t - z$ sunt în progresie aritmetică.

21. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arată că:

a) $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_3$, pentru $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$;

b) $A^n = \frac{2^n}{3} \cdot (A + I_3) + \frac{(-1)^n}{3} \cdot (2I_3 - A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

22. Calculează $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 1 & 14 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $a \neq d$; $b \neq c$; $b \neq 0$; $c \neq 0$. Fie $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrează că $\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \frac{a_n - d_n}{a - d}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

24. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid XA = AX\}$. Arată că:

a) dacă $X, Y \in \mathcal{N}(A)$, atunci $XY \in \mathcal{N}(A)$;

b) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$;

c) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$ și $X^2 = O_3$, atunci $X = O_3$;

d) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$ și $X^{2007} = O_3$, atunci $X = O_3$.

Sisteme de ecuații liniare și determinanți

4. Sisteme de ecuații liniare

♦ O *ecuație liniară* cu n necunoscute, $x_1, x_2, ..., x_n$ este o ecuație de forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b_1$, unde $a_1, a_2, ..., a_n, b_1 \in \mathbb{R}$.

Exemple de probleme care se pot rezolva printr-o ecuație liniară cu o necunoscută:

1) Într-un cuptor Siemens-Martin se topesc 20t de oțel, având un conținut de 0,5% carbon, cu 5t de fontă având un conținut de 5% carbon. Ce procent de carbon are amestecul?

Soluție. Fie x% conținutul de carbon al amestecului, adică 25t de amestec conține $\frac{25x}{100}$t carbon. Cele 20t de oțel conțin $\frac{20\cdot 0{,}5}{100}$t carbon și cele 5t de fontă conțin $\frac{5\cdot 5}{100}$t carbon. Atunci $\frac{20\cdot 0{,}5}{100}+\frac{5\cdot 5}{100}=\frac{25x}{100}$, cu $x = 1{,}4$.

2) Un tren lung de 250 m trece cu viteza de 50 km/h printr-un tunel lung de 200 m. Cât a durat trecerea prin tunel?

Soluție. Timpul de la intrarea locomotivei în tunel până la ieșirea ultimului vagon este de x secunde. În acest timp, ultimul vagon parcurge $\frac{50000}{60\cdot 60}x$ m, adică lungimea trenului plus lungimea tunelului: $200+250=\frac{50000}{60\cdot 60}x$, de unde $x = 32{,}4$ s.

Forma generală a unui *sistem de ecuații liniare* (*sistem liniar*) este:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ..... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases},$$

unde $x_1, x_2, ... x_n$ sunt *necunoscutele sistemului*, numerele a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ sunt *coeficienții necunoscutelor* și $b_1, b_2, ... b_m$ sunt *termenii liberi ai sistemului* (a_{ij} și b_i sunt numere reale (sau complexe) date).

Unui sistem liniar îi asociem următoarele *matrice:*

matricea sistemului, matricea extinsă a sistemului, matricea termenilor liberi, matricea necunoscutelor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matricea extinsă se mai numește și *matrice completă*.

Să rezolvăm probleme folosind ecuații liniare.

1) Două trenuri, primul lung de 150 m iar al doilea de 250 m, trec în sens contrar unul pe lângă altul, primul cu viteza de 70 km/h, iar cel de-al doilea cu viteza de 50 km/h.

În cât timp trec unul pe lângă altul?

2) Aceeași problemă, dacă cele două trenuri circulă în același sens.

3) Află ce distanță parcurge pe șosea un automobil cu lungimea de 5 m care circulă cu viteza de 90 km/h, în timp ce depășește un camion care circulă cu viteza de 16 km/h având lungimea de 13 m.

4) Un șlep mergând în sensul curentului apei ajunge la destinație în 2 ore. Mergând contra curentului, cu aceeași încărcare a mașinilor, parcurge aceeași distanță în 3 ore. Viteza șlepului în apă stătătoare este de 250 m/min. Care este viteza curentului?

Să recunoaștem matricea asociată unui sistem liniar.

5) Scrie matricea sistemului și matricea extinsă pentru fiecare din următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-z=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+5z=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_3=2 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-5y=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x+5y=0 \\ 2x-8y=0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2y-3z=4 \\ 3z-4t=5 \\ x+3y+5z-6t=11 \end{cases}$.

Prin rezolvarea sistemului S înțelegem determinarea mulțimii soluțiilor $(x_1, x_2, ..., x_n)$ care verifică toate ecuațiile sistemului (S).

EXEMPLU

... de problemă care conduce la sistem liniar de 2 ecuații cu 2 necunoscute:

Un rezervor poate fi umplut cu apă de la un robinet de apă caldă și unul de apă rece. Dacă robinetul de apă caldă este deschis 3 minute și cel de apă rece 1 minut, atunci în rezervor vor fi 50 l. Dacă apa caldă curge un minut și apa rece 2 minute, atunci în rezervor vor fi 40 l. Câți litri de apă curg într-un minut din fiecare robinet?

Soluție.

Fie x l/min debitul robinetului de apă caldă și y l/min debitul celui de apă rece. Obținem sistemul $\begin{cases} 3x + y = 50 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$, cu soluția $(x, y) = (12, 14)$; deci robinetul de apă caldă furnizează 12 l/min și cel de apă rece 14 l/min.

♦ Sistemul $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ se poate rezolva prin mai multe metode. Să-l rezolvăm prin metoda reducerii.

Metoda reducerii constă în eliminarea uneia dintre necunoscute, adunând cele două ecuații înmulțite cu coeficienți corespunzători:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \mid \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \mid \cdot (-a_{12}) \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases}.$$

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

Pentru $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,

obținem soluțiile $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Observăm că la numitor se află o expresie pe care o notăm cu $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, care are termenii $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$. Indicii acestor doi termeni ne conduc la cele două permutări ale lui S_2:

– permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ corespunde lui $a_{11}a_{22}$

– permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ corespunde lui $a_{12}a_{21}$

Definiție.

Determinantul unei matrice de ordinul al 2-lea,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, este numărul $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Să rezolvăm probleme folosind sisteme de ecuații liniare.

6) Pentru a evita înghețarea apei în blocul motor și în sistemul de răcire al unui automobil, se amestecă apa cu lichidul antigel cu densitatea 1,135 g/cm^3. Dacă lichidul ajunge la densitatea de 1,027 g/cm^3, atunci se evită înghețul până la temperatura de –10°C.

Câți litri de antigel și câți de apă sunt necesari la această temperatură pentru a obține 100 l de amestec?

Să rezolvăm sisteme liniare.

7) Rezolvă sistemul $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$:

a) prin metoda reducerii;

b) prin metoda substituției.

8) Rezolvă sistemul $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$:

a) prin metoda reducerii;

b) prin metoda substituției;

c) grafic (pe hârtie milimetrică).

9) Rezolvă sistemele următoare prin mai multe metode:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Observăm că:

a) cele două ecuații au coeficienții proporționali: dacă înmulțim prima ecuație cu 3, obținem a doua ecuație; în acest caz, spunem că sistemul este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții); mulțimea soluțiilor sistemului este:

$S = \{(x, y) \mid y = 4 - 2x, x, y \in \mathbb{R}\} =$
$= \{(x, 4 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

b) expresia $2x + y$ nu poate lua două valori diferite pentru aceeași pereche de numere (x, y); ca urmare, mulțimea soluțiilor sistemului (S) este mulțimea vidă, deci sistemul este incompatibil (nu are soluții).

Fiecare dintre termenii determinantului Δ, $a_{11}a_{22}$ și $a_{12}a_{21}$, sunt obținuți înmulțind câte un singur element de pe fiecare linie și câte unul singur de pe fiecare coloană din matricea A.

Observație.

Valoarea determinantului matricei asociate unui sistem determină compatibilitatea sistemului (existența soluțiilor):

• dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul este *compatibil determinat* (are soluție unică);

• dacă $\Delta = 0$, atunci sistemul este *incompatibil* (nu are soluții) sau *compatibil nedeterminat* (are o infinitate de soluții).

♦ *Metoda lui Cramer*

Sistemul de două ecuații liniare cu 2 necunoscute

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, are soluția: $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Observăm că la numitor avem determinantul matricei sistemului, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, iar la numărător avem determinanții $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ și $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei cu coloana termenilor liberi.

Notăm $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$; $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Metoda lui Cramer.

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ este (x_1, x_2), unde $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$ și $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$.

Exerciții rezolvate.

1) Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$.

• *Metoda reducerii.*

Adunăm cele două ecuații și obținem $x = 1$. Înlocuind această valoare într-una din ecuații, de exemplu în prima, obținem $y = 2$. Soluția sistemului este (1, 2).

• *Metoda substituției.*

Din prima ecuație obținem $y = 4 - 2x$ și înlocuim în a doua. Obținem $x = 1$, de unde rezultă $y = 2$. Deci obținem (1, 2).

• *Metoda lui Cramer.*

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1$;

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 2$. Deci obținem soluția (1, 2).

10) Calculează valorile următorilor determinanți de ordinul 2:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & b \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{vmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$.

11) Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$, sistemul liniar $\begin{cases} (m+1)x + 8y = 4m \\ mx + (m+3)y = 3m - 1 \end{cases}$ are o infinitate de soluții?

Indicație. Din condiția ca determinantul matricei asociate sistemului să fie 0, rezultă $m = 1$ sau $m = 3$. Pentru $m = 3$, obținem sistemul $\begin{cases} 4x + 8y = 12 \\ 3x + 6y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$, deci sistem incompatibil, iar pentru $m = 1$ obținem sistemul $\begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + 4y = 2$, având mulțimea soluțiilor $\{(2 - 4a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, sistem compatibil nedeterminat.

12) Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} (m-1)x + 8y = 4m \\ mx + (m+3)y = 3m + 1 \end{cases}$:

a) are soluție unică? b) nu are soluții?

13) Fie sistemul $\begin{cases} 3x_1 - 17x_2 = 9 \\ 5x_1 + 19x_2 = 23 \end{cases}$.

a) Calculează Δ.

b) Calculează Δ_{x_1}, Δ_{x_2}.

c) Rezolvă sistemul prin metoda lui Cramer.

2) Rezolvă și discută, în funcție de valorile parametrului real, sistemul $\begin{cases} 2x+ay=4 \\ x+y=1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluție.

• *Metoda reducerii.* $\begin{cases} 2x+ay=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Big| \cdot(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+ay=4 \\ -2x-2y=-2 \end{cases}$

$(a-2)y=2$

Pentru $a \neq 2$ obținem $y=\dfrac{2}{a-2}$, $x=\dfrac{a-4}{a-2}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, soluție unică, deci sistemul este compatibil determinat.

Pentru $a = 2$ obținem $0 = 2$ imposibil, deci sistemul este incompatibil.

• *Metoda substituției.* $\begin{cases} y=1-x \\ 2x+ay=4 \end{cases} \Rightarrow 2x+a(1-x)=4$

Pentru $a \neq 2$ obținem $x=\dfrac{a-4}{a-2}$ și $y=\dfrac{2}{a-2}$ soluție unică (sistemul este compatibil determinat) iar pentru $a = 2$ sistemul este incompatibil.

• *Metoda lui Cramer.* $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-a$.

Pentru $a \neq 2$ avem $\Delta \neq 0$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4-a$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$ și obținem $x=\dfrac{a-4}{a-2}$, $y=\dfrac{2}{a-2}$ (sistemul este compatibil determinat), iar pentru $a = 2$ sistemul este incompatibil.

♦ Dacă rezolvăm (prin substituție sau reducere) sistemul liniar:

$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$, unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (sau $a_{ij} \in \mathbb{C}$), $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$ și $b_k \in \mathbb{R}$ (sau $b_k \in \mathbb{C}$), $k=\overline{1,3}$, în cazul când numitorul este nenul obținem soluțiile:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-a_{31}b_2a_{13}-a_{21}b_1a_{33}-a_{11}b_3a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{12}b_2a_{31}-a_{31}a_{22}b_1-a_{12}a_{21}b_3-a_{32}b_2a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}}$$

Observăm că la numitorul fiecărei soluții se află expresia $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$.

Definiție. *Determinantul unei matrice de ordinul* al 3-lea,

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, este numărul $\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$.

14) Rezolvă următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 3x-2y=13 \\ 2x+y=4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x+9y=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$.

Să rezolvăm sisteme liniare de 3 ecuații cu 3 necunoscute.

15) Rezolvă prin metoda substituției sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ 2x_1+x_3=3 \\ 3x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+2y+3z=12 \\ x-2y+2z=-12 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x-7y+8z=16 \\ 3x+5y-3z=14 \\ 3x-y+8z=30 \end{cases}$.

16) Arată că:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-12$;

b) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=354$;

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 27 & 22 & 21 \end{vmatrix}=0$.

În scrierea lui Δ sunt $3! = 6$ termeni formați din câte 3 factori. În fiecare dintre acești termeni se întâlnește o singură dată câte un element de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană a matricei A.

Să punem în evidență permutările pe care le putem observa în indicii unor termeni din Δ:

– permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ corespunde lui $a_{11}a_{22}a_{33}$

– permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ corespunde lui $a_{12}a_{21}a_{33}$

– permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ corespunde lui $a_{13}a_{21}a_{32}$

etc.

ATENȚIE

Toți termenii corespunzători unor permutări pare au semnul „+” în dezvoltarea determinantului Δ, iar cei corespunzători permutărilor impare au semnul „–” în dezvoltarea determinantului Δ.

Pentru calculul determinanților de ordinul 3 este mai comod să aplicăm una din următoarele trei reguli de calcul:

Teoremă. ***Regula lui Sarrus***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

(adunăm produsul elementelor de pe cele 3 diagonale paralele cu direcția și scădem produsul elementelor situate pe cele 3 diagonale paralele cu direcția .)

Teoremă. ***Regula triunghiului***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(evidențiem „triunghiuri“ cu vârfurile în elementele determinantului, ca în schemă. Se adună produsele elementelor care se află pe diagonala principală și în vârfurile triunghiurilor ce au o latură paralelă cu aceasta și se scad produsele elementelor care se află pe diagonala secundară și în vârfurile triunghiurilor ce au o latură paralelă cu aceasta).

17) Calculează următorii determinanți de ordinul 3 folosind definiția:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

18) Care dintre următorii termeni și cu ce semne, apar în calculul determinantului $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$?

a) $a_{11}a_{22}a_{33}$; b) $a_{11}a_{21}a_{32}$;

c) $a_{21}a_{32}a_{13}$; d) $a_{22}a_{31}a_{12}$;

e) $a_{23}a_{31}a_{22}$; f) $a_{41}a_{32}a_{23}$;

g) $a_{32}a_{21}a_{12}$; h) $a_{33}a_{12}a_{32}$;

i) $a_{13}a_{21}a_{12}$.

19) Calculează, folosind regula lui Sarrus, determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Teoremă. ***Regula minorilor***

(dezvoltarea determinantului după o linie sau coloană)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(alegem o linie i sau o coloană și înmulțim fiecare element a_{ij}, $j=\overline{1,3}$ al acestei linii sau coloane cu determinantul de ordin inferior obținut prin eliminarea liniei i și a coloanei j și cu $(-1)^{i+j}$; adunăm produsele astfel obținute și obținem valoarea determinantului).

Cu considerentele anterioare, suntem în măsură să justificăm:

Teoremă. ***Metoda lui Cramer***

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci soluția sistemului liniar

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ este } (x_1, x_2, x_3):\ x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aplicație. *Modelul economic al lui Leontief*

(1906 - 1999, economist american de origine rusă. Creatorul modelului „input-output“ (intrări - ieșiri; consumuri - producție) folosit în analiza echilibrului economic. A obținut premiul Nobel în 1973).

Considerăm o economie formată din două sectoare notate 1 și 2. Schimburile între sectoare și cererile exterioare finale sunt

20) Calculează următorii determinanți de ordinul 3 folosind regula triunghiului:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & b \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

e) $\begin{vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

21) Calculează următorii determinanți de ordinul 3 folosind regula minorilor:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -x & -y & -z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 2 & b \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

e) $\begin{vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

evaluate în aceeași unitate monetară. Producerea unei unități în sectorul 1 necesită 0,1 unități din sectorul 1 și 0,2 unități din sectorul 2; producerea unei unități în sectorul 2 necesită 0,5 unități din sectorul 1 și 0,25 unități din sectorul 2. Să determinăm producțiile x_1 și x_2 ale sectoarelor 1 și, respectiv, 2 pentru realizarea echilibrului pieței dacă cererea finală, din afara celor două sectoare, este pentru sectorul 1 de 5000 de unități și pentru sectorul 2 de 10 000 de unități.

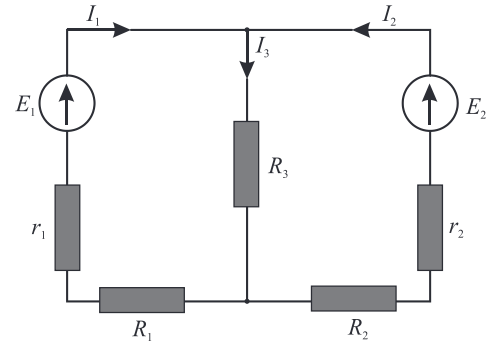
Soluție.

Pentru a stabili un echilibru trebuie ca în fiecare sector să existe egalitate între producție și cerere; echilibrul se traduce prin: $\begin{cases} x_1 - 0,1x_1 - 0,2x_2 = 5000 \\ x_2 - 0,5x_1 - 0,25x_2 = 10000 \end{cases}$. Sistemul este echivalent cu

$\begin{cases} 0,9x_1 - 0,2x_2 = 5000 & \mid \cdot 30 \\ -0,5x_1 + 0,75x_2 = 10000 & \mid \cdot 8 \end{cases}$, $\begin{cases} 27x_1 - 6x_2 = 150000 \\ -4x_1 + 6x_2 = 80000 \end{cases}$,

de unde obținem soluția (x_1, x_2).

22) În circuitul electric următor, se cunosc:



$E_1 = 12$V, $E_2 = 15$ V, $r_1 = 1\Omega$, $r_2 = 2\Omega$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 3\Omega$.

Din legile lui Kirchhoff obținem:

$$\begin{cases} E_1 = I_1(r_1 + R_1) + I_3R_3 \\ E_2 = I_2(r_2 + R_2) + I_3R_3 \\ I_3 = I_1 + I_2 \end{cases}.$$

Determină intensitățile curenților prin cele 3 laturi.

PROBLEME PROPUSE

1. Rezolvă și discută, în funcție de valorile parametrului real, următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - ay = 2 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$; b) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ ax - y = 2 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$; d) $\begin{cases} 2x + ny = 4 \\ nx - 2y = 6 \end{cases}$, $n \in \mathbb{R}$.

2. Pentru ce valori ale lui a, sistemul

$\begin{cases} -4x + ay = 3 + a \\ (6 + a)x + 2y = 1 + a \end{cases}$ nu are soluții (este incompatibil)?

3. Fie sistemul $\begin{cases} x + ny = 2 \\ 2x - y = m \end{cases}$. Pentru ce valori reale ale lui n și m sistemul este compatibil determinat?

4. Fie sistemul $\begin{cases} 5x + my = 10 \\ x + y = p \end{cases}$.

Pentru ce valori reale ale lui m și p sistemul:

a) are o soluție unică;

b) are o infinitate de soluții;

c) nu are soluții?

5. Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2ax - y = 4 \\ 3a^2x - ay = a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$; b) $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} m^3x - m^2y = m \\ m^3y - m^2x = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

6. Calculează următorii determinanți de ordin 3 prin toate metodele cunoscute (prin regula lui Sarrus, prin regula triunghiului și prin regula minorilor).

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} i & 2 & 3 \\ 4 & 2-i & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, $i^2 = -1$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 6 \\ -1 & b & 7 \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$; h) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1-i \\ x & 0 & 2+i \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

5. Determinanți de ordinul *n*

Am văzut că oricărei matrice pătratice de ordinul 2, respectiv 3, îi putem asocia un număr, numit determinantul său.

În cele ce urmează vom defini determinantul de ordinul n, $n \geqslant 4$, în așa fel încât noua definiție să fie valabilă și pentru $n = 2$ și $n = 3$, adică pentru definițiile anterioare, și vom arăta cum se folosesc determinanții în rezolvarea sistemelor de n ecuații liniare cu n necunoscute.

Fie sistemul de n ecuații liniare cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \text{ unde } a_{ij} \in \mathbb{C}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$$

iar $b_i \in \mathbb{C}, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Considerăm în continuare matricea sistemului, și anume matricea pătratică de ordinul n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Vom forma toate produsele cu elemente aparținând celor n linii și n coloane distincte, adică produsele de forma $a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$. Numărul total al produselor de această formă este $n!$, numărul tuturor permutărilor de gradul n.

La fel ca pentru determinanții de ordinul 2 sau 3, și în formula determinantului de ordinul n trebuie să avem toate produsele de n factori $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$, când σ parcurge toate permutările lui S_n; jumătate din aceste produse vor fi cu semnul „+” și jumătate cu semnul „–”.

Cu aceste observații, putem da următoarea...

Definiție.

Determinantul matricei pătratice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ este numărul complex

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Determinantul matricei A se notează $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

1) Scrie matricele asociate sistemelor:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ -x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 10 \\ x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0 \end{cases}$.

2) Considerăm următoarele permutări din S_5:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Scrie termenii corespunzători acestor permutări din calculul determinanților următoarelor matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Numărul det$A$ este suma produselor $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ când σ parcurge mulțimea permutărilor de ordinul n, $\varepsilon(\sigma)$ fiind semnul permutării σ.

Observații.

♦ Pentru $n = 2$ și $n = 3$ obținem determinantul de ordinul 2, respectiv 3, cum a fost definit anterior.

♦ Pentru $n = 1$, când $A = (a_{11})$ avem det$A = a_{11}$.

♦ Trebuie făcută distincție între o matrice pătratică de ordinul n, care este o funcție și determinantul său, care este un număr.

♦ În formula determinantului unei matrice există $n!$ termeni; $\frac{n!}{2}$ termeni au semnul „+” și $\frac{n!}{2}$ termeni au semnul „–”.

Definiție. Determinantul unui sistem liniar de n ecuații și n necunoscute $(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ este $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, numit *determinantul matricei sistemului.*

Determinantul unui sistem liniar va interveni în stabilirea compatibilității sistemului și în calculul soluțiilor sale.

În continuare vom da, fără demonstrație, un procedeu prin care calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul unui anumit număr de determinanți de ordinul $n - 1$.

Definiție. În matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *minorul elementului* a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ este determinantul matricei de ordinul $n - 1$ care se obține din matricea A eliminând linia i și coloana j.

Minorul elementului a_{ij} se notează A_{ij}.

Numărul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$ se numește *complementul algebric* al elementului a_{ij} în determinantul Δ = det$A$ al matricei A.

Teoremă.

Determinantul matricei A este numărul

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}A_{kj} = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{il}A_{il}.$$

Lăsăm ca exercițiu să se verifice pentru $n = 2$ și $n = 3$ că numărul Δ reprezintă chiar determinantul matricei A.

3) Scrie toate permutările pare din S_4. Câte sunt?

Scrie toate permutările impare din S_4. Câte sunt?

4) Calculează determinanții următoarelor sisteme:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ -x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + ex_2 - x_4 = 10 \\ x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0 \end{cases}$.

5) Scrie minorii elementelor de pe linia a treia din matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Calculează, folosind regula minorilor:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Observații.

♦ $\Delta = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ reprezintă dezvoltarea determinantului matricei A după coloana j;

♦ $\Delta = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}$ reprezintă dezvoltarea determinantului matricei A după linia i.

♦ Calculul unui determinant care are mai multe elemente 0 este mai simplu, deoarece în dezvoltarea determinantului nu apar termeni care au un factor 0. Vom încerca să transformăm determinanții pentru a obține cât mai multe elemente 0 cu ajutorul unor proprietăți pe care le vom prezenta în cele ce urmează.

Exercițiu rezolvat.

Să se calculeze determinantul de ordinul n, $I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

Rezolvare. Dezvoltăm determinantul după linia 1. Obținem $I_n = 1 \cdot I_{n-1} - 0 + 0 \dots$, toate elementele de pe linia 1, cu excepția primului, fiind 0. Rezultă $I_n = I_{n-1}$. Prin inducție matematică obținem $I_n = I_1 = 1$.

7) Scrie dezvoltările determinanților următoarelor matrice după linia a doua și după coloana a treia.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8) Calculează determinantul de ordinul n

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

PROBLEME PROPUSE

● **1.** Rezolvă următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ 3x + 2y - 5z = 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 5 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

● **2.** Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

● **3.** Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{vmatrix}$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a & y & b & c \\ a^2 & z & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & \eta & \eta^2 & \eta^3 \\ \eta & \eta^2 & \eta^3 & 1 \\ \eta^2 & \eta^3 & 1 & \eta \\ \eta^3 & 1 & \eta & \eta^2 \end{vmatrix}$, unde $\eta^4 = 1$, $\eta \in \mathbb{C}$.

●● **4.** Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Proprietățile determinanților

În formula determinanților de ordinul al 2-lea, respectiv al 3-lea, apar 2! = 2, respectiv 3! = 3 termeni.

În formula determinantului de ordinul n apar $n!$ termeni. Proprietățile determinanților de ordinul al 2-lea și al 3-lea (valabile și pentru determinanți de ordinul n, $n \geqslant 4$) au rolul de a simplifica calculul determinanților.

Vom verifica aceste proprietăți pentru o matrice de forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

I. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \det {}^tA .$$

Această proprietate ne permite să transcriem proprietățile obținute pentru liniile unui determinant la coloanele sale (și reciproc).

II. Dacă o matrice are o linie (sau o coloană) cu toate elementele 0, atunci determinantul ei este egal cu 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{33} \cdot 0 + a_{32} \cdot a_{13} \cdot 0 + a_{12} \cdot a_{31} \cdot 0 -$$

$$-a_{31} \cdot 0 \cdot a_{13} - a_{12} \cdot 0 \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot 0 = 0 .$$

III. Dacă înmulțim toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice cu un număr, valoarea determinantului matricei se înmulțește cu acel număr.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \lambda \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot \lambda \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot \lambda \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$-a_{31} \cdot \lambda \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot \lambda \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot \lambda \cdot a_{32} \cdot a_{23} =$$

$$= \lambda (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

IV. Dacă într-o matrice adunăm la elementele unei linii (respectiv coloane), elementele corespunzătoare unei alte linii (respectiv coloane) înmulțite cu un număr, atunci valoarea determinantului matricei astfel formate este aceeași cu a determinantului matricei inițiale.

Să calculăm valorile determinanților folosind proprietățile lor.

1) Verifică egalitățile:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2) Calculează determinanții:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Ce observi?

3) Verifică dacă:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

4) Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 19 & 0 & -73 \\ 24 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

5) Verifică dacă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 21 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0 .$$

6) Verifică dacă:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -6$;

b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

7) Calculează: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

De exemplu, adunăm la linia a 2-a, linia a 3-a înmulțită cu $\lambda \in \mathbb{C}$.

Obținem: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{31} & a_{22}+\lambda a_{32} & a_{23}+\lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+\lambda a_{32})a_{33} +$

$+(a_{21}+\lambda a_{31})a_{32}\cdot a_{13} + a_{12}\cdot a_{31}(a_{23}+\lambda a_{33}) - a_{31}\cdot a_{13}(a_{22}+\lambda a_{32}) -$

$-a_{11}\cdot a_{32}(a_{23}+\lambda a_{33}) - a_{33}\cdot a_{12}(a_{21}+\lambda a_{31}) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} +$

$+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} =$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A,\ \lambda \in \mathbb{C}.$

V. Dacă o matrice are două linii (respectiv două coloane) proporționale, atunci determinantul ei este nul.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{III}}{=} \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{IV}}{=} \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,\ \lambda \in \mathbb{C}.$

VI. Dacă schimbăm între ele două linii (sau două coloane) ale unei matrice pătratice, atunci determinantul își schimbă semnul.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{12} + a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} -$

$-a_{31}\cdot a_{23}\cdot a_{12} - a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32} - a_{11}\cdot a_{33}\cdot a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\det A.$

VII. Dacă două matrice diferă printr-o singură linie (sau coloană), atunci suma determinanților acestor matrice este egală cu determinantul matricei care are pe linia respectivă (coloana respectivă) suma elementelor liniilor (sau coloanelor) respective ale celor doi determinanți.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}) +$

$+(a'_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a'_{13} + a_{31}a'_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a'_{13} - a_{21}a'_{12}a_{33} - a'_{11}a_{32}a_{23}) =$

$= (a_{11}+a'_{11})a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}(a_{13}+a'_{13}) + a_{31}a_{23}(a_{12}+a'_{12}) -$

$-a_{31}a_{22}(a_{13}+a'_{13}) - a_{21}a_{33}(a_{12}+a'_{12}) - a_{32}a_{23}(a_{11}+a'_{11}) =$

$= \begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

8) Verifică dacă:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+1(-2) & 3 & 2 \\ 3 & 5+3(-2) & 9 & 0 \\ 2 & 4+2(-2) & 1 & 1 \\ 1 & 2+1(-2) & 3 & 6 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 20.$

9) Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+2 & 2 & 1 \\ -1+0 & 0 & 2 \\ 2+1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

10) Verifică dacă este corect calculul:

$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 20 & 6 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

11) Verifică dacă:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

12) Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{32} \\ \sqrt{2} & \sqrt{27} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix}$.

13) Verifică dacă:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

VIII. Determinantul produsului a două matrice pătratice (de același ordin) este egal cu produsul determinanților acestor matrice.

Fie $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}) =$$

$$= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{21}b_{21}a_{12}b_{12}-a_{11}a_{22}b_{21}b_{12}-a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

IX. Dacă o linie (respectiv coloană) a unei matrice A este o combinație liniară a celorlalte linii (respectiv coloane) ale matricei A, atunci determinantul matricei A este nul (și reciproc).

Să verificăm această proprietate pentru matricea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11}+\beta a_{21} & \alpha a_{12}+\beta a_{22} & \alpha a_{13}+\beta a_{23} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Avem $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11}+\beta a_{21} & \alpha a_{12}+\beta a_{22} & \alpha a_{13}+\beta a_{23} \end{vmatrix} =$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstrația proprietăților I-IX pentru determinanți de ordin n este un exercițiu care presupune o bună cunoaștere a modului de lucru cu simbolurile $\sum, \prod$. Nu ne-am propus să dăm aceste demonstrații, dar este util să le încerci!

Exercițiu rezolvat.

Sistemele $(S_1)\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ și $(S_2)\begin{cases} (2+4\cdot 3)x+(3-4\cdot 2)y=13 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ sunt echivalente (au aceleași soluții).

Soluție.

Din proprietatea IV. rezultă $\Delta_1=\Delta_2$. Analog $\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}$ și $\Delta_{y_1}=\Delta_{y_2}$, unde $\Delta_{x_i}, i=\overline{1,2}$ se obține din Δ_i înlocuind coloana corespunzătoare necunoscutei x prin coloana termenilor liberi, iar $\Delta_{y_i}, i=\overline{1,2}$ se obține din Δ_i înlocuind coloana corespunzătoare necunoscutei y prin coloana termenilor liberi; cele două sisteme au aceeași soluție, $\left(\frac{16}{13}, \frac{11}{13}\right)$, adică sunt echivalente.

14) Fie determinanții: $d_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

$d_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $d_3=\begin{vmatrix} 1 & 2+0 & 7 \\ 2 & 3-1 & 1 \\ 5 & 4+1 & 2 \end{vmatrix}$.

Verifică prin calcul direct egalitatea $d_1+d_2=d_3$.

15) Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Arată că $A\cdot B=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ și că $\det AB=\det A\cdot \det B$.

16) Fie matricele:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculează: a) $\det A$; b) $\det B$; c) $\det(A\cdot B)$; d) $(\det A)\cdot(\det B)$.

17) Calculează determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

18) Arată că :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a(a-c) & b(b-c) \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

Aplicații

Două puncte distincte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ determină în mod unic o *dreaptă AB*.

Dacă $x_A = x_B$, atunci *dreapta verticală AB* are ecuația $x = x_A$.

Dacă $y_A = y_B$, atunci *dreapta orizontală AB* are ecuația $y = y_A$.

Dacă $x_A \neq x_B$ și $y_A \neq y_B$, atunci *dreapta AB* este *oblică* și are ecuația: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, adică: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$.

Uneori se utilizează această reprezentare chiar dacă un numitor este nul; atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero. Evident, pentru că $A \neq B$, numitorii nu se pot anula simultan.

Propoziție.

Ecuația dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ se scrie sub forma: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Propoziție.

Condiția de coliniaritate a punctelor $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ se scrie sub forma $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

În clasa a X-a am aflat cum se calculează distanța de la un punct la o dreaptă.

Fie $M(x_M, y_M)$ un punct din plan și h o dreaptă cu ecuația $ax + by + c = 0$, unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. *Distanța de la punctul M la dreapta h* este $d(M, h) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Este de asemenea cunoscut faptul că, dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ sunt două puncte din plan, atunci *distanța dintre punctele A și B* este $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Aria unui triunghi

Fie punctele distincte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și dreapta AB de ecuație $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$. Dacă $M(x_M, y_M)$ este un alt punct din plan și dacă notăm cu $\Delta = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$, atunci

$d(M, AB) = \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$ și, în consecință, obținem ...

Propoziție.

Aria triunghiului AMB cu vârfurile de coordonate $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $M(x_M, y_M)$ este dată de formula: $\mathcal{A}_{AMB} = \frac{1}{2}|\Delta|$.

19) Scrie sub formă de determinant ecuația dreptei care trece prin punctele:
a) $A(1, 2)$ și $B(2, 3)$;
b) $O(0, 0)$ și $C(1, 0)$;
c) $O(0, 0)$ și $D(0, 2)$;
d) $O(0, 0)$ și $E(2, -1)$;
e) $F(-1, 2)$ și $G(2, 1)$;
f) $H(-1, -2)$ și $I(3, -1)$.
Reprezintă, în fiecare caz, punctele și dreptele obținute într-un reper cartezian.

20) Care dintre următoarele puncte sunt coliniare?
$A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $O(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(0, 2)$, $E(2, -1)$, $F(-1, 2)$, $G(2, 1)$, $H(-1, -2)$, $I(3, -1)$, $J(4, -2)$, $K(-1, 0)$, $L(0, -3)$, $M(0, 1)$.

21) Determină $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(\alpha, 3)$, $B(2, 4)$ și $C(3, 5)$ să fie coliniare.

22) Pentru ce valori ale parametrului real α, punctele $A(\alpha, 3)$, $B(2, \alpha + 1)$ și $C(3, 5)$ sunt coliniare?

23) Arată că, oricare ar fi valoarea parametrului real α, punctele $A(\alpha, 3)$, $B(2, \alpha)$ și $C(3, 1)$ sunt necoliniare.

24) Fie punctele $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$ și $C(5, 7)$. Determină:
a) ecuația dreptei AB;
b) dacă punctele A, B, C sunt coliniare;
c) distanța de la A la BC;
d) aria triunghiului ABC.
Reprezintă punctele, dreptele și triunghiurile într-un reper cartezian.

25) Fie punctele $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(5, 7)$, $D(0, 2)$ și $E(1, 0)$.
a) Determină ecuațiile tuturor dreptelor care trec prin câte două din punctele A, B, C, D, E.
b) Care dintre punctele A, B, C, D, E sunt coliniare?
c) Formează toate triunghiurile cu vârfurile în trei dintre punctele A, B, C, D, E. Calculează cea mai mică și cea mai mare arie a triunghiurilor formate.

PROBLEME PROPUSE

1. Arată, cu ajutorul proprietăților determinanților, că:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 5 & 2\sqrt{2} & 4 & 2 \\ 6 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 19 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

d) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+x_3+x_4$,

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

2. Aplicând proprietățile determinanților, calculează punând rezultatul sub formă de produs:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x^2-1 \\ y-1 & y+1 & y^2-1 \\ z-1 & z+1 & z^2-1 \end{vmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3. Calculează determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$,

unde ω este o rădăcină cubică a unității ($\omega^3 = 1$).

4. Calculează determinantul

$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, știind că x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$.

5. Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației $x^3 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculează $A \cdot {}^tA$;
b) Calculează $\det(A \cdot {}^tA)$;
c) Arată că $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\det(A \cdot {}^tA) \geqslant 0$.

6. Rezolvă ecuația:

$\begin{vmatrix} a^2-x & ab & ac \\ ab & b^2-x & bc \\ ac & bc & c^2-x \end{vmatrix} = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7. Se consideră matricele:

$A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ z & t & x & y \\ y & x & t & z \\ t & z & y & x \end{pmatrix}$ și $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

a) Calculează $\det E$.
b) Calculează $\det(AE)$.
c) Calculează valoarea determinantului matricei A.

8. Arată că:

a) dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este nul;
b) dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 1$ elemente nule, atunci determinantul este nul.

9. Calculează determinanții de ordinul n:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Rangul unei matrice. Matrice inversabilă

Rangul unei matrice

Să considerăm sistemul $(S): \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 13 \end{cases}$.

Ecuația a treia s-a obținut adunând primele două ecuații, iar ecuația a patra a fost obținută scăzând primele două ecuații.

Pentru a rezolva sistemul (S), ne putem ocupa numai de sistemul format din primele două ecuații independente (celelalte ecuații rezultă din primele două) $(S'): \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$.

Vom spune că rangul acestui sistem este 2, pentru că rezolvarea lui se va reduce la rezolvarea unui sistem cu două ecuații.

Considerăm matricea sistemului: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Definiție.
Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leqslant \min\{m, n\}$. Un determinant de ordin r, format cu elementele matricei A situate la intersecția a r linii și r coloane, se numește *minor de ordinul r*.

De exemplu, minorul de ordinul 3 al matricei A format cu elementele de pe liniile 1, 2, 3 și coloanele 2, 3, 4 este $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$; minorul de ordinul 3 al matricei A format cu elementele de pe liniile 1, 2, 4 și coloanele 1, 2, 3 este $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Observăm că toți minorii de ordin 4 și 3 din A sunt nuli. Sunt 4 minori de ordinul 4 și $C_5^3 = 10$ minori de ordinul 3. Găsim minori de ordin 2 care sunt nenuli; de exemplu, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Vom afla că numărul de ecuații independente ale unui sistem este chiar cel mai mare ordin al unui minor nenul.

Definiție.
Matricea nulă are rangul 0. Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ nu este nulă, există un număr natural $r \leqslant \min\{m, n\}$, $r \neq 0$, astfel încât cel puțin un minor de ordinul r este nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. Acest număr r se numește *rangul matricei A* și se notează cu rang$A$.

Forma matricială a unui sistem liniar.

1) Scrie sistemele sub formă matricială:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$.

2) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 13 & 22 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculează minorii de ordinul 3 ai matricei A.

b) Calculează trei minori ai matricei A, dintre care cel puțin unul nenul.

3) Fie matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Câți minori are această matrice? Calculează minorii de ordinul 3.

Cum calculăm rangul unei matrice?

4) Determină rangul matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 12 & 7 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$;

Într-o matrice oarecare $A \in \mathcal{M}_{m,\,n}$, cu m linii și n coloane, se pot forma $C_n^r \cdot C_m^r$ minori de ordinul r.

De exemplu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ are $C_3^2 \cdot C_5^2 = 30$ minori de ordinul 2 (alegem două linii din trei în C_3^2 moduri și două coloane din cinci în C_5^2 moduri).

Vom propune trei metode pentru a micșora numărul de calcule necesare determinării rangului unei matrice.

I. Calculăm minorii de ordin maxim până când găsim un minor nenul. Dacă nu găsim calculăm minorii de ordin inferior.

II. Dacă matricea este nenulă alegem un element nenul, îl „bordăm" pe rând cu câte o linie și o coloană și calculăm minorii rezultați până găsim un minor nenul. Aplicăm procedeul de bordare asupra ultimului minor nenul găsit, până când obținem că toți minorii de ordin superior, dacă există, sunt nuli.

III. Transformăm matricea prin metode care nu schimbă valoarea rangului și care ne conduc la o matrice cu multe zerouri în care putem observa ușor un minor de ordin maxim nenul.

Rangul unei matrice rămâne neschimbat, dacă:

• la o linie (coloană) se adună o altă linie (coloană) înmulțită cu un număr;

• liniile (coloanele) se schimbă între ele.

Folosind aceste reguli (numite și *transformări elementare*), o matrice poate fi adusă la o formă în care numai elementele a_{ii}, $i = \overline{1,r}$, $r \leqslant \min\{m, n\}$ sunt nenule. *Rangul matricei A este egal cu numărul liniilor pe care sunt elemente nenule*. Această metodă este foarte apropiată de algoritmul lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare. Dacă o matrice B se obține dintr-o matrice A prin transformări elementare, scriem $A \sim B$.

Să ilustrăm aceste metode printr-un...

EXEMPLU

Să determinăm rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Metoda I.

$A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, deci $m = 3$ și $n = 4$. Cum $r \leqslant \min\{3, 4\}$, minorii de ordin maxim sunt cei de ordinul 3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 0;$$

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 0$, în total $C_4^3 = 4$ minori. În consecință, matricea are un rang mai mic decât 3. Investigăm minorii de ordinul 2.

Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, rangul matricei este 2.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

5) Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Verifică dacă rangul matricei B este calculat corect.

Soluție. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + 3l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1}}{\sim}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 \leftarrow c_3 \\ c_3 \leftarrow c_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Rangul matricei B este egal cu 3.

6) Calculează rangurile matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

7) Determină $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ are rangul 2.

Metoda II.

În matricea A, $a_{11} = 1 \neq 0$. Bordăm a_{11} cu o linie și o coloană și obținem minorul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$; deci rangul este cel puțin 2.

Bordăm Δ cu încă o linie și o coloană și obținem pe rând minorii

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix}$ amândoi nuli.

În concluzie, rangul matricei A este 2.

Metoda III.

Revenim la exemplu dat. Obținem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & 5 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ - \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evident, ultima matrice are rangul 2 și, prin urmare, matricea A are rangul 2.

Matrice inversabilă

Exprimarea matricială a sistemelor liniare $AX = B$ sugerează soluția $X = A^{-1}B$. Se pune problema determinării unei matrice notate A^{-1}, cu proprietatea $A^{-1} \cdot A = I_n$. Astfel, ecuația matricială s-ar rezolva prin analogie cu ecuația de gradul I, după cum urmează: $A^{-1} \cdot | \, AX = B$; $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$; $(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}B$; rezultă $I_n X = A^{-1}B$, cu soluția $X = A^{-1} B$.

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ este matricea unitate de ordinul n (matricea pătratică cu n linii și n coloane).

Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Definiție.

Fie A o matrice pătratică de ordin n. Matricea A este inversabilă dacă există o matrice B pătratică de ordin n astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$; matricea B se numește *inversa matricei* A și se notează A^{-1}.

Observație.

Dacă B este inversa matricei A, atunci și matricea A este inversa matricei B.

Teoremă.

Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.

8) Determină rangul matricei

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ p & 2 & q & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ în funcție de $p, q \in \mathbb{R}$.

Să verificăm dacă o matrice este inversa altei matrice.

9) Scrie matricele I_2, I_3, I_4.

10) Verifică dacă B este inversa matricei A, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

11) Verifică dacă $A^{-1} = B$, unde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{11}{32} & \frac{9}{32} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{32} & \frac{3}{32} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \end{pmatrix}$.

În ce condiții o matrice este inversabilă?

12) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculează $\det A$ și $\det B$.

b) Este A inversabilă? Dar B? De ce?

13) Există inversele matricelor următoare?

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Demonstrație.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică de ordinul n. Presupunem că există două matrice de ordinul n, B și B', astfel încât: $AB = BA = I_n$ și $AB' = B'A = I_n$.

Folosind asociativitatea înmulțirii matricelor, obținem: $B = B \cdot I_n = B \cdot (AB') = (B \cdot A)B' = I_n \cdot B' = B'$, deci $B = B'$.

Inversa matricei A se notează cu A^{-1}.

Observație.

Dacă matricea A este inversabilă, atunci:

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A^{k+p} = A^k \cdot A^p$, $\forall k, p \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $AB = AC$ sau $BA = CA$, atunci $B = C$.

Aflăm care sunt matricile inversabile din următoarea ...

Teoremă.

Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$.

Cum găsim inversa unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

- Calculăm $\det A$. Dacă $\det A \neq 0$, atunci A este inversabilă.
- Scriem *matricea transpusă* a matricei A, notată ${}^tA$, schimbând în matricea A liniile cu coloanele.

EXEMPLU

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Avem ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

- Scriem *matricea reciprocă* a lui A, notată A^*, înlocuind fiecare element al matricei transpuse ${}^tA$ prin complementul său algebric, notat δ_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, obținut astfel: $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, unde A_{ij} este minorul elementului a_{ij} din matricea ${}^tA$ (determinantul obținut din ${}^tA$ prin eliminarea liniei i și a coloanei j).

EXEMPLU

În exemplul anterior, complementul algebric al lui a_{11} din ${}^tA$ este $\delta_{11} = (-1)^{1+1} A_{11}$, unde $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, deci $\delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Analog se calculează fiecare δ_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 3$.

Se obține $A^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{pmatrix}$, matricea reciprocă a matricei A.

- Găsim *matricea inversă* a matricei A din relația $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$, adică împărțim fiecare element al matricei A^* la $\det A$ ($\det A \neq 0$).

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Cum găsim inversa unei matrice?

14) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculează inversa matricei A și apoi verifică prin calcul direct relația $A \cdot A^{-1} = I_3$.

Indicație.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -68 \neq 0,$$

deci A este inversabilă și $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ și } A^* = \begin{pmatrix} -23 & -3 & 19 \\ -1 & -9 & -11 \\ 7 & -5 & 9 \end{pmatrix},$$

deci $A^{-1} = -\dfrac{1}{68} \begin{pmatrix} -23 & -3 & 19 \\ -1 & -9 & -11 \\ 7 & -5 & 9 \end{pmatrix}$.

15) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Scrie matricele transpuse: ${}^tA$; ${}^tB$.

b) Scrie complementele algebrice ale fiecărui element din matricele ${}^tA$ și ${}^tB$.

c) Ai obținut

$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B^* = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -9 \\ -8 & -7 & -3 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$?

d) Găsește A^{-1} și B^{-1}.

e) Verifică dacă $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$ și $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$.

Propoziție.

Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 1$.

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$.

Ecuația $AX = C$ are soluția unică $X = A^{-1}C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Ecuația $XB = C$ are soluția unică $X = CB^{-1} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Ecuația $AXB = C$ are soluția unică $X = A^{-1}CB^{-1} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Demonstrație.

În ecuația $AX = C$ înmulțim ambii termeni cu A^{-1} în stânga. Obținem:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}C$; $(A^{-1}A)X = A^{-1}C$; $I_m X = A^{-1}C$; $X = A^{-1}C$.

16) Notăm $d = \det A$.

a) Arată că:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix};$$

b) Verifică relația:

$$A \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot A^*\right) = \left(\frac{1}{d} \cdot A^*\right) \cdot A = I_3, \ d \neq 0.$$

Exercițiu rezolvat.

Pentru realizarea a trei preparate farmaceutice F_1, F_2, F_3 se folosesc substanțele S_1, S_2, S_3 ce conțin elementele active A_1, A_2, A_3. Cantitățile de substanțe, respectiv de elemente active, ce intră în preparate sunt date în tabelele alăturate. Să determinăm cantitățile de elemente active conținute în substanțe astfel încât compoziția preparatelor farmaceutice să fie respectată.

	S_1	S_2	S_3
F_1	20	20	10
F_2	5	10	5
F_3	10	5	10

	A_1	A_2	A_3
F_1	3	2	8/3
F_2	1	1/2	1
F_3	2	1	1

Soluție.

Fie matricele A și B asociate celor două tabele. Cantitățile de elemente active A_i, $i = \overline{1,3}$ conținute în substanțele S_j, $j = \overline{1,3}$ vor fi date de elementele matricei X obținută din ecuația $AX = B$. Avem $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 & 0 \\ 0 & 2/15 & -1/15 \\ -1/10 & 2/15 & 2/15 \end{pmatrix}, \text{ deci } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/10 & 1/15 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 1/10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Substanța S_1 va trebui să conțină 1/10 unități de element activ A_1, 1/10 unități de element activ A_2 și 1/15 unități de element activ A_3 etc.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculează rangurile următoarelor matrice, în funcție de valorile parametrilor respectivi:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & a \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea A are rangul 2:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$.

3. Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 4 \\ 1 & b & 2 & 3 \\ 1 & 2b & 2 & 4 \end{pmatrix}$ are rangul 2;

b) $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 4 \\ 1 & b & 2 & 3 \\ 1 & 2b & 2 & 4 \end{pmatrix}$ are rangul 3.

4. Determină, dacă există, inversele următoarelor matrice:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

g) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; h) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; i) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

j) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; k) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; l) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

m) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; n) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât fiecare din următoarele matrice să fie inversabilă, apoi determină inversa fiecăreia:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $C=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ a & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $D=\begin{pmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & 1 & a \\ a & 1-a & a \end{pmatrix}$.

6. Rezolvă următoarele ecuații matriciale:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $X\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Determină valorile parametrului real a astfel încât matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ să aibă același rang.

8. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Calculează determinantul și rangul matricei A.
b) Calculează A^2 și verifică identitatea $I_3 = (I_3 - A)(I_3 + A)$.
c) Arată că matricea $I_3 - A$ este inversabilă și calculează-i inversa.

9. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Dacă $AB = A + B$, arată că matricea $A - I_n$ este inversabilă și $(A - I_n)^{-1} = B - I_n$.
b) Dacă $AB = A + B$, $BC = B + C$, $CA = C + A$, arată că $A^n = 2^{n-1}A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

10. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, arată că $\text{rang}AB \leqslant \min\{\text{rang}A, \text{rang}B\}$.

11. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $\det B \neq 0$. Arată că $\text{rang}AB = \text{rang}A$.

12. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că există $a, b \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $AB = aA + bB$. Arată că $\text{rang}A = \text{rang}B$.

13. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt matrice inversabile, arată că $\text{rang}(A + B) = \text{rang}(A^{-1} + B^{-1})$.

8. Sisteme liniare de m ecuații cu n necunoscute, $n \leqslant 4$

Fie sistemul liniar: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ de m ecuații

cu n necunoscute, $n \leqslant 4$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $b_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$.

Determinarea mulțimii soluțiilor sistemului liniar se face prin rezolvarea acestuia prin diferite metode. Indiferent de metoda folosită trebuie să precizăm tipul sistemului, adică:

- *compatibil* (dacă are soluții)
  - *determinat* (dacă are soluție unică);
  - *nedeterminat* (dacă are o infinitate de soluții);
- *incompatibil* (dacă nu are soluții).

Observație.

Următoarele proceduri aplicate unui sistem de ecuații liniare nu modifică compatibilitatea sau incompatibilitatea acestuia și nici eventualele soluții:

- adunarea unei ecuații a sistemului la o altă ecuație a sistemului;
- înmulțirea ecuațiilor sistemului prin factori nenuli;
- schimbarea ecuațiilor între ele.

Metode de rezolvare a sistemelor liniare

♦***Metoda lui Gauss*** permite rezolvarea sistemelor liniare de m ecuații cu n necunoscute. Această metodă a căpătat o importanță mai mare pentru că se utilizează în programele de calculator.

Ideea acestei metode este următoarea: sistemul liniar de m ecuații cu n necunoscute se transformă într-un alt sistem liniar echivalent în care una din necunoscute, de exemplu x_1, apare într-o singură ecuație. Spunem că x_1 a fost eliminat din celelalte $m - 1$ ecuații. Prin aceeași metodă cele $m - 1$ ecuații, fără necunoscuta x_1, se transformă astfel încât o altă necunoscută, de exemplu x_2, apare numai în una dintre acestea. Repetând procedeul, vom obține:

a) un sistem în care ultima ecuație conține numai o singură necunoscută; atunci sistemul este *compatibil determinat*;

b) un sistem în care din ultima ecuație rezultă o necunoscută x_k în funcție de următoarele necunoscute $x_k = f(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, unde $k < n$; atunci sistemul este *compatibil nedeterminat*;

c) un sistem în care o ecuație este de forma $0 = c$, $c \in \mathbb{C}^*$; atunci sistemul este *incompatibil*.

EXEMPLE

1) Să observăm modul în care se modifică, la fiecare pas, elementele sistemului și ale matricei extinse.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$-2,\ -3,\ -4,\ -3$

$+$ $:$ $+$ $+$

Să rezolvăm sistemele liniare de 4 ecuații cu 4 necunoscute.

1) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - 7y + 8z + t = 16 \\ 3x + 5y - 3z + 2t = 14 \\ 3x - y + 8z + t = 30 \\ x + 4y - 9z + 2t = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + 2z - 3t = 9 \\ 2x + y + 5z + 7t = 6 \\ 3x + 4y - 2z + 3t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z + 2t = -1 \\ 8x + 12y + 7z + 8t = 9 \\ 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$.

2) Rezolvă, prin metoda lui Gauss, sistemele liniare următoare:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 4 \\ x + 2y + 3z + 4t = 12 \\ x - 2y + 2z - 2t = -12 \\ x + 3y + 2z + t = 5 \end{cases}$.

Înmulțim prima ecuație, pe rând, cu (–2), (–3), respectiv (–4) și o adunăm cu a doua, a treia, respectiv a patra. Împărțim a doua ecuație obținută la –3. Obținem:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ 3x_3+\ 4x_4=5 \\ \quad\ \ x_2+\frac{4}{3}x_3+\frac{5}{3}x_4=3 \\ -4x_2-\ \ 8x_3-10x_4=-14 \\ -5x_2-10x_3-15x_4=-25 \end{cases} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{pmatrix} \right. \quad 4,\ 5,\ -\frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ 3x_3+\ 4x_4=5 \\ \quad\ \ x_2+\frac{4}{3}x_3+\frac{5}{3}x_4=3 \\ \qquad\quad x_3+\frac{5}{4}x_4=\frac{3}{4} \\ -\frac{10}{3}x_3-\frac{20}{3}x_4=-10 \end{cases} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{20}{3} & -10 \end{pmatrix} \right. \quad \frac{10}{3},\ -\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ 3x_3+\ 4x_4=5 \\ \quad\ \ x_2+\frac{4}{3}x_3+\frac{5}{3}x_4=3 \\ \qquad\quad x_3+\frac{5}{4}x_4=\frac{3}{4} \\ \qquad\qquad\quad x_4=3 \end{cases} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

Înlocuim x_4 în ecuația a treia, x_3 și x_4 în ecuația a doua și x_2, x_3 și x_4 în prima ecuație. Obținem soluția: $x_1=-2$; $x_2=2$; $x_3=-3$; $x_4=3$, adică soluția (–2, 2, –3, 3).

2) Să rezolvăm sistemul liniar: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$.

Soluție.

Scăzând prima ecuație din a doua și împărțind la (–2) obținem sistemul echivalent $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ \quad x_2+x_3=0 \\ \quad x_3+\frac{1}{2}x_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$. Fie

$$x_4=t,\begin{cases} x_1=1-t \\ x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ x_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \\ x_4=t \end{cases};\ S=\left\{\left(1-t,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t,t\right)\middle|\, t\in\mathbb{C}\right\};$$

(sistem compatibil nedeterminat).

3) Verifică rezolvarea sistemului liniar $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$.

Soluție.

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-20$. Cum $\Delta\neq 0$, sistemul este Cramer și $x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, $x_4=\frac{\Delta_{x_4}}{\Delta}$, unde $\Delta_{x_1}=40$, $\Delta_{x_2}=-40$, $\Delta_{x_3}=60$, $\Delta_{x_4}=-60$.

Deci $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=3$, iar Soluția sistemului este: (–2, 2, –3, 3).

4) Verifică dacă sistemul liniar: $\begin{cases} 2x+3y+4z=11 \\ 3x-2y+3z=1 \\ 5x+2y-z=-11 \end{cases}$ este rezolvat corect.

Soluție.

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}=110\neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat (are soluție unică)

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-220$, deci $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=-2$;

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & -11 & -1 \end{vmatrix}=110$, deci $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1$;

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -11 \end{vmatrix}=330$, deci $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=3$.

Mulțimea soluțiilor este S = {(–2, 1, 3)}.

3) Să rezolvăm sistemul liniar: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$.

Soluție.

Sistemul este echivalent cu: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \\ 13x_3 = 39 \\ 0 = 0 \end{cases}$

cu soluția unică $x_3 = 3$, $x_2 = 2$ și $x_1 = 1$, adică S = {(1, 2, 3)} (sistem compatibil determinat).

4) Modificăm numai ultima ecuație a sistemului liniar anterior și rezolvăm sistemul liniar obținut: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$.

Soluție.

Sistemul este echivalent cu: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \\ 13x_3 = 39 \\ 1 = 0 \end{cases}$.

Sub această formă, este evident că sistemul este incompatibil.

Observații.

• Dacă $a_{11} = 0$, putem schimba între ele două ecuații astfel încât coeficientul lui x_1 să fie diferit de zero. În mod analog procedăm cu coeficienții fiecărei necunoscute, dacă este cazul.

• Metoda lui Gauss (de eliminare succesivă) se poate aplica la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, la calculul determinanților, dar și la calcularea inversei unei matrice .

• Rezolvarea unui sistem liniar de 4 ecuații cu 4 necunoscute prin metoda reducerii succesive a necunoscutelor se scrie, în general, cu ajutorul unor formule algebrice lungi (de câte 24 de termeni). Putem scrie mai simplu soluțiile sistemului cu determinanți de ordin 4.

• Δ, valoarea determinantului unui sistem, determină compatibilitatea sistemului (existența soluțiilor), astfel:

- dacă $\Delta \neq 0$, sistemul este *compatibil determinat* (adică are o soluție unică);
- dacă $\Delta = 0$, sistemul poate fi *incompatibil* (nu are soluții) sau *compatibil nedeterminat* (are o infinitate de soluții).

♦ ***Metoda lui Cramer*** permite rezolvarea sistemelor liniare de n ecuații cu n necunoscute având determinantul asociat matricei sistemului nenul.

Soluțiile unui astfel de sistem liniar au la numitor dezvoltarea determinantului asociat matricei sistemului.

La numărătorul soluțiilor vom avea dezvoltarea determinanților obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare

Să rezolvăm sisteme liniare

5) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$;

specificând, pentru fiecare sistem, dacă este compatibil determinat, compatibil nedeterminat sau incompatibil.

6) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$.

7) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} -x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 28x + 56y - 56z = 0 \\ 39x - 78y - 78z = 0 \\ 40x - 80y - 80z = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 28x + 56y - 56z = -28 \\ 39x - 78y - 78z = -39 \\ 40x - 80y - 80z = -40 \end{cases}$;

coeficienților necunoscutei cu coloana termenilor liberi:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\ \dots$$

Teoremă. ***Metoda lui Cramer***

Dacă sistemul $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ are determinantul Δ nenul, atunci soluția sa este $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde $x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\dots,$ $x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$, unde $\Delta_{x_i}, i=\overline{1,n}$ este determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei x_i, $i=\overline{1,n}$ cu coloana termenilor liberi.

Pentru $n = 4$ soluția sistemului este (x_1, x_2, x_3, x_4), unde $x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, $x_4=\frac{\Delta_{x_4}}{\Delta}$.

Un sistem liniar care poate fi rezolvat prin metoda lui Cramer, adică numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute și are determinantul nenul, se numește *sistem Cramer*.

♦ ***Metoda matricială*** permite rezolvarea sistemelor de n ecuații cu n necunoscute având determinantul nenul.

Un astfel de sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute ($n \leqslant 4$ în cazurile studiate) poate fi exprimat matricial astfel: $AX = B$, unde A este matricea coeficienților necunoscutelor (de ordinul n), X este matricea necunoscutelor (matrice coloană) și B este matricea termenilor liberi (matrice coloană). În cazul $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dacă matricea A este inversabilă (adică $\det A \neq 0$), înmulțim la stânga ecuația $AX = B$ cu A^{-1} și obținem $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, adică $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, deci $X = A^{-1}B$. Matricea X verifică ecuația dată: $A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I_n \cdot B = B$. Ea este unică (într-adevăr, dacă ar mai exista o matrice X_1 care să verifice ecuația dată, am obține $A \cdot X_1 = B$, de unde $A^{-1} \cdot | A \cdot X = A \cdot X_1 \Rightarrow X = X_1$.

EXEMPLU

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x+y-3z=11 \\ x+5y+4z=-1 \\ -x+2y-3z=6 \end{cases}$ prin metoda matricială.

Scrierea matricială a sistemului este $AX = B$, unde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

d) $\begin{cases} 17x-17y+34z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x-2y+2z=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 17x-17y+34z=34 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x+z=-1 \end{cases}$.

8) Rezolvă următoarele sisteme prin metoda matricială:

a) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ x_1-x_2=3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=9 \\ -2x_1+x_2-3x_3=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3=-4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+3y+4z=11 \\ 3x-2y+3z=1 \\ 5x+2y-z=-11 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x_2-3x_3=-1 \\ x_1-2x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2=7 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y+z=1 \\ 2y+z=0 \end{cases}$.

Să rezolvăm sisteme liniare.

9) Fie $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ -x_1+3x_2+6x_3+8x_4=2 \\ 5x_2+9x_3+12x_4=7 \end{cases}$.

a) Calculează rangul sistemului.

b) Alegem determinantul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5$. Care sunt necunoscutele principale și necunoscutele secundare? Dar ecuațiile principale și cele secundare?

c) Câți determinanți caracteristici sunt?

d) Este sistemul compatibil? Dacă da, rezolvă-l!

Deoarece det$A$ = –68, rezultă că A este inversabilă; obținem

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{23}{68} & \frac{3}{68} & -\frac{19}{68}\\ \frac{1}{68} & \frac{9}{68} & \frac{11}{68}\\ -\frac{7}{68} & \frac{5}{68} & -\frac{9}{68}\end{pmatrix} \text{ și } X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Soluția sistemului este S = {(2, 1, –2)} (sistem determinat).

♦ ***Metoda bazată pe teorema Kronecker-Capelli și teorema lui Rouché*** permite rezolvarea sistemelor liniare de m ecuații și n necunoscute.

Presupunem că rangul matricei sistemului este r ($r \leqslant \min\{m, n\}$). Pentru a stabili dacă un sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute este compatibil, folosim una din următoarele teoreme: teorema Kronecker-Capelli sau teorema lui Rouché.

Teorema Kronecker-Capelli.

Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Definiție

Fie $AX = B$ un sistem liniar scris în formă matricială. Presupunem că A, matricea sistemului, are rangul r.

Din matricea sistemului alegem un minor nenul de ordin r, pe care îl numim *minor principal* și îl notăm Δ_p. Necunoscutele ale căror coeficienți sunt coloane în Δ_p se numesc *necunoscute principale*. Celelalte, dacă există, se numesc *necunoscute secundare*. Ecuațiile ale căror coeficienți sunt linii în Δ_p se numesc *ecuații principale*. Celelalte, dacă există, se numesc *ecuații secundare*.

Construim un *minor caracteristic*, Δ_{car}, astfel: bordăm determinantul principal Δ_p pe „orizontală“ cu coeficienții necunoscutelor principale dintr-o ecuație secundară și pe „verticală“ cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi.

Observație.

Un sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute, având rangul r, admite minori caracteristici numai dacă $m > r$ și numărul acestora este $m - r$.

Teorema lui Rouché.

Un sistem de ecuații liniare este compatibil, dacă și numai dacă toți minorii caracteristici (dacă există) sunt nuli.

Observație.

Dacă sistemul de ecuații liniare nu are minori caracteristici, atunci el este compatibil.

Rezolvăm un sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute astfel:

1) determinăm r, *rangul* sistemului (S) și stabilim dacă sistemul liniar este compatibil sau nu (fie cu teorema Kronecker-

10) Pentru ce valori ale parametrului real m, sistemul $\begin{cases} mx+y+z=1\\ x+my+z=2\\ x+y+mz=4\end{cases}$ admite soluție unică?

11) Determină $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x+y+m=1\\ x-2y+z=m\\ m+y+z=0\end{cases}$ este incompatibil.

12) Se consideră sistemul liniar $\begin{cases} mx+y-2z=2\\ 2x+y+3z=1\\ (2m-1)x+2y+z=n\end{cases}$, $m, n \in \mathbb{R}$. Pentru ce valori ale parametrilor m și n sistemul este compatibil nedeterminat?

13) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=1\\ 5x_1+7x_2=2\\ x_1-x_2=-1\\ -2x_1+4x_2=-6\end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2y+z-t=2\\ x-y-2z+3t=1\\ x+4y+5z-7t=0\end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=-2\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=3\\ -5x_1+2x_2-7x_3+7x_4=1\end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y+z=3\\ x+z=2\\ y+z=2\end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x-y+z=1\\ x+y-2z=-3\end{cases}$.

14) Fie sistemul liniar $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=-2\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=3\\ -5x_1+2x_2-7x_3+7x_4=1\end{cases}$. Alege un minor principal și scrie minorii caracteristici (dacă există).

15) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=1\\ x+3z=2\\ -x+2y-z=-1\end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y+z=0\\ x+3z=0\\ -x+2y-z=0\end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x-y=1\\ x+3y=11\\ -x-2y=-8\end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y=0\\ x+3y=0\\ -x-2y=0\end{cases}$;

Cappelli, fie cu teorema lui Rouché); dacă sistemul este incompatibil, atunci $S = \varnothing$; dacă sistemul este compatibil, atunci ...

2) alegem un *minor principal*, Δ_p și specificăm ecuațiile principale, necunoscutele principale și necunoscutele secundare ale sistemului;

3) rezolvăm prin metoda lui Cramer sistemul format din ecuațiile principale în care necunoscutele secundare se trec în membrul al doilea (acest sistem este echivalent cu sistemul dat); obținem necunoscutele principale exprimate liniar în funcție de necunoscutele secundare (care rămân parametri arbitrari).

Observații.

Dacă sistemul este compatibil, există două cazuri:

• dacă $r = n$, atunci sistemul este compatibil determinant;

• dacă $r < n$, atunci sistemul este compatibil simplu, dublu, triplu,... nedeterminat, după cum există una, două, trei ... necunoscute secundare.

EXEMPLU

1) Să rezolvăm în $\mathbb{R}$ sistemul liniar: $\begin{cases} 2x-4y+6z=1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$.

Soluție.

$r = 2$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$; necunoscute principale sunt x și z, iar necunoscută secundară y. Notăm $y = \alpha$ (număr real arbitrar) și rezolvând sistemul $\begin{cases} 2x+6z=1+4\alpha \\ x+z=2+2\alpha \end{cases}$ obținem:

$S = \left\{ \left(\frac{11}{4}+2\alpha, \alpha, \frac{-3}{4} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Deci sistemul este compatibil nedeterminat, având o infinitate de soluții de forma de mai sus (pentru fiecare α real, obținem un triplet care este soluție a sistemului).

Observație.

Soluția sistemului liniar, obținută dând valoarea zero necunoscutelor secundare, se numește *soluție de bază*. Deci $\left(\frac{11}{4}, 0, \frac{-3}{4} \right)$ este o soluție de bază a sistemului dat.

2) Să rezolvăm sistemul liniar $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=11 \\ -x-2y=-1 \end{cases}$.

Soluție.

Matricea sistemului $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și matricea extinsă $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ au rangurile 2, respectiv 3. Conform teoremei Kronecker-Capelli sistemul este incompatibil, $S = \varnothing$.

3) Să rezolvăm sistemul liniar $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$, în funcție de valorile reale ale lui λ.

c) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+3y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=0 \\ x+3y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+3y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=0 \\ x+3y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+2y-2z=1 \\ -x+3y+2z=3 \\ 4x+y-8z=-\frac{8}{5} \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x-3y+z+t=1 \\ x-3y+z-2t=-1 \\ x-3y+z+5t=6 \end{cases}$.

16) Rezolvă sistemele liniare

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x+4y+mz=8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+4y+mz=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$ în funcție de valorile reale ale parametrului m.

17) Rezolvă sistemele:

a) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=1 \\ 5x_1+7x_2=2 \\ x_1-x_2=-1 \\ -2x_1+4x_2=-6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{6} \\ y+z=-\frac{2}{3} \\ z+x=-\frac{1}{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 6x=-4y=3z \\ x+2y+2z=4 \end{cases}$.

18) Rezolvă sistemul de ecuații:

$\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$, $abc \neq 0$.

Soluție.

Determinantul sistemului este $\Delta = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$.

• Dacă $\Delta \neq 0$, adică $\lambda \neq 1$ sau $\lambda \neq -2$, atunci sistemul este Cramer și $S = \left\{\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)\right\}$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1, \lambda \neq -2$.

• Dacă $\Delta = 0$, atunci există următoarele situații:

i) dacă $\lambda = 1$, atunci toate ecuațiile se reduc la $x + y + z = 1$; sistemul este compatibil nedeterminat, $S = \{(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

ii) dacă $\lambda = -2$, atunci $\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, deci rangul sistemului este $r = 2$. Singurul minor caracteristic este

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$ deci sistemul este incompatibil.

Definiție.

Un sistem liniar în care toți termenii liberi sunt nuli, se numește *omogen*. Forma generală a unui sistem liniar omogen de m ecuații cu n necunoscute este: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$,

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Orice sistem liniar omogen este compatibil, având întotdeauna cel puțin soluția nulă $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. Dacă r este rangul matricei sistemului, avem cazurile:

• dacă $r = n$ atunci sistemul este compatibil determinat, având soluția unică $(0, 0, \ldots 0)$;

• dacă $r < n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat.

Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$.

Soluție.

Din matricea sistemului ($m = 4$, $n = 3$) obținem 4 determinanți de ordinul 3, toți nuli. Avem $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$, adică $r = 2$. Necunoscutele principale sunt x_1, x_2 și notăm $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sistemul admite și soluții nenule, obținute prin rezolvarea sistemului $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -2\alpha \\ 2x_1 - x_2 = -3\alpha \end{cases}$; $S = \left\{\left(-\frac{11}{7}\alpha, -\frac{1}{7}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Sistemul este compatibil nedeterminat.

19) Rezolvă următoarele sisteme liniare omogene:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 3z = 0 \\ 11x - y + 4z = 0 \\ x + 2t = 0 \end{cases}$.

20) Rezolvă sistemul

$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a, \\ x + z = b \end{cases}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Soluție. Adunăm ecuațiile și obținem $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. Scădem, pe rând, ecuațiile inițiale din această relație și obținem: $x = \frac{-a+b+c}{2}$, $y = \frac{a-b+c}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$ (sistem compatibil determinat)

21) Rezolvă sistemul $\begin{cases} ax = by = cz \\ mx + ny + pz = r \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p, r \in \mathbb{R}^*$.

Soluție. Se scriu primele două ecuații sub formă de rapoarte egale:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{mx + ny + pz}{\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}} = \frac{r}{\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}} = k;$$

$x = \frac{k}{a}$, $y = \frac{k}{b}$, $z = \frac{k}{c}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Rezolvă sistemele liniare următoare prin metoda lui Gauss:

a) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 14y-3z=3 \\ z=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+12y+z=5 \\ 3x-12y+8z=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x-y+z=-5 \\ x-2y-z=-3 \\ x-3y-3z=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 6x-2y+5z=-22 \\ -4x+3y+2z=9 \\ -3x+7y+8z=8 \end{cases}$.

2. Rezolvă următoarele sisteme liniare prin metoda lui Gauss:

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 3x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=6 \end{cases}$.

3. Rezolvă sistemele liniare prin metoda lui Cramer:

a) $\begin{cases} 12x-7y+6z=83 \\ 8x-4y-3z=24 \\ -2x+5y+13z=23 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+8y-4z=23 \\ 6x+2y+7z=6 \\ -x+9y-5z=38 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -8x+13y-6z=-158 \\ 7x-9y+5z=122 \\ 6x+3y-4z=-26 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y-z+t=5 \\ x-y+2z-3t=1 \\ 3x+y-t=11 \\ x-3y+5z-7t=-3 \end{cases}$.

4. Rezolvă prin metoda lui Cramer:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+2y+3z=12 \\ x-2y+2z=-12 \end{cases}$.

5. Rezolvă următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=13 \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 5x_1-3x_2+2x_3-2x_4=-3 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+5y-z-2u=8 \\ 3x-11y+u=-4 \\ x-3y-2z-2u=3 \\ 2x+3y+4z+u=-4 \end{cases}$.

6. Rezolvă sistemele pentru $m \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} mx-2y=-1 \\ x+2y=m+2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx+4y=9 \\ 9x+my=1 \end{cases}$.

7. Rezolvă următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} x-6y+z=7 \\ 2x-5y+3z=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=-1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+3y-z=2 \\ 3x-y+z=1 \\ -2x+y+2z=-1 \\ 4x-2y-3z=4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$.

8. Determină α real astfel încât sistemul liniar $\begin{cases} \alpha x+(\alpha+1)y=2\alpha \\ 2\alpha x+(\alpha+3)y=4\alpha \end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat.

9. Pentru ce valori ale lui m sistemele liniare următoare sunt compatibile?

a) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 3x-2y=2 \\ x+my=6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=m \\ 2x-3y=8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-my=10 \\ 3x+my=5m \end{cases}$

10. Arată că următoarele sisteme liniare sunt compatibile, pentru $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x+y=m \\ mx+ny=m^2 \\ nx-my=mn \end{cases}$; b) $\begin{cases} (b-c)(c-a)x+(a-b)^2y=1 \\ (c-a)(a-b)x+(b-c)^2y=1 \\ (a-b)(b-c)x+(c-a)^2y=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (m-a)x+(m-b)y=a-b \\ (m-b)x+(m-c)y=b-c \\ (m-c)x+(m-a)y=c-a \end{cases}$.

11. Pentru ce valori ale lui a și b fiecare dintre sistemele liniare următoare este compatibil?

$\begin{cases} 2x-y=5 \\ ax+2y=2b \\ 3x+2y=a+1 \\ x-3y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2x+ay=b+6 \\ 3x+3y=6 \\ 2ax-by=12 \end{cases}$; $\begin{cases} ax+by=1 \\ (b-1)x+y=2 \\ 2x+3y=3 \\ ax+(b-3)y=4 \end{cases}$.

12. Rezolvă sistemele liniare următoare în raport cu parametrul real λ.

a) $\begin{cases} 2x+\lambda y=8 \\ \lambda x-2y=-1 \\ x+2y=\lambda+2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$.

13. Rezolvă următoarele sistemele liniare:

a) $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x-y+mz=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ 3x+5y-7z=0 \\ 4x-5y-6z=0 \end{cases}$.

14. Pentru ce valori ale lui m următoarele sisteme liniare admit și soluții diferite de soluția nulă?

a) $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+my+z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx+my+z=0 \\ mx+y+mz=0 \\ x+my+mz=0 \end{cases}$.

15. Determină condiția ca sistemul liniar următor $\begin{cases} x=by+cz \\ y=ax+cz \\ z=ax+by \end{cases}$ să admită și soluții nenule.

9. Interpretarea geometrică a sistemelor liniare cu două necunoscute

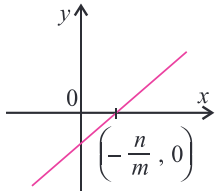
Fiecare ecuație a unui sistem liniar cu două necunoscute se reprezintă în plan printr-o dreaptă.

Pentru a *interpreta geometric* un sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute vom reprezenta grafic dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului. Coordonatele punctului de intersecție, dacă există, verifică simultan ecuațiile sistemului și reprezintă soluția acestui sistem.

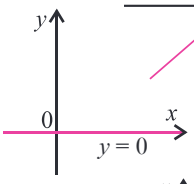
SĂ NE AMINTIM

Considerăm ecuația $ax + by + c = 0$, cu $b \neq 0$ și funcția $y = mx + n$, unde $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$, a cărei reprezentare este o dreaptă.

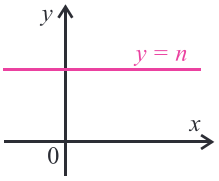
• Dacă $m \neq 0$, atunci dreapta $y = mx + n$ intersectează axa Ox în punctul $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$.



• Dacă $m = 0$ și $n = 0$, atunci dreapta $y = 0$ reprezintă axa Ox.



• Dacă $m = 0$ și $n \neq 0$, atunci dreapta $y = n$ reprezintă o paralelă la axa Ox, deci nu are puncte de intersecție cu Ox.



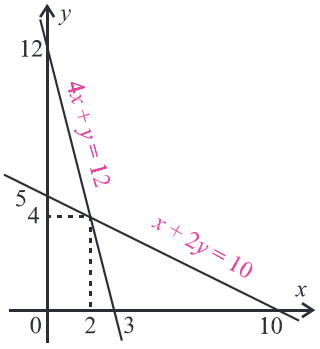
EXEMPLU

Să interpretăm geometric sistemul:

1) $\begin{cases} 4x + y = 12 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$.

Sistemul are soluția unică $x = 2$, $y = 4$, deci S = {(2, 4)} (sistem compatibil determinat).

Cele două ecuații ale sistemului reprezintă ecuațiile a două drepte care se intersectează în punctul (2, 4).

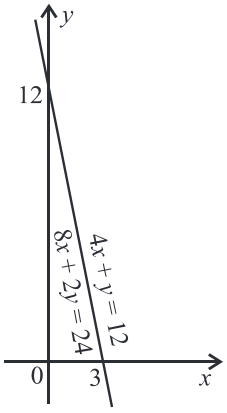


2) Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 4x + y = 12 \\ 8x + 2y = 24 \end{cases}.$$

Obținem o infinitate de soluții: S = {(x, y) | y = 12 – 4x, x ∈ ℝ} (sistem compatibil nedeterminat).

Cele două ecuații ale sistemului sunt ecuațiile a două drepte care coincid (coordonatele oricărui punct de pe dreapta $4x + y = 12$ reprezintă o soluție a sistemului).



Să rezolvăm sisteme liniare.

1) Fie sistemul liniar $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$.

a) Rezolvă sistemul.

b) Reprezintă grafic, în același reper cartezian, dreptele de ecuații $y = 2x - 1$ și $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

c) Găsește coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

d) Ce legătură există între soluția sistemului liniar dat și coordonatele punctului de intersecție al dreptelor date?

e) Pornind de la interpretarea geometrică a mulțimii soluțiilor unui sistem compatibil determinat, dă exemplu de un astfel de sistem liniar. Rezolvă-l.

2) Fie sistemul liniar $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$.

a) Rezolvă sistemul.

b) Reprezintă grafic, în același reper cartezian, dreptele de ecuații d_1: $x - 2y = 1$ și d_2: $2x - 4y = 2$. Ce poți spune despre d_1 și d_2?

c) Ce interpretare geometrică are mulțimea soluțiilor sistemului liniar dat?

d) Pornind de la interpretarea geometrică a mulțimii soluțiilor unui sistem liniar compatibil nedeterminat, dă exemplu de un astfel de sistem liniar. Rezolvă-l!

3) Fie sistemul liniar $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$.

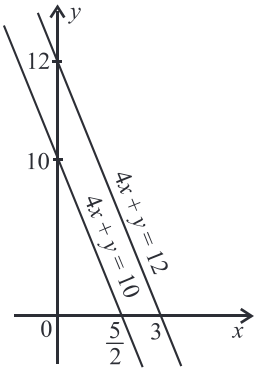
a) Rezolvă sistemul.

b) Reprezintă grafic, în același reper cartezian, dreptele de ecuații d_1: $x + y = 2$ și d_2: $2x + 2y = 1$. Ce poziție are dreapta d_1 față de dreapta d_2?

c) Interpretează geometric soluția sistemului.

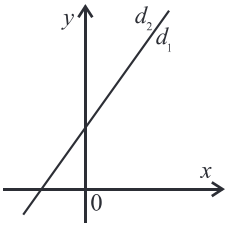
d) Pornind de la interpretarea geometrică a mulțimii soluțiilor unui sistem liniar incompatibil, dă un exemplu de un astfel de sistem. Rezolvă-l.

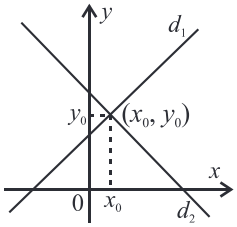
3) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 4x+y=12 \\ 4x+y=10 \end{cases}$ prin metoda reducerii sau metoda substituției și obținem S = ∅ (sistem incompatibil). Cele două ecuații ale sistemului reprezintă două drepte paralele, deci nu au nici un punct comun.



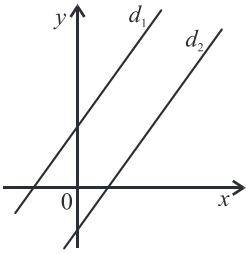
În interpretarea geometrică a unui sistem liniar cu 2 necunoscute putem avea următoarele situații:

• sistemul are o infinitate de soluții și o infinitate de puncte de intersecție ale celor două drepte; în acest caz cele două drepte coincid; uneia dintre necunoscute i se poate da o valoare arbitrară, iar cealaltă este determinată în funcție de prima;





• sistemul admite o soluție unică; în acest caz dreptele se intersectează într-un singur punct;



• sistemul nu are soluții; dreptele sunt distincte și paralele.

Ce se întâmplă dacă sistemul este format din mai mult de două ecuații cu două necunoscute? Imaginează astfel de situații!

EXEMPLU

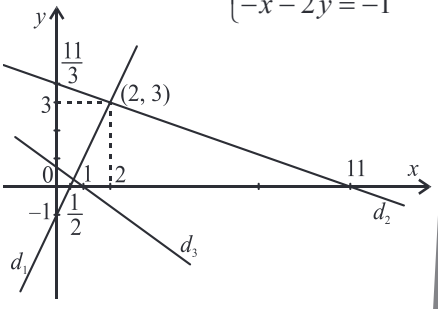
Să interpretăm geometric sistemul: $\begin{cases} 2x-\ \ y=1 \\ x+3y=11 \\ -x-2y=-1 \end{cases}$

Fiecare ecuație a sistemului reprezintă ecuația unei drepte în plan:

$d_1: 2x-y-1=0;$

$d_2: x+3y-11=0;$

$d_3: x+2y-1=0.$



Observăm că $d_1 \cap d_2 = \{(2, 3)\}$ și acest punct nu aparține dreptei d_3, deci sistemul este incompatibil.

4) Rezolvă sistemele liniare și interpretează geometric mulțimea soluțiilor fiecărui sistem:

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+3y=-2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=7 \end{cases}$.

5) Rezolvă sistemele și interpretează geometric soluția obținută.

a) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 2x+y=3 \\ 7x-y=6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-3y=0 \\ 3x+2y=0 \\ y-5=0 \end{cases}$.

6) Rezolvă sistemele liniare și interpretează mulțimea soluțiilor fiecărui sistem:

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \\ 3x+6y=12 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+3y=-2 \\ x-2y=3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=7 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=11 \\ -x-2y=-8 \end{cases}$.

7) Fie sistemul $\begin{cases} x+y=1 \\ x+my=1 \\ x+(2m-1)y=1 \end{cases}$.

a) Pentru ce valori ale lui m soluția sistemului reprezintă o dreaptă în plan?

b) Pentru ce valori ale lui m sistemul este incompatibil?

PROBLEME PROPUSE

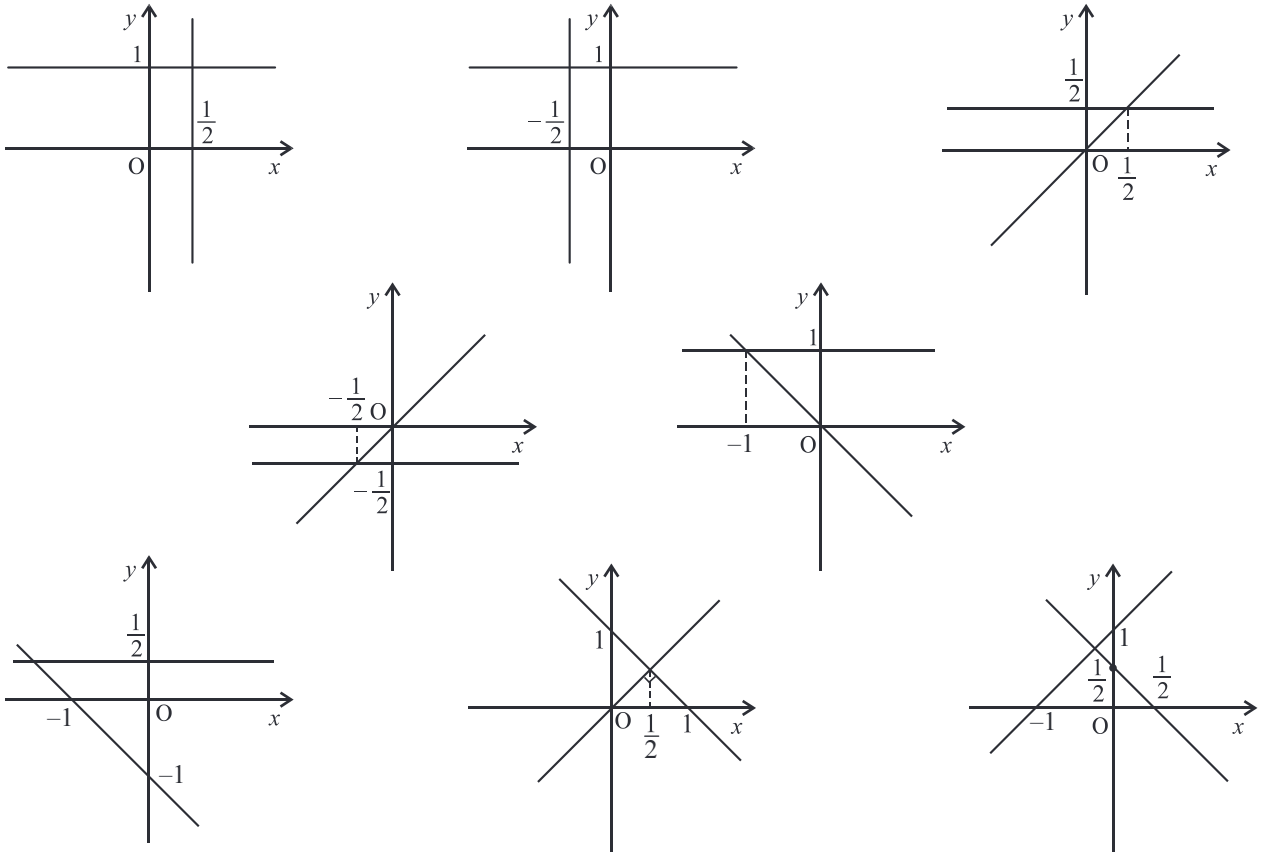
1. Interpretează geometric sistemele liniare :

a) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x+8y=4 \\ x+4y=2 \end{cases}$.

2. Interpretează geometric sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \\ x+2y=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x+y=13 \\ 2x+3y=13 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 7x-4y=1 \\ x+2y=-1 \\ 3x-12y=5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ x+y=-1 \\ x-3y=2 \end{cases}$.

4. Scrie ecuațiile sistemelor corespunzătoare dreptelor reprezentate mai jos și calculează coordonatele punctelor de intersecție ale acestor drepte.



Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculează A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Arată că matricea A este inversabilă.
c) Rezolvă ecuația $AX=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
d) Calculează $A^3 - 3A + 2I_2$.

2. Fie sistemul: $\begin{cases}x+\alpha y+2z=1\\ 2x+2y+z=-1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}\\ x+y-z=\beta\end{cases}$.

a) Rezolvă sistemul pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 1$.
b) Rezolvă sistemul pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 0$.
c) Rezolvă și discută sistemul în raport cu parametrii α și $\beta \in \mathbb{C}$.

Testul 2

1. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases}x-y+z=0\\ x-2y+3z=0,\ \text{unde } (x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3.\\ x-3y+5z=0\end{cases}$$

Notăm cu A matricea sistemului.
a) Calculează determinantul și rangul matricei A.
b) Rezolvă sistemul.
c) Găsește o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8$.

2. În mulțimea permutărilor cu 4 elemente, S_4, considerăm permutările

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},$$

precum și submulțimea $H = \{x \in S_4 \mid x^2 = e\}$.
a) Arată că $e \in H$.
b) Arată că $\sigma \in H$ și $\tau \in H$.
c) Arată că $\sigma\tau \notin H$.

Testul 3

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, și mulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R}$ și $X(a) = I_2 + aA\}$.

a) Verifică dacă $A^2 = 3A$.
b) Verifică dacă $I_2 \in G$.
c) Arată că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$.
d) Arată că $X(a)\cdot X\left(-\frac{1}{3}\right)=X\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
e) Arată că, dacă $a\neq-\frac{1}{3}$, atunci $X(a)\cdot X\left(\frac{-a}{1+3a}\right)=I_2$.
f) Utilizând metoda inducției matematice, demonstrează că $(X(a))^n=X\left(3^{n-1}\left(a+\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
g) Determină $t \in \mathbb{R}$, pentru care

$$X\left(\frac{-2007}{3}\right)\cdot X\left(\frac{-2006}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X(0)\cdot X\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{2007}{3}\right)=$$
$$=X(t).$$

Testul 4

1. Se consideră matricele

$$A=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\ \text{și } C=A+B.$$

a) Demonstrează că rang $(A + B) = 3$.
b) rată că $A^2 = -6A$ și $B^2 = 6B$.
c) Arată că $AB = BA$.
d) Demonstrează prin inducție că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem: $X^n = t^{n-1} \cdot X$.
e) Determină matricea C^n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(*Bacalaureat 2000 – varianta 4 economic*)

2. Se consideră sistemul $\begin{cases}-x-2y+3z=1\\ 2x-y-z=2\\ mx-3y+2z=3\end{cases}$,

m parametru real și A matricea sistemului.
a) Calculează determinantul matricei A.
b) Determină valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
c) Pentru $m = 1$ rezolvă sistemul.

(*Bacalaureat* 2000 – *varianta 8 – economic*)

Elemente de analiză matematică

Mulțimea numerelor reale. Funcții reale. Șiruri de numere reale

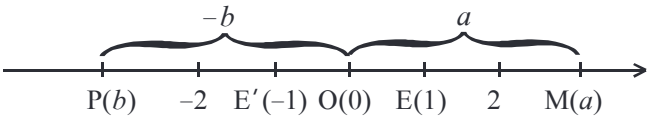
1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală

Dreapta reală

SĂ NE AMINTIM

Folosirea numerelor la măsurarea lungimilor a condus la reprezentarea lor pe o dreaptă.

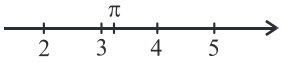
Definiție.
Se numește *axa numerelor* (sau *axă de coordonate*, sau *dreapta reală*) o dreaptă d pe care sunt fixate: un punct O (origine), un segment OE (de lungime unitate) și un sens pozitiv (de la O spre E) .



Numărului 0 îi corespunde originea axei O. Numărului pozitiv a îi corespunde punctul de pe semidreapta (OE aflat la distanța a de O. Unui număr negativ b îi corespunde punctul de pe (OE' situat la distanța $-b$ de O. Punctul $P(x)$, asociat numărului x, se numește imaginea lui x, iar numărul x se numește abscisa punctului $P(x)$.

Dintre două puncte de pe axa numerelor, abscisa celui din dreapta este mai mare decât abscisa celuilalt punct.

Putem reprezenta numai porțiunea de axă care ne interesează.



Distanța dintre $P(x)$ și O este : $d(P(x), O) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Distanța dintre punctele $P(x)$ și $P'(y)$ este $d(P(x), P'(y)) = |x - y|$.

Cum se reprezintă numerele?

1) Reprezintă pe axa numerelor reale punctele de abscisă:
a) –3; b) –1; c) 2; d) 3; e) 5; f) 2,5;
g) –1,5; h) π; i) $0{,}5\cdot\pi$; j) 0,8 ; k) 1,7; l) –1,3
m) 1,5 ; n) $\frac{3}{4}$; o) $\sqrt{2}$; p) $-\sqrt{3}$; r) $\sqrt{5}$.

Indicație.
Pentru $\sqrt{2}$ folosește diagonala unui pătrat de latură 1.

2) Arată că: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}$,

3) Calculează:
a) $|-3|$; b) $|2|$; c) $|1-\sqrt{2}|$; d) $|\sqrt{3}-2|$.

4) Explicitează în funcție de numărul real m:
a) $|m+3|$; b) $|m+\sqrt{2}|$; c) $|m-3|+|m+3|$.

5) Reprezintă pe axă mulțimile:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid d(P(x), 0) = 2\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid d(P(x), 0) \leqslant 2\}$,
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid d(P(x), 0) > 2\}$.

Teoremă. ***Proprietățile modulului***

Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem următoarele proprietăți:

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; 2. $|a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$; 3. $|-a| = |a|$;

4. $|ab| = |a| \cdot |b|$; 5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$;

6. $|a| = b, b > 0 \Leftrightarrow a \in \{-b; b\}$ 7. $|a| \leqslant b, b \geqslant 0 \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$;

8. $|a| \geqslant b, b \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant -b$ sau $a \geqslant b$; 9. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;

10. $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$.

6) Determină distanța dintre punctele:

a) $A(2)$ și $B(3)$; b) $A(-2)$ și $B(3)$;

c) $A(-\sqrt{3})$ și $B(2)$; d) $A(\sqrt{3})$ și $B(2)$.

7) Arată că:

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\big(|x-a| + |x-b|\big), \forall a, b, x \in \mathbb{R}.$$

Ordinea numerelor reale și intervale de numere reale

Mulțimea numerelor reale este înzestrată în mod natural cu trei tipuri de structuri, fundamentale pentru gândirea umană: structura algebrică, structura de ordine, structura topologică.

Structura algebrică a numerelor reale este dată de operațiile de adunare și înmulțire.

Structura de ordine pe $\mathbb{R}$ este dată de relația $\leqslant$ (sau poate fi definită de relațiile înrudite: $<, >, \geqslant$).

Relația de ordine a numerelor reale este definită de următoarele proprietăți:

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \leqslant a$ (reflexivitate) 2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ și $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (antisimetrie)

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ și $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (tranzitivitate) 4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ sau $b \leqslant a$

Proprietăți de compatibilitate ale relației de ordine „$\leqslant$" cu operațiile din $\mathbb{R}$

Pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$ avem: 1) $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$ 2) $a \leqslant b$ și $c \geqslant 0 \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c$

Utilizând proprietățile de mai sus, demonstrează următoarele proprietăți ale relației de ordine:

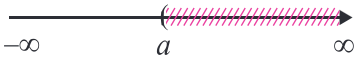
1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0 \Rightarrow a \cdot b \geqslant 0$ 2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ și $b \leqslant 0 \Rightarrow a \cdot b \leqslant 0$

3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant 0$ și $b \leqslant 0 \Rightarrow a \cdot b \geqslant 0$ 4) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, $c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$

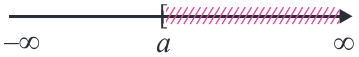
5) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leqslant b \Rightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$

Cu ajutorul relației de ordine putem să definim intervalele. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\} = (a, \infty)$

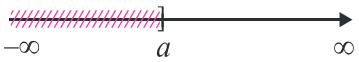


2) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqslant a\} = [a, \infty)$

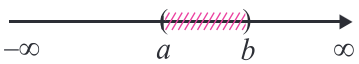


3) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\} = (-\infty, a)$

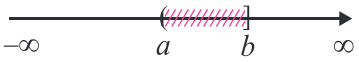
4) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leqslant a\} = (-\infty, a]$



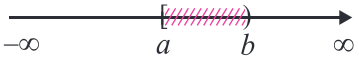
5) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\} = (a, b)$



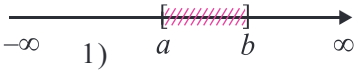
6) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\} = (a, b]$



7) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\} = [a, b)$



8) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$

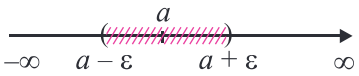


1)

9) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, +\infty)$

5′) Pentru $\varepsilon > 0$, un caz particular este intervalul centrat în a, adică $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Observație. $[a, a] = \{a\}$, $(a, a) = \varnothing$



Dreapta reală încheiată

Până acum am lucrat cu simbolurile ∞ și $-\infty$. Extindem în $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ordinea și operațiile din $\mathbb{R}$.

Definiție.

Notăm $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $\overline{\mathbb{R}}$ se numește *dreaptă reală încheiată*. Pentru orice număr real x considerăm:

- $-\infty < x < \infty$
- $x + \infty = \infty + x = \infty$
- $x - \infty = -\infty + x = -\infty$
- $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} \infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$
- $\dfrac{x}{\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$
- $\infty + \infty = \infty$; $-\infty - \infty = -\infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $-\infty \cdot \infty = -\infty$; $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Nu definim și nu dăm sens scrierilor:

- $\infty - \infty$
- $-\infty + \infty$
- $0 \cdot (\pm\infty)$
- $(\pm\infty) \cdot 0$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$

Mulțimi mărginite

În continuare, vom remarca acele numere care sunt mai mici sau mai mari decât toate elementele unei mulțimi.

Definiții.

Fie A o mulțime nevidă de numere reale.

Un număr real m se numește *minorant* pentru A dacă m este mai mic sau egal decât orice număr din A ($m \leqslant x$, $\forall x \in A$).

Un număr real M se numește *majorant* pentru A dacă M este mai mare sau egal decât orice număr din A ($M \geqslant x$, $\forall x \in A$).

A se numește *mărginită superior* (*majorată*) dacă admite majorant.

A se numește *mărginită inferior* (*minorată*), dacă admite minorant.

A se numește *mărginită* dacă este mărginită superior și inferior.

O *mulțime* nevidă care nu este mărginită se numește *nemărginită*.

Observație. O mulțime este nemărginită dacă nu este mărginită superior sau nu este mărginită inferior.

Teoremă. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă.

I. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) mulțimea A este mărginită;

2) există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leqslant x \leqslant b$, $\forall x \in A$;

3) există $M \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leqslant M$, $\forall x \in A$.

II. A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x_M \in A$ cu $|x_M| > M$.

Demonstrație.

I. 1) $\Leftrightarrow$ 2) A este mărginită dacă și numai dacă admite un minorant a și un majorant b; adică: $\forall x \in A$, $a \leqslant x \leqslant b$.

3) $\Rightarrow$ 1) Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leqslant M$, $\forall x \in A$, atunci mulțimea A admite $-M$ ca minorant și M ca majorant, adică: $\forall x \in A$, $-M \leqslant x \leqslant M$.

1) $\Rightarrow$ 3) Reciproc, dacă A este mărginită, atunci există numerele a și b astfel încât $a \leqslant x \leqslant b$, $\forall x \in A$.

Fie $M = max\{|a|, |b|\}$. Avem $-M \leqslant -|a| \leqslant x \leqslant |b| \leqslant M$, $\forall x \in A$.

Cercetăm dacă mulțimea este mărginită!

8) Reprezintă pe axă fiecare dintre intervalele următoare:

a) $(1, \infty)$; b) $(-7, \infty)$;

c) $[2, \infty)$; d) $\left[-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$;

e) $(-\infty, -9)$; f) $(-\infty, 3)$;

g) $(-\infty, -4]$; h) $(-\infty, 5)$;

i) $(2, 7)$; j) $[-5, 3]$;

k) $(2, 7]$; l) $[-3, 5)$.

9) a) Care dintre intervalele de mai sus sunt minorate în $\mathbb{R}$?

b) Care dintre intervalele de mai sus sunt majorate în $\mathbb{R}$?

c) Care dintre intervalele de mai sus sunt mărginite în $\mathbb{R}$?

10) Reprezintă pe dreapta reală intervalele: a) $\left[1, \sqrt{2}+1\right]$;

b) $\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$; c) $\left(-\infty, \sqrt{2}\right]$.

11) Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. Dă exemplu de un minorant și de un majorant al mulțimii A.

12) Fie $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leqslant 8\}$.

Dă exemplu de un majorant al mulțimii B. Mulțimea B admite un minorant?

II. Demonstrația se reduce la un calcul logic. Ne vom baza pe următoarele teoreme de logică:

a) $\forall\, q$ și r propoziții: $(r \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil r \Leftrightarrow \rceil q)$.

b) $\forall$ $P(x, y)$ predicat: $\rceil(\exists\, x\ \forall\, y\ P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall\, x\ \exists\, y\ \rceil P(x, y))$;

$\rceil(\forall\, x\ \exists\, y\ P(x, y)) \Leftrightarrow \exists\, x\ \forall\, y\ \rceil P(x, y)$

Ca urmare, sunt adevărate următoarele propoziții:

A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M > 0,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant M$

A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists x_M \in A,\ |x_M| > M$

(am notat x_M deoarece acest număr depinde eventual de M).

Definiție.

Fie A o mulțime nevidă de numere reale.

Numărul $m \in \mathbb{R}$ se numește *minimul* mulțimii A și se notează $minA$, dacă m este minorant pentru A și $m \in A$.

Numărul $M \in \mathbb{R}$ se numește *maximul* mulțimii A și se notează $maxA$, dacă M este majorant pentru A și $M \in A$.

Vom demonstra că minimul (ca și maximul) unei mulțimi, dacă există, este unic: fie A o mulțime reală; presupunem că a și m sunt minime în A, deci $a, m \in A$; rezultă $m \leqslant a$ și $a \leqslant m$, deci $a = m$. În concluzie, $\min A$ este unic.

Definiție.

Fie A o mulțime de numere reale, nevidă.

Cel mai mare minorant (dacă există) al mulțimii A se numește *infimum* (*margine inferioară*) pentru mulțimea A și se notează $\inf A$.

Cel mai mic majorant al lui A (dacă există) se numește *supremum* (*margine superioară*) pentru A și se notează $\sup A$.

Observații.

♦ Dacă $\exists\, \inf A$ și $\inf A \in A$, atunci $\inf A = \min A$.

♦ Dacă $\exists\, \sup A$ și $\sup A \in A$, atunci $\sup A = \max A$.

13) Fie $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 > 1\}$. Mulțimea C admite un minorant? Dar un majorant?

14) Găsește minoranți și (sau) majoranți, dacă există, pentru:

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 3\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ și } x^2 \geqslant 3\}$.

15) Reprezintă pe axa reală fiecare din mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 4\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 2\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$.

16) a) Precizează minimul și maximul, dacă există, pentru fiecare din mulțimile A, B, C și D de la ex. **15**.

b) Precizează marginea inferioară și marginea superioară, dacă există, pentru mulțimile A, B, C, D (exercițiul **15**).

17) Pornind de la ...

Axioma lui Cantor.

Orice mulțime de numere reale, nevidă, mărginită superior admite supremum.

demonstrează următoarea ...

Teoremă.

Orice mulțime nevidă de numere reale mărginită inferior admite infimum.

Indicație. Pentru $A \neq \varnothing$, $A \subset \mathbb{R}$, A minorată, notăm $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Obținem $\inf A = -\sup(-A)$.

Vecinătăți în $\mathbb{R}$

În continuare, vom vedea cum *se leagă* între ele numerele reale. Mai exact, că orice număr real are o vecinătate și în orice vecinătate, oricât de mică, a unui număr real se află o infinitate de numere reale. Ca să studiem unele numere vom apela la vecinii lor. În acest caz putem parafraza un proverb astfel: „Spune cu cine te învecinezi ca să-ți spun cine ești".

Definiție.

O mulțime de numere reale V este *vecinătatea numărului real* a dacă există $r > 0$ astfel încât $(a - r, a + r) \subset V$.

Notăm cu $\mathcal{V}(x)$ *mulțimea vecinătăților numărului* x.

Un tip de vecinătăți ale unui punct a sunt intervalele simetrice de centru a și rază r, notate $(a - r, a + r)$.

Consecință.

O mulțime V nu este o vecinătate a punctului a dacă $\forall\, r > 0$, intervalul $(a - r, a + r) \not\subset V$.

Să lucrăm cu vecinătăți!

18) Arată că: a) $(0, 2) \in \mathcal{V}(1)$; b) $(0, 2) \notin \mathcal{V}(0)$; c) $[0, 1] \notin \mathcal{V}(0)$.

19) Este $(-\infty, 0)$ o vecinătate a lui -3?

20) Arată că intervalul $[0, 2]$ este vecinătate a oricărui număr $a \in (0, 2)$, dar nu și pentru $a \in \{0, 2\}$.

Propoziție.
Intervalele (a, b) sunt vecinătăți pentru orice punct al lor.

Demonstrație.

Fie $x \in (a, b)$ și $r = min\{x - a, b - x\} > 0$. Avem
$V = (x - r, x + r) \subset (a, b)$ deoarece
$a = x - (x - a) \leqslant x - r < x < x + r \leqslant x + (b - x) = b$.

Orice vecinătate a unui punct este vecinătate pentru o infinitate de puncte. De exemplu, intervalul $[0, 1]$ este vecinătate pentru orice punct din $(0, 1)$. Deci, o vecinătate nu caracterizează un punct, însă mulțimea tuturor vecinătăților caracterizează perfect punctul.

Observații.

♦ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists V_1 \in \mathcal{V}(x), V_2 \in \mathcal{V}(y)$ cu $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (oricare ar fi două numere reale diferite, ele au două vecinătăți disjuncte).

♦ $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} V = \{x\}$
(intersecția tuturor vecinătăților unui punct este chiar punctul).

Vecinătăți în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Cum legăm $-\infty$ și ∞ de mulțimea $\mathbb{R}$? Prin vecinătăți, desigur!

Definiție.
O mulțime V din $\overline{\mathbb{R}}$ este o *vecinătate a lui* $-\infty$ dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty, m) \subset V$. O mulțime V din $\overline{\mathbb{R}}$ este o *vecinătate a lui* ∞ dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $(M, +\infty] \subset V$.
O mulțime V din $\overline{\mathbb{R}}$ este vecinătate a lui x dacă $V \cap \mathbb{R} \in \mathcal{V}(x)$.

1) $[0, \infty]$ este vecinătate a lui ∞.

2) $\overline{\mathbb{R}}$ este vecinătate a oricărui punct al său (rezultă din definiția vecinătății unui număr real, aplicată la $-\infty$ și ∞).

3) $\mathbb{R}$ nu este vecinătate a lui ∞ deoarece $\infty \notin \mathbb{R}$.

Definiție.
Fie A o submulțime a lui $\overline{\mathbb{R}}$.
Un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (număr real, $-\infty$ sau ∞) este *punct de acumulare* pentru mulțimea A dacă $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A - \{x\} \neq \varnothing$.
Notăm cu A' *mulțimea punctelor de acumulare* ale lui A.
Un element x din A care nu este punct de acumulare pentru A se numește *punct izolat* al lui A, adică: dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \{x\}$

Fie $A = \{0, 1\} \cup (2, 3)$

0 și 1 sunt puncte izolate în A;
$A' = [2, 3]$, adică punctele 2, 3 precum și orice punct din $(2, 3)$ sunt puncte de acumulare pentru A.

21) Dacă $0 \leqslant x < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, atunci $x = 0$.

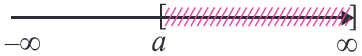
22) Fie $a \in \overline{\mathbb{R}}$; definim următoarele intervale:

$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x < a\} = [-\infty, a)$

$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leqslant a\} = [-\infty, a]$

$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x > a\} = (a, \infty]$

$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x \geqslant a\} = [a, \infty]$



Reprezintă pe axa reală intervalele:
a) $(2, \infty]$; b) $[-\infty, -6)$;
c) $[-3, \infty]$; d) $[-\infty, 5]$.

23) Fie $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Demonstrează că:
a) dacă $\forall y \in \mathbb{R}, y < x$, atunci $x = \infty$.
b) dacă $\forall y \in \mathbb{R}, y > x$, atunci $x = -\infty$.

24) Fie $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:
a) $V \in \mathcal{V}(a)$ și $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(a)$;
b) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$;
c) $V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow a \in V$;
d) $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists W \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall b \in W, W \in \mathcal{V}(b)$.

25) Arată că:
a) $\pi \in (0, \pi)'$, unde $(0, \pi)'$ este mulțimea punctelor de acumulare din intervalul $(0, \pi)$;
b) $(\pi, 5)' = [\pi, 5]$;
c) π este punct de acumulare pentru mulțimea trunchierilor sale, $\left\{\frac{[\pi \cdot 10^n]}{10^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

26) Arată că originea este punct de acumulare pentru mulțimile următoare:
a) $\left\{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$; b) $(0, 5)$; c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
d) $\mathbb{Q}$; e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; f) $\mathbb{R} \setminus \{0,5\}$;
g) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $x \in \mathbb{R}$. Folosind proprietățile modulului, explicitează următoarele expresii:

a) $E(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$;

b) $E(x) = |x^2 - 5x + 6|$;

c) $E(x) = |x - 2| + |3 - x|$.

2. Reprezintă pe dreapta reală următoarele mulțimi:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 2\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leqslant 1\}$;

$C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |1 - 2x| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$;

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 2\}$;

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \geqslant 1\}$;

$F = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |1 - 2x| \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

3. Exprimă cu ajutorul modulului următoarele inegalități, pentru $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $a - \frac{1}{2} < b < a + \frac{1}{2}$;

b) $b < a - \frac{1}{2}$ sau $b > a + \frac{1}{2}$.

4. Reprezintă pe axa reală mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 3) \leqslant 1\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,1) > 2\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant d(x, 3) \leqslant 3\}$.

5. Determină $n \in \mathbb{N}^*$ dacă:

a) $\frac{1}{n} > \frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{n} < \frac{1}{5}$;

c) $\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \frac{1}{100}$; d) $\left|\frac{2^n+1}{2^n+3} - 1\right| < \frac{1}{10}$.

6. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arată că:

a) $\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$;

b) $\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$;

c) $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2(\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\})$.

7. Demonstrează prin inducție matematică:

$\forall\, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$|x_1 + x_2 + .. + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice număr real x există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n}$.

9. Determină infimum, supremum, minimum, maximum (dacă există) pentru următoarele mulțimi reale:

a) $(-2, 1]$; b) $[-1, 1) \cup (2, 3]$; c) $\{-3\} \cup (0, 100)$;

d) $\left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$; e) $\left\{\frac{3^n - 1}{3^n + 1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

10. Care dintre mulțimile următoare sunt vecinătăți ale lui 0,5:

a) $(0, +\infty)$; b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; c) $(-\infty, -1)$;

d) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r\right], r > 0$; e) $\mathbb{Z}$; f) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$?

11. Arată că submulțimile următoare sunt nemărginite și calculează inf, sup, min și max, dacă acestea există.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 2\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ x^2 \geqslant 2\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x \leqslant 0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x < 0\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 \leqslant 0\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 < 0\}$;

g) $\left\{\frac{x^2}{x+1} \mid x > 0\right\}$;

h) $\{x - \sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

12. Determină punctele de acumulare și punctele izolate ale mulțimilor următoare:

a) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\right\}$; b) $\left\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}^*\right\}$;

c) $(-\infty, -3) \cup [5, +\infty)$; d) $\mathbb{Z}$;

e) $\mathbb{N}$; f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

g) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h) $(-\infty, -3) \cup \{1\}$.

2. Funcții reale de variabilă reală

SĂ NE AMINTIM

Se numește *funcție reală de variabilă reală* o funcție $f : E \to F$, dacă E și F sunt submulțimi nevide ale mulțimii numerelor reale.

În continuare, vom folosi termenul de funcție înțelegând că este vorba de o funcție reală de variabilă reală.

Fie E o *mulțime simetrică* față de origine, adică o mulțime de numere reale cu proprietatea $-x \in E$, $\forall x \in E$; fie funcția $f : E \to \mathbb{R}$.
f se numește *funcție pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in E$.
f se numește *funcție impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in E$.

Fie $T \in \mathbb{R}^*$ și E o mulțime de numere reale cu proprietatea că $x + T \in E$ și $x - T \in E$, $\forall x \in E$. Funcția $f : E \to \mathbb{R}$ are *perioada* T dacă $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in E$. În acest caz, f se numește *funcție periodică*.

Dacă $f : E \to \mathbb{R}$ și există un cel mai mic $T > 0$ astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in E$, atunci T este *perioadă principală* pentru f.

Funcția $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) este *mărginită* dacă $\exists a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leqslant f(x) \leqslant b$, $\forall x \in E$, adică Imf este o mulțime mărginită.

Se consideră funcția $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$).
a) f este *crescătoare* pe E dacă $\forall x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
b) f este *descrescătoare* pe E dacă $\forall x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
c) f este *monotonă* pe E dacă este crescătoare sau descrescătoare pe E.

Observații.

♦ Dacă în definiția funcției crescătoare, descrescătoare, respectiv monotone inegalitățile între valorile funcției sunt stricte, funcția se numește *strict crescătoare*, *strict descrescătoare* și respectiv *strict monotonă*.

♦ Pentru studiul monotoniei unei funcții, $f : E \to \mathbb{R}$, uneori este convenabil să considerăm $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$ și să studiem semnul raportului $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, atunci diferențele $f(x_1) - f(x_2)$ și $x_1 - x_2$ au același semn, adică funcția este strict crescătoare.

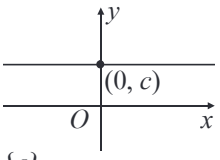
Dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, atunci diferențele $f(x_1) - f(x_2)$ și $x_1 - x_2$ au semne opuse, adică funcția este strict descrescătoare.

Funcția constantă

SĂ NE AMINTIM

Se numește *funcție constantă* o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$ (c este un număr real).

Reprezentarea grafică a funcției constante este dreapta orizontală dusă prin punctul $(0, c)$.



Observații.

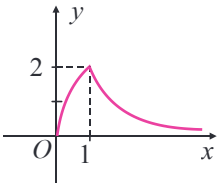
♦ Funcția constantă este mărginită; Im$f = \{c\}$.

♦ Funcția constantă este o funcție pară, deoarece $f(-x) = c = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci reprezentarea grafică este simetrică față de axa Oy.

1) Care dintre următoarele funcții sunt funcții reale de variabilă reală?
a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$;
c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + i\bar{z}$;
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x; y) = (x - 2y; 3x - y)$;
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^8 + 5x^6 - 2$.

2) Ce proprietate de simetrie are reprezentarea grafică a unei funcții:
a) pare; b) impare?

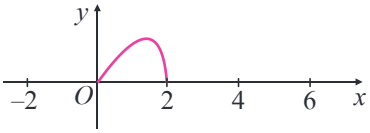
3) În figura următoare este reprezentarea grafică pe $[0, \infty)$ a unei funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Completează graficul pe $(-\infty; 0)$ dacă:
a) f este pară; b) f este impară.

4) Demonstrează că, dacă $T \in \mathbb{R}^*$ este perioadă pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci:
a) $-T$ este perioadă pentru f;
b) kT este perioadă pentru f, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

5) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are perioada T = 2 și reprezentarea ei grafică pe $[0; 2]$ este:



Completează reprezentarea grafică pe $[-2; 0)$ și pe $(2, 6]$.

6) Dacă numărul $a \in \mathbb{R}^*$ este perioadă pentru funcția f, precizează alte trei perioade ale funcției f.

7) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Atunci:
a) f este mărginită dacă $\exists M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, astfel încât $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
b) f este mărginită dacă Imf este o mulțime mărginită.

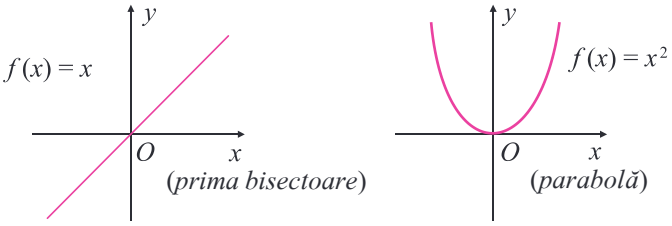
8) Fie funcția $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$), $a, b \in E$, $a \neq b$ și raportul $R(a, b) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$.

Completează următoarele enunțuri, astfel încât să obții propoziții adevărate.
a) Dacă $R(a, b) > 0$, $\forall a, b \in E$, $a \neq b$, atunci funcția f este ...

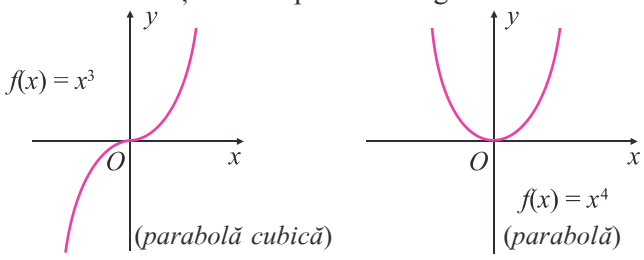
Funcția putere și funcția radical

➢ Se numește *funcția putere cu exponentul natural n* ($n \in \mathbb{N}^*$), funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.

În cazurile $n = 1$ și $n = 2$ reprezentările grafice sunt următoarele:

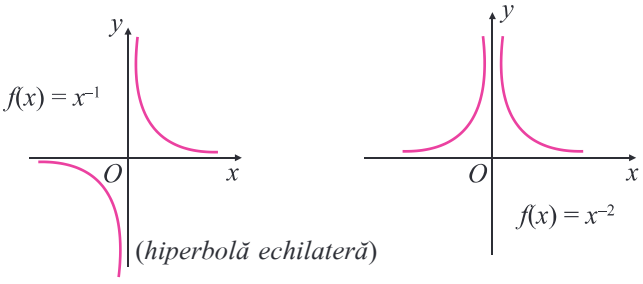


În cazurile $n = 3$ și $n = 4$ reprezentările grafice sunt următoarele:



➢ Se numește *funcția putere cu exponentul întreg negativ* $-n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$.

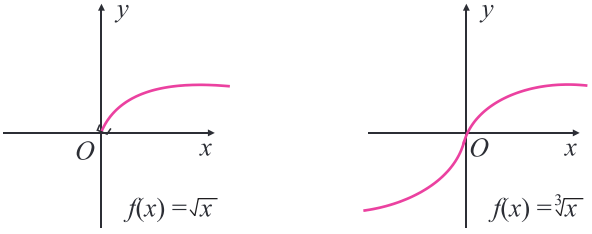
În cazurile $n = 1$ și $n = 2$ reprezentările grafice sunt următoarele:



Stabilește, pentru fiecare reprezentare grafică de mai sus, dacă funcția este mărginită, monotonă, pară/impară, bijectivă; determină Im*f*.

➢ Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Se numește *funcție radical de ordinul n* funcția $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, unde $E = [0; \infty)$, dacă n este par și $E = \mathbb{R}$, dacă n este impar.

Pentru $n = 2$ și $n = 3$ reprezentările grafice sunt următoarele:



Observații.

♦ Orice funcție radical este strict crescătoare pe domeniul ei maxim de definiție.

♦ Orice funcție radical de ordin impar este o funcție impară.

b) Dacă $R(a, b) \leqslant 0$, $\forall a, b \in E$, atunci funcția f este ...

c) Dacă $R(a, b)$ nu are semn constant pentru $\forall a, b \in E$, atunci ...

9) Stabilește pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ este pară sau impară.

10) Stabilește intervalele de monotonie ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Indicație.

Analizează separat cazurile n par și n impar. Folosește reprezentările grafice alăturate!

11) Stabilește pentru ce valori $n \in \mathbb{N}^*$, funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$ este pară sau impară. Folosește reprezentările grafice alăturate!

12) Care sunt intervalele de monotonie pentru funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$? Folosește reprezentările grafice alăturate!

13) Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este strict monotonă deoarece este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0; \infty)$.

b) Funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2}$ este mărginită.

Indicație.

Folosește reprezentările grafice alăturate!

14) Stabilește domeniul maxim de definiție al fiecărei funcții $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[5]{x}$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x+7}$;

c) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-2}$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x+3}}$.

15) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + mx + 1}$; care sunt valorile parametrului real m?

16) Dacă funcția $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[6]{2x - m}$ are domeniul maxim de definiție $[-1; \infty)$, cât este parametrul real m?

Funcții polinomiale

Definiție.

Se numește *funcție polinomială cu coeficienți reali* o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, unde $a_0, a_1, \ldots, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

Numerele $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se numesc *coeficienții funcției polinomiale f*. Coeficientul a_0 se numește *termen liber*.

Numărul natural maxim n, cu $a_n \neq 0$, se numește *gradul funcției polinomiale f* ; se notează grad$f = n$.

Pentru funcția polinomială f cu grad$f = n$, numărul a_n se numește *coeficient dominant*.

EXEMPLE

• Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}x + 4$ este o funcție polinomială de gradul cinci;

• $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$ este o funcție polinomială de gradul doi;

• $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = 2x - \sqrt{3}$ este o funcție polinomială de gradul unu;

• $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 7$ este o funcție polinomială de gradul zero.

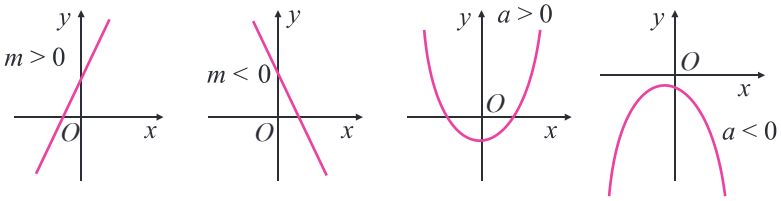
Convenție.

Funcția polinomială nulă (care are toți coeficienții zero) se consideră că are gradul $-\infty$.

SĂ NE AMINTIM

În clasa a IX-a s-au studiat funcțiile polinomiale de gradul zero, de gradul întâi și de gradul doi.

Funcțiile de gradul întâi, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, $m \neq 0$, și funcțiile de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, au următoarele reprezentări grafice:



Fiecărei funcții polinomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ îi putem asocia o ecuație polinomială (numită și ecuație algebrică): $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Putem rezolva astfel de ecuații utilizând descompunerea în factori.

SĂ NE AMINTIM

$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1})$, $\forall a, x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Teoremă.

Dacă numărul $p \in \mathbb{Z}$ este soluție a ecuației algebrice cu coeficienți întregi $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0 = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), atunci $p \mid a_0$.

17) Pentru fiecare din următoarele funcții polinomiale, precizează coeficienții și termenul liber.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}x\left(x + \frac{1}{2}\right)$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$.

18) Dă câte un exemplu de funcție polinomială care:

a) este funcție pară;

b) este funcție impară;

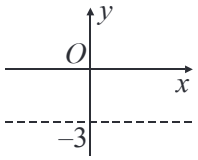
c) are termenul liber $2 + \sqrt{3}$;

d) este strict crescătoare;

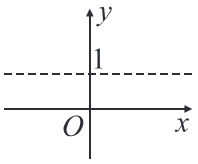
e) nu este monotonă.

19) Determină funcții polinomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de grad mai mic sau egal cu 2, care au următoarele reprezentări grafice:

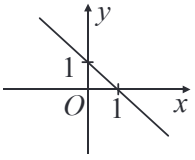
a)



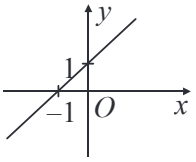
b)



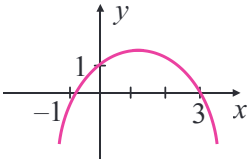
c)



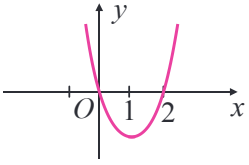
d)



e)



f)



Demonstrație.

Din relația $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_n p + a_0 = 0$ obținem $p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + + \ldots + a_1) + a_0 = 0$.

Deoarece suma și primul termen se divid cu p, rezultă $p \mid a_0$.

Teoremă.

Dacă numărul $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (unde $p, q, \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$) este soluție a ecuației algebrice cu coeficienți întregi $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

Probleme rezolvate.

1) Rezolvă ecuația $x^3 - 2x - 56 = 0$ în $\mathbb{Z}$.

Soluție.

Trebuie să găsim soluțiile întregi (dacă există) ale ecuației date. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x - 56$. Căutăm $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(p) = 0$. E suficient să verificăm dacă divizorii numărului 56 sunt soluții ale ecuației. Găsim $f(4) = 0$.

$f(x) - f(4) = x^3 - 2x - 56 - 4^3 + 2 \cdot 4 + 56 = (x^3 - 4^3) - 2(x - 4) = (x - 4)(x^2 + 4x + 14)$.

Din $f(x) = 0$ obținem $x - 4 = 0$ sau $x^2 + 4x + 14 = 0$, de unde $x = 4$.

2) Rezolvă inecuația $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 < 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Observăm că $f(1) = 0$.

$f(x) - f(1) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 - 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = (x^4 - 1) - 3(x^3 - 1) + 3(x^2 - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x - 1)[x^2(x - 2) + (x - 2)] = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$.

Din $f(x) < 0$ obținem $(x - 1)(x - 2) < 0$, de unde $x \in (1, 2)$.

3) Rezolvă ecuația $x^3 - 10x^2 + 125 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție.

Ecuația poate fi rezolvată cu metoda de mai sus sau procedând astfel: $x^3 - 10x^2 + 125 = 0$; $(x^3 - 5x^2) - (5x^2 - 125) = 0$;

$(x - 5)(x^2 - 5x - 25) = 0$; $x \in \left\{5 ; \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Observație.

Aplicarea metodei prezentate mai sus se bazează pe găsirea unui număr $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(p) = 0$.

Funcții raționale

Definiție.

Se numește *funcție rațională cu coeficienți reali* o funcție $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$, unde p_1 și p_2 sunt funcții polinomiale cu coeficienți reali, p_2 este diferită de funcția nulă și $D = \{x \in \mathbb{R} \mid p_2(x) \neq 0\}$.

20) Precizează gradul și coeficientul dominant pentru fiecare din funcțiile polinomiale următoare:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + 7x + 1$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2 - x)(x^2 + 5)$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3}x^8 - 7x^2 + 5x - 3$.

21) Dacă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 1)x^4 + mx^3 + 3$, $m \in \mathbb{R}$ este o funcție polinomială de gradul trei, cât este m?

22) Care dintre următoarele ecuații este ecuație algebrică?

a) $2x^5 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$;

b) $\sin x + 2x^2 - 3 = 0$;

c) $\sqrt{x^2 - 1} + x = 7$;

d) $(2x - 3)(x^2 + x + 1) = 0$.

23) Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2x + 3 = 8$;

b) $2x + 3 = 2(x + 3) - 3$;

c) $2x + 3 = 2(x + 3) + 3$;

d) $3x^2 - 2x - 1 = 0$;

e) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

f) $x^2 + x + 1 = 0$;

g) $(\sqrt{2} + x)\sqrt{3} = x + 1$;

h) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

24) Fie funcția $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Scrie ca produs funcția f.

b) Rezolvă ecuația $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

25) Care sunt soluțiile întregi ale ecuațiilor următoare:

a) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0$;

b) $x^4 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$;

c) $2x^5 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$?

26) Demonstrează că ecuația $x^6 - x^3 + x + 2 = 0$ nu are soluții întregi.

27) Determină $a \in \mathbb{R}$ dacă ecuația $x^3 + ax^2 + x - 1 = 0$ are o soluție întreagă.

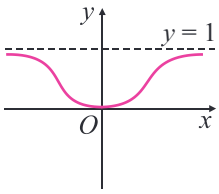
28) Stabilește domeniul maxim de definiție pentru următoarele funcții raționale $f : D \to \mathbb{R}$:

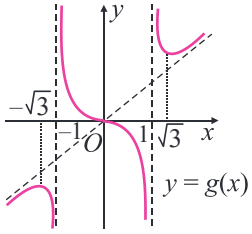
a) $f(x) = \frac{2x + 5}{x^3 - x}$;

EXEMPLU

Funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ și $g:\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ sunt funcții raționale cu coeficienți reali.

La sfârșitul clasei a XI-a vei stabili că aceste funcții au următoarele reprezentări grafice:





• Stabilește dacă funcțiile raționale care sunt reprezentate grafic în exemplul de mai sus sunt pare, impare, mărginite, monotone.

• Determină intervalele de monotonie pentru funcțiile de mai sus.

Funcția exponențială și funcția logaritmică

Considerăm un număr real a astfel încât $a>0$, $a\neq1$.

SĂ NE AMINTIM

Se numește *funcția exponențială cu baza a*, funcția $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=a^x$, pentru $a>0$, $a\neq1$.

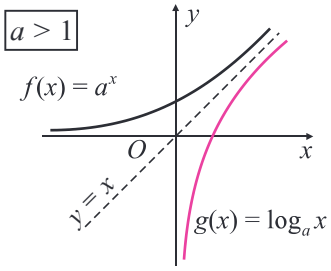
Se numește *funcția logaritmică cu baza a*, funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, pentru $a>0$, $a\neq1$.

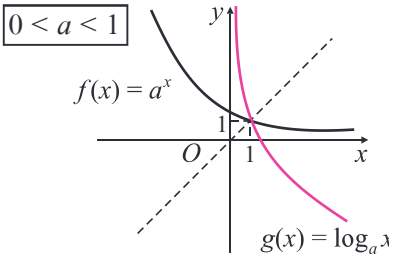
RETINE

Fie $a>0$, $a\neq1$. Atunci:

$\boxed{a^{\log_a x}=x,\ \forall x>0}$ $\boxed{\log_a a^x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}}$

Funcțiile exponențială și logaritmică, ambele cu baza a, sunt inverse una alteia. Reprezentările lor grafice sunt simetrice față de prima bisectoare.





Observație.

Funcțiile exponențiale și funcțiile logaritmice sunt nemărginite.

Notații.

$\log_{10}x=\lg x$ (logaritm zecimal); $\log_e x=\ln x$ (logaritm natural), unde numărul e (notație propusă de L. Euler în 1748) este o constantă fundamentală în matematică (e este irațional și $e\approx2{,}718281...$).

b) $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$;

c) $f(x)=\dfrac{2}{x^4-5x^2+4}$;

d) $f(x)=\dfrac{x^5+x+2}{x^2+x+1}$.

29) Dacă funcția $f:E\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x+3m}$ este definită pe $\mathbb{R}$, care sunt valorile parametrului real m?

30) Dă câte un exemplu de funcție rațională pentru care domeniul maxim de definiție este:

a) $E=\mathbb{R}$;

b) $E=\mathbb{R}\setminus\{1;7\}$;

c) $E=\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3}\}$.

31) Precizează, în funcție de baza a, monotonia funcției exponențiale și logaritmice.

32) Determină mulțimea Imf dacă:

a) f este o funcție exponențială;

b) f este o funcție logaritmică.

33) Care este domeniul maxim de definiție al fiecărei funcții $f:D\to\mathbb{R}$ ($D\subset\mathbb{R}$)?

a) $f(x)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+10^x$;

b) $f(x)=\log_5(x^2-2x-2)$;

c) $f(x)=\lg(x-1)+\sqrt{x-3}$.

34) Determină parametrul real m astfel încât fiecare din următoarele funcții să fie bine definită:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{m-1}{m+2}\right)^x$;

b) $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{|m|-1}x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_7(mx^2+x+1)$?

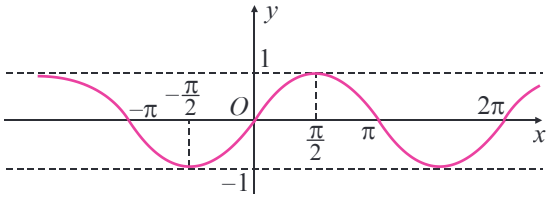
35) Arată că, pentru $m\in(0,1)$, funcțiile următoare sunt descrescătoare:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-m^x$;

b) $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_m x+\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$.

Funcții trigonometrice directe și inverse

Funcția sin : $\mathbb{R} \to [-1; 1]$ are reprezentarea grafică:



$\boxed{\sin(-x) = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ (funcția sinus este *impară*)

$\boxed{\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}}$

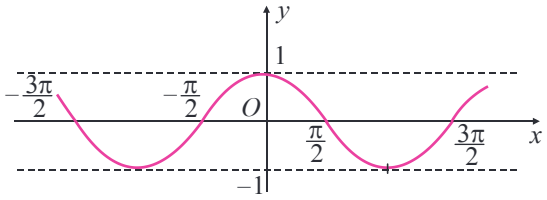
(funcția sinus este *periodică*, de perioadă principală 2π)

$\boxed{|\sin x| \leqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

Pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția sinus este strict crescătoare, deci injectivă.

Funcția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ este o *restricție bijectivă* a funcției sinus.

Funcția cos : $\mathbb{R} \to [-1; 1]$ are reprezentarea grafică:



$\boxed{\cos(-x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ (funcția cosinus este *pară*)

$\boxed{\cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}}$

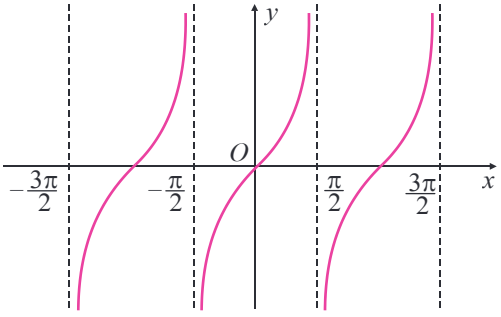
(funcția cosinus este *periodică*, de perioadă principală 2π)

$\boxed{|\cos x| \leqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

Pe $[0, \pi]$ funcția cosinus este strict descrescătoare, deci injectivă.

Funcția cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ este o *restricție bijectivă* a funcției cosinus.

Funcția $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ are reprezentarea grafică:



36) Precizează trei restricții bijective ale funcției sinus.

37) Dă câte un exemplu de:
a) centru de simetrie pentru graficul funcției sinus;
b) interval maximal pe care funcția sinus este strict descrescătoare;
c) interval maximal inclus în $(-\infty; 0)$ pe care funcția sinus este strict crescătoare.

38) Dă câte un exemplu de:
a) axă de simetrie pentru graficul funcției cosinus;
b) interval maximal inclus în $[0, \infty)$ pe care funcția cosinus este strict descrescătoare;
c) interval maximal inclus în $(-\infty; 0]$ pe care funcția cosinus este strict crescătoare.

39) Stabilește dacă următoarele funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt pare sau impare:
a) $f(x) = \sin 5x \sin 7x$;
b) $f(x) = x + 2\sin x$;
c) $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \cos x}$;
d) $f(x) = \cos x + \sin^2 x$.

40) Determină Imf dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și:
a) $f(x) = 3\sin x$;
b) $f(x) = \cos 7x$;
c) $f(x) = \frac{1}{5 + 3\cos x}$.

41) Folosind formula

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

explică un procedeu prin care graficul funcției cosinus se poate obține din graficul funcției sinus.

RETINE

$$\boxed{\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

(funcția tangentă este *impară*)

$$\boxed{\operatorname{tg}(x + h\pi) = \operatorname{tg}x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\},\ \forall h \in \mathbb{Z}}$$

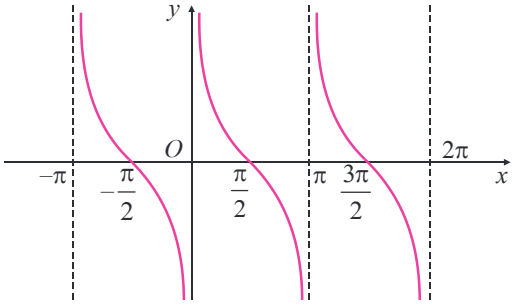
(funcția tangentă este *periodică*, de perioadă principală π)

Pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția tangentă este strict crescătoare, deci injectivă.

Funcția $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este o *restricție bijectivă* a funcției tangentă.

SĂ NE AMINTIM

Funcția $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ are reprezentarea grafică următoare:



RETINE

$$\boxed{\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

(funcția cotangentă este *impară*)

$$\boxed{\operatorname{ctg}(x + h\pi) = \operatorname{ctg}x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \forall h \in \mathbb{Z}}$$

(funcția cotangentă este *periodică*, de perioadă principală π)

Pe intervalul $(0, \pi)$ funcția cotangentă este strict descrescătoare, deci injectivă.

Funcția $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ este o *restricție bijectivă* a funcției cotangentă.

SĂ NE AMINTIM

Funcția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$ este inversabilă.

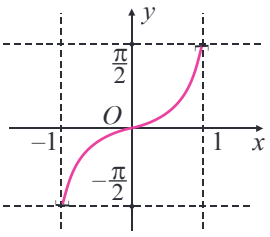
Inversa ei este funcția $\arcsin : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

RETINE

$$\boxed{\arcsin(\sin x) = x,\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x,\ \forall x \in [-1; 1]}$$

Reprezentarea grafică a **funcției arcsinus** este următoarea:



42) Fie funcția
$f : \mathbb{R} \to [-1; 1],\ f(x) = \sin x$.

a) Determină o mulțime $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \mathbb{R}$ astfel încât $f(A) = [-1; 1]$;

b) Determină o mulțime $B \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f(B) = (0; 1)$;

c) Determină mulțimea $f\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]\right)$.

43) Rezolvă cerințele de la problema 42 pentru funcția $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $f(x) = \cos x$.

44) Determină domeniul maxim de definiție pentru fiecare din funcțiile $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$.

a) $f(x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x$;

b) $f(x) = \operatorname{ctg}2x - \operatorname{tg}x$;

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x - 1}$;

d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$.

45) Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k-1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg}x.$$

a) Determină o mulțime $A \subset (0, \infty)$ astfel încât $f(A) = \mathbb{R}$;

b) Determină mulțimile $f\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$ și $f\left(\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]\right)$.

46) Folosind reprezentările grafice ale funcțiilor tangentă și cotangentă, precizează pentru fiecare dintre ele câte două intervale maximale de monotonie.

47) Determină maximul și minimul pentru următoarele funcții:

a) $f : \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

b) $f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$;

c) $f : \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x$;

d) $f : \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{ctg} x$.

RETINE

$\forall x \in [-1;\ 1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

(funcția arcsinus este *impară*)

$\forall x_1, x_2 \in [-1;\ 1]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow \arcsin x_1 < \arcsin x_2$

(funcția arcsinus este *strict crescătoare* pe $[-1,\ 1]$)

SĂ NE AMINTIM

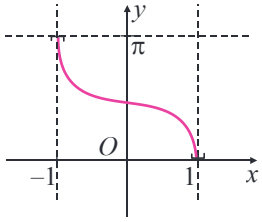
Funcția $\cos : [0,\ \pi] \to [-1;\ 1]$ este inversabilă.
Inversa ei este funcția $\arccos : [-1;\ 1] \to [0,\ \pi]$.

RETINE

$\forall x \in [0;\ \pi]$, $\arccos(\cos x) = x$

$\forall x \in [-1;\ 1]$, $\cos(\arccos x) = x$

Reprezentarea grafică a **funcției arccosinus** este următoarea:



RETINE

$\forall x \in [-1;\ 1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$x_1, x_2 \in [-1;\ 1]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow \arccos x_1 > \arccos x_2$

(funcția arccosinus este *strict descrescătoare* pe $[-1,\ 1]$)

SĂ NE AMINTIM

Funcția $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este inversabilă.

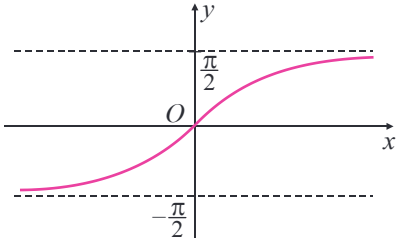
Inversa ei este funcția $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

RETINE

$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y$

Reprezentarea grafică a **funcției arctangentă** este următoarea:



RETINE

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(funcția arctangentă este *impară*)

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow \operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$

(funcția arctangentă este *strict crescătoare* pe $\mathbb{R}$)

48) Dă câte un exemplu de număr real x pentru care:
a) $\arcsin(\sin x) \neq x$;
b) $\arccos(\cos x) \neq x$.

49) Stabilește domeniul maxim de definiție al funcțiilor $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$):
a) $f(x) = \arcsin(x - 2)$;
b) $f(x) = \arccos\frac{1}{x}$;
c) $f(x) = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$.

50) Stabilește dacă următoarele funcții sunt pare sau impare:
a) $f : [-1;\ 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3\arcsin(x^2)$;
b) $f : [-2;\ 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

51) Se consideră funcția $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$).
a) Cum poate fi obținut graficul funcției $-f$ din graficul funcției f?
b) Cum poate fi obținut graficul funcției $a + f$ (unde $a > 0$) din graficul funcției f?
c) Folosind egalitatea

$\arcsin x + \arccos = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1;\ 1]$,

arată cum poate fi obținut graficul funcției arccosinus din graficul funcției arcsinus.

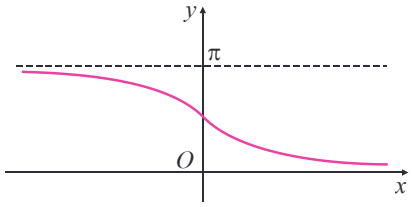
52) Dă câte un exemplu de număr real x pentru care:
a) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \neq x$;
b) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) \neq x$.

53) Stabilește domeniul maxim de definiție al fiecărei funcții $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$).
a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$;
b) $f(x) = \arcsin 2x - \operatorname{arcctg} x$;
c) $f(x) = \frac{2}{16\operatorname{arctg}^2 x - \pi^2}$.

Funcția ctg : $(0; \pi) \to \mathbb{R}$ este inversabilă.
Inversa ei este funcția arcctg : $\mathbb{R} \to (0; \pi)$.

$\boxed{\forall x \in (0, \pi),\ \text{arcctg}(\text{ctg}x) = x}$ $\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \text{ctg}(\text{arcctg}y) = y}$

Reprezentarea grafică a **funcției arccotangentă** este următoarea:



$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x.}$

$\boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2 \Rightarrow \text{arcctg}x_1 > \text{arcctg}x_2}$

(funcția arccotangentă este *strict descrescătoare* pe $\mathbb{R}$)

Funcțiile reale de variabilă reală prezentate în această secțiune se mai numesc și *funcții elementare*.

54) Stabilește dacă următoarele funcții sunt pare sau impare.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin x \cdot \text{arctg}x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{\text{arctg}x}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arcctg}(\sin x)$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg}(\cos x)$.

55) Determină maximul și minimul pentru următoarele funcții:

a) $f : \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$;

b) $f : \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\arccos x}$;

c) $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \pi + \text{arctg}\, x$;

d) $f : [-1; 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\text{arcctg}\, x}$.

Probleme rezolvate.

1) Se consideră funcția $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{(m^2-1)a+m}{ma^2+a+m-1}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $ma^2 + a + m - 1 \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie definită pe $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $m = -1$ studiază monotonia funcției f.

Soluție.

a) Sunt echivalente următoarele afirmații:

$ma^2 + a + m - 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$; $\Delta_a < 0$; $1 - 4m^2 + 4m < 0$; $m \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$.

b) Funcția f este definită pe $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} ma^2 + a + m - 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R} & (1) \\ \dfrac{(m^2-1)a+m}{ma^2+a+m-1} > 0, \forall a \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$

Dacă este îndeplinită condiția *(1)*, atunci numitorul din *(2)* are semn constant, adică este pozitiv $\forall a \in \mathbb{R}$ sau este negativ $\forall a \in \mathbb{R}$. Trebuie ca și numărătorul să aibă semn constant pentru orice $a \in \mathbb{R}$, adică $m^2 - 1 = 0$. Convine doar $m = -1$.

c) Dacă $m = -1$, atunci $f(x) = \left(\dfrac{1}{a^2 - a + 2}\right)^x$.

Deoarece $\dfrac{1}{a^2 - a + 2} = \dfrac{1}{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \in (0; 1), \forall a \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2) Se consideră funcția $f : (0; \infty) \to [\ln 2; \infty)$, $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

a) Demonstrează că f este surjectivă.

b) Determină intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Determină restricțiile inversabile ale funcției f și inversele acestora.

Soluție.

a) f este surjectivă $\Leftrightarrow \forall y \in [\ln 2; \infty), \exists x \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x) = y$.

Ecuația $f(x) = y$ este echivalentă cu $x^2 - e^y x + 1 = 0$ și $y \geqslant \ln 2$. Soluțiile sunt $x_{1,2} = \dfrac{e^y \pm \sqrt{e^{2y} - 4}}{2}$, $\forall y \geqslant \ln 2$.

b) Deoarece $f = h \circ g$ unde $g : (0, \infty) \to [2; \infty)$, $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ și $h : [2, \infty) \to [\ln 2; \infty)$, $h(x) = \ln x$ și h este strict crescătoare, este suficient să determinăm intervalele de monotonie ale funcției g.

Fie $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq b$. Calculăm $R(a, b) = \dfrac{g(a) - g(b)}{a - b} = \dfrac{ab - 1}{ab}$.

- dacă $a, b \in (0, 1]$, $a \neq b$, atunci $R(a, b) < 0$, de unde g strict descrescătoare pe $(0; 1]$;
- dacă $a, b \in (1, \infty]$, $a \neq b$, atunci $R(a, b) > 0$, de unde g strict crescătoare pe $[1; \infty)$.

c) f are două restricții bijective; ele au ca domeniu de definiție fiecare interval maximal de monotonie al funcției f.

$f_1 : (0, 1] \to [\ln 2; \infty)$, $f_1^{-1} : [\ln 2; \infty) \to (0; 1]$, $f_1^{-1}(x) = \dfrac{e^x - \sqrt{e^{2x} - 4}}{2}$,

$f_2 : [1; \infty) \to [\ln 2; \infty)$, $f_2^{-1} : [\ln 2; \infty) \to (1; \infty]$, $f_2^{-1}(x) = \dfrac{e^x + \sqrt{e^{2x} - 4}}{2}$.

3) Se consideră funcția $f : [\pi; 2\pi] \to [-1; 1]$, $f(x) = \cos x$. Demonstrează că f este inversabilă și determină f^{-1}.

Soluție.

f este inversabilă dacă și numai dacă, $\forall y \in [-1; 1]$, există și este unic $x \in [\pi; 2\pi]$ astfel încât $f(x) = y$.

Ecuația $\cos x = y$ are o infinitate de soluții reale date de formula $x_k = \pm \arccos y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deoarece funcția f este strict crescătoare pe $[\pi; 2\pi]$, o singură soluție aparține acestui interval. Ea este $x = 2\pi - \arccos y$ (justifică!), deci obținem $f^{-1} : [-1; 1] \to [0; 2\pi]$, $f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x$.

4) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

a) Demonstrează că f are perioada 2π.

b) Explicitează funcția pe $[0; 2\pi)$.

c) Reprezintă grafic restricția funcției la $[0; 2\pi)$.

d) Rezolvă ecuația $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $x \in [0; 2\pi)$.

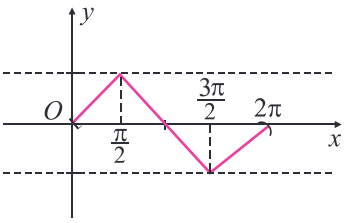
e) Rezolvă inecuația $f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $x \in [0; 2\pi)$.

Soluție.

a) $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right] \\ x - 2\pi, & x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \end{cases}$

c)



d) Din $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $x \in [0, 2\pi)$ obținem $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; 2\pi)$, de unde $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

e) Din $f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $x \in [0, 2\pi)$ obținem $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; 2\pi)$, de unde $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}; 2\pi\right)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$. Cercetează:

a) monotonia; b) injectivitatea;
c) surjectivitatea; d) mărginirea.

2. Se consideră funcția $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$.

a) Determină domeniul maxim de definiție E.
b) Demonstrează că f este injectivă.
c) Determină cea mai mare și cea mai mică dintre valorile funcției.

3. Se consideră funcția $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{-x^2+3x+4}$. Determină:

a) domeniul maxim de definiție D;
b) intervalele de monotonie ale funcției;
c) punctele de intersecție ale reprezentării grafice cu axele de coordonate.

4. Stabilește domeniul maxim de definiție al funcțiilor $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{\lg(x^2-1)}$; b) $f(x)=\sqrt{\sin x-\cos x}$;

c) $f(x)=\ln\left(\arccos\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$; d) $f(x)=\sqrt{e^{\frac{x+1}{x-2}}-1}$.

5. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^3-6x^2-5x-14=0$;
b) $x^4+2x^3-x^2-4x-2=0$.

6. Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $x^3+4x^2+x-6 \geqslant 0$;
b) $4x^3+8x^2+5x+1 \leqslant 0$.

7. Explicitează funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\max\{2^x; 10^x\}$;

b) $f(x)=\min\{|x-1|; 2\}$;

c) $f(x)=[\operatorname{arctg} x]$, unde $[\cdot]$ reprezintă funcția parte întreagă;

d) $f(x)=|x^3-3x+2|$.

8. Explicitează funcțiile:

a) $f:\left[\dfrac{1}{2}; 2006\right] \to \mathbb{R}$, $f(x)$, $f(x)=[\lg 2x]$, unde $[\cdot]$ reprezintă funcția parte întreagă;

b) $f: [0; 2\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\{\sin x\}$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă funcția parte fracționară;

c) $f: [0; \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant x}\{\sin t\}$;

d) $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\min\limits_{-1 \leqslant t \leqslant x}\{t^2\}$.

9. Demonstrează că următoarele funcții sunt inversabile și determină inversa fiecăreia dintre ele:

a) $f:\left(-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg} x$;

b) $f:\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$, $f(x)=\sin x$;

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

10. Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \to [0; \pi),\ f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

a) Demonstrează că f este pară.
b) Demonstrează că f este surjectivă.
c) Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=\dfrac{\pi}{3}$.
d) Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x)<\dfrac{\pi}{2}$.

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$.

a) Arată că f are perioada principală $T=1$.
b) Trasează graficul funcției f.
c) Determină intervalele de monotonie ale funcției f.
d) Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=\dfrac{1}{8}$.

12. Se consideră funcția $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ și mulțimea $S=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ f^{-1}(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

a) Arată că f este bijectivă.
b) Determină f^{-1}.
c) Arată că aria $S \leqslant 1$.
d) Arată că mulțimea S admite o axă de simetrie.

13. Determină numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor:

a) $\operatorname{arctg} x=x^2+4x+3$; b) $\sin 2\pi x=\dfrac{x}{2007}$;

c) $y^4+4y^2x-11y^2+4xy-8y+8x^2-40x+52=0$.

14. Arată că:

$$\arccos(\cos x)=\begin{cases} x-2n\pi, & x \in [2n\pi, (2n+1)\pi] \\ -x+(2n+2)\pi, & x \in ((2n+1)\pi, (2n+2)\pi) \end{cases},$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x-n\pi,\ x \in \left(n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Șiruri de numere reale

3. Noțiunea de șir. Șiruri monotone. Șiruri mărginite

Am întâlnit deja șiruri:

- 0, 1, 2, 3, 4 ... (șirul numerelor naturale)
- 1, 3, 5, 7, 9 ... (șirul numerelor impare)
- 1, –1, 1, –1, 1, –1 ...
- 1, –2, 4, –8, 16 ... (progresie geometrică de rație –2)

Definiții.

Se numește *șir de numere reale* (*șir numeric, șir real*) o funcție reală definită pe $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{N}^*$ ($u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sau $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$).

Imaginea lui n prin funcția u se notează cu u_n; u_n se numește *termenul de rang n*. Indicele n arată poziția sau rangul unui termen în șir. Șirul se notează $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(u_n)_n$ sau (u_n).

De exemplu: 2, 3, 5, 7, ... este șirul numerelor prime pe care îl notăm astfel: $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ ...

Observație.

Formularea „șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $u_n = u(n)$“ o vom nota și astfel: $(u(n))_n$.

De exemplu: șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ îl notăm $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_n$.

$(\sqrt{n-\pi})_{n\geqslant 4}$ este șirul $\sqrt{4-\pi}$, $\sqrt{5-\pi}$, $\sqrt{6-\pi}$, ... dat de funcția $u_n = \sqrt{4+n-\pi}$, $n \geqslant 0$.

Observație.

Plecând de la exemplul anterior, considerăm că $(u_n)_{n\geqslant k}$, $k \in \mathbb{N}$ este, de asemenea, șir.

Modalități de a defini un șir

A defini un șir înseamnă a indica modul de calcul al termenilor săi.

♦ *Șiruri definite prin formula termenului general*

Formula termenului general permite calculul oricărui termen al șirului.

De exemplu, șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este definit prin termenul general $u_n = (-1)^n + 5$. Avem $u_0 = 6$; $u_1 = 4$; $u_2 = 6$ ...

♦ *Șiruri definite printr-o relație de recurență*

Dacă se dau primii termeni și o relație de recurență, pe baza principiului inducției matematice putem calcula termenul de rang n în funcție de termenii anteriori (de rang $n - 1$, $n - 2$, ...).

Cum recunoaștem șirurile?

1) Care dintre următoarele funcții este un șir real?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$;

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $h(x) = x^2$;

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $i(x) = [x]$ (parte întreagă);

e) $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $j(x) = |x|$;

f) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k(x) = 2^x$;

g) $l : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $l(x) = x + i$;

h) $m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $m(x) = |x + i|$;

i) $n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $n(x) = \dfrac{1}{x}$;

j) $p : \{2, 4, 6, ...\} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{2}{x}$.

2) Calculează primele 5 valori ale fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $u : \{0, 2, 4, ...\} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \dfrac{x}{2}$;

b) $v : \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$, $v(n) = n$;

c) $w : \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$, $w(n) = \sqrt{n+1}$.

Asociază acestor funcții câte un șir.

Cum reprezentăm un șir?

3) Fie șirul $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ cu $v_n = \dfrac{5+(-1)^n}{n}$.

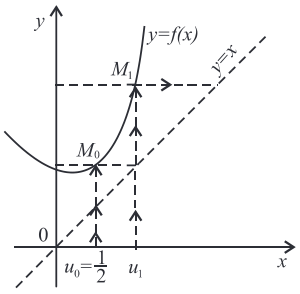
Calculează v_1, v_2, v_3, v_4. Reprezintă-le grafic.

4) Utilizând prima bisectoare și graficul funcției $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, reprezintă șirul recurent $(u_n)_n$: $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, $n \geqslant 0$.

Indicație.

Se determină punctele M_i, $i \in \mathbb{N}$ ale căror abscise sunt termenii șirului $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

5) Reprezintă grafic șirul recurent $(a_n)_{n\geqslant 0}$: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n + 1}$, $n \geqslant 0$.



EXEMPLU

Fie șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $u_0 = -3$, $u_{n+1} = u_n + 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Din relația de recurență obținem:
$u_1 = u_0 + 2 = -1$; $u_2 = u_1 + 2 = 1$; $u_3 = u_2 + 2 = 3$ ...

Observație.
Uneori este important să obținem formula termenului general pornind de la formula de recurență.

EXEMPLU

Fie șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 5$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Din relația de recurență obținem:

$$u_1 = u_0 + 5$$
$$u_2 = u_1 + 5$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n = u_{n-1} + 5$$

Adunăm și reducem termenii. Obținem $u_n = u_0 + 5n = 5n + 1$.

♦ *Șiruri definite prin enumerarea primilor termeni*

EXEMPLU

2, 3, 5, 7, 11, ... este șirul numerelor prime.
Nu s-a descoperit încă formula termenului de rang n din șirul numerelor prime.

Șiruri monotone

Definiție.
Un *șir* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *constant* dacă $u_{n+1} = u_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLU

Fie șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $u_0 = 2$, $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 2}$ pentru $n \geqslant 1$. Observăm că $u_1 = 2$, $u_2 = 2$. Se arată prin inducție matematică că $u_n = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definiții.
Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *crescător* dacă $u_{n+1} \geqslant u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *descrescător* dacă $u_{n+1} \leqslant u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *monoton* dacă este crescător sau descrescător.
Un *șir* monoton (crescător sau descrescător) în care oricare doi termeni consecutivi sunt diferiți se numește *strict monoton* (respectiv *strict crescător* sau *strict descrescător*).

Observații.
♦ Există șiruri care nu sunt monotone.
De exemplu, şirul dat de $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$: $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$...
♦ Un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton dacă există $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < n_3$ astfel încât $a_{n_1} < a_{n_2} > a_{n_3}$ sau $a_{n_1} > a_{n_2} < a_{n_3}$.

Putem afla dacă un şir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător sau descrescător prin următoarele metode:

Metoda 1. Se studiază semnul diferenței a doi termeni consecutivi:
• dacă $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, atunci (u_n) este crescător;
• dacă $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, atunci (u_n) este descrescător.

6) Fie șirul $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin: $v_0 = 1$, $v_1 = -2$, $v_n = v_{n-1}^2 + 3v_{n-2}$ pentru $n \geqslant 2$.
Calculează v_2; v_3 ; v_4 ; v_5 .

7) Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $a_n = 5a_{n-1} = 5^2 a_{n-2} = \dots$.
Determină formula termenului general.

8) Fie $(u_n)_n$ cu $u_n = (-1)^n$. Calculează u_{2n} și u_{2n+1}.

9) Determină primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_n$ definit astfel:
$a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

10) Determină termenul general al șirului $(b_n)_n$ definit prin: $b_0 = 1$, $b_{n+1} = b_n - 2$.

11) Determină termenul general al șirului $(c_n)_n$ definit prin: $c_0 = 2$, $c_{n+1} = 2c_n$.

12) Determină termenul general al fiecăruia dintre șirurile date mai jos:

a) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$;

b) $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25} \dots$;

c) $\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{13}{24}, \frac{17}{32} \dots$;

d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots$.

Cum alegem metoda adecvată pentru studiul monotoniei?

13) Determină u_0 astfel încât șirul definit prin: $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 6}$, $n \geqslant 1$ să fie constant.

14) Precizează numerele reale a pentru care șirul $(a^n)_{\mathbb{N}}$ este:
a) strict crescător; b) strict descrescător;
c) constant; d) nemonoton.

15) Studiază monotonia șirurilor definite prin formula termenului general:

a) $a_n = n^2 + 2n + 3$;

b) $b_n = \frac{n+2}{n+1}$;

c) $c_n = \frac{2^n}{n^3}$;

d) $d_n = d_{n-1} - 1$; $d_0 = 1$.

Metoda 2. Dacă termenii șirului sunt strict pozitivi, comparăm raportul a doi termeni consecutivi cu 1:

- dacă $u_n > 0$ și $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $(u_n)_n$ este *crescător*;
- dacă $u_n > 0$ și $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $(u_n)_n$ este *descrescător*.

EXEMPLE

1) Fie șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $u_n = n^2 + 1$. Avem $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$, ceea ce arată că șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

2) Fie șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $u_0 = -2$, $u_{n+1} = u_n - 5$. Avem $u_{n+1} - u_n = -5 < 0$, deci șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător.

3) Fie șirul $(v_n)_{n\geqslant 2}$ definit prin: $v_n = \frac{3^n}{n^2}$. Evident, termenii șirului sunt strict pozitivi. Pentru studiul monotoniei, vom folosi a doua metodă: $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{2n^2 - 2n - 1}{(n+1)^2} > 0$, $\forall\, n \geqslant 2$, deci $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$, $\forall\, n \geqslant 2$. Rezultă că șirul este crescător (pornind de la rangul $n = 2$).

Șiruri mărginite

Definiții.

Un *șir* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *majorat*, sau *mărginit superior*, dacă există un număr real a astfel încât $u_n \leqslant a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Un *șir* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *minorat*, sau *mărginit inferior*, dacă există un număr real b astfel încât $u_n \geqslant b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Un *șir* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă există un număr real M, M > 0, astfel încât $|u_n| \leqslant M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Șirurile care nu sunt mărginite se numesc *nemărginite*.

Observații.

♦ Un șir este mărginit dacă este minorat și majorat.

De exemplu, șirul $\left(\frac{n+1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este mărginit: $0 < u_n \leqslant 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

♦ Orice șir crescător are ca minorant primul său termen.

♦ Orice șir descrescător are ca majorant primul său termen.

♦ Șirul (u_n) este nemărginit dacă $\forall\, M > 0, \exists\, n_M \in \mathbb{N}$ cu $|u_{n_M}| > M$.

Definiție.

Fie șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea că există numărul natural n_0 astfel încât $a_n \leqslant b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$. În acest caz, spunem că *șirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *majorat* de șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iar *șirul* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *minorat* de șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De exemplu, șirul $\left(\frac{1}{n^2+n-5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este majorat de șirul $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ începând cu rangul $n = 5$.

16) Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a_0 = -1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$. Calculând diferența $a_{n+1} - a_n$ obținem $\frac{1}{3}a_n - a_n = -\frac{2}{3}a_n$. Semnul diferenței depinde de semnul lui a_n.

Arată prin inducție matematică că $a_n < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Arată că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

17) Studiază monotonia șirurilor:

a) 1, 2, 3, ... n, ...;

b) –1, –2, –3, ... $-n$, ...;

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \ldots \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{n+1}{n}, \ldots$

18) Studiază monotonia șirurilor definite prin relația de recurență:

a) $e_{n+1} = 1 + \frac{1}{e_n}$; $e_0 = 1$;

b) $f_n = \sqrt{2 + f_{n-1}}$; $f_0 = 4$.

Cum determinăm marginile unui șir?

19) Arată că șirul $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)_n$ este majorat de 1.

20) Arată că șirul $(\cos n)_n$ este mărginit.

21) Arată că $\left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)_n$ este mărginit.

22) Studiază monotonia și mărginirea șirurilor: $\left(\frac{3n+1}{4n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; $\left(-\frac{3n+1}{7n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$; $\left(-\frac{an}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{R}$.

23) a) Arată că $\left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)_{\mathbb{N}}$ este mărginit.

b) Arată că șirul 0, 1, 2, ... , n, ... are minorant;

c) Arată că $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $a_n = -n$, are majorant.

24) Șirul $\left(\frac{2n}{n^2+3}\right)_n$ este majorat de $\left(\frac{2}{n}\right)_n$?

25) Câți termeni ai șirului $\left(\frac{n-7}{2n-11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt negativi? Câți termeni are șirul $\left(\frac{3}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ în $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{8}\right]$?

1. Fie șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $u_n = \dfrac{3}{n+2}$.

a) Calculează u_1, u_2, u_3.
b) Arată că $(u_n)_n$ este descrescător.
c) Determină $p \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $(n > p) \Rightarrow (0 < u_n < 10^{-4})$.

2. Fie șirul $(u_n)_n$ cu $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

a) Calculează primii trei termeni ai șirului.
b) Arată că șirul $(u_n)_n$ este strict crescător.
c) Arată că șirul $(u_n)_n$ este mărginit superior de 2.
d) Determină $p \in \mathbb{N}$ dacă $2 - 10^{-5} < u_n < 2$, $\forall\, n > p$.

3. Fie șirul $(u_n)_n$, cu $u_0 \in \mathbb{R}$ și $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 8$. Determină $u_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $(u_n)_n$ să fie șir constant.

4. Studiază monotonia șirurilor $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arătând, în fiecare caz, că $u_{n+1} - u_n = 3(u_n - u_{n-1})$:
a) $u_0 = -2$, $u_{n+1} = 3u_n + 5$;
b) $u_0 = -3$, $u_{n+1} = 3u_n - 7$.

5. Studiază monotonia șirurilor cu termenii generali:

a) $a_n = n^2 - 3n + 5$; b) $b_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$;

c) $c_n = \dfrac{(1{,}5)^n}{n^5}$; d) $d_n = \dfrac{4^n}{n!}$; $\forall\, n \geqslant 1$.

6. Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{3^n}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

a) Stabilește formula termenului general.
b) Studiază monotonia șirului.
c) Arată că $(a_n)_n$ este un șir mărginit.

7. Pentru următoarele șiruri definite prin formula termenului general:
i) calculează primii 5 termeni;
ii) reprezintă grafic primii 3 termeni;
iii) studiază monotonia și mărginirea.

a) $(3n + 5)_{n\in\mathbb{N}}$; b) $(-4n + 11)_{n\in\mathbb{N}}$;

c) $\left(\dfrac{3}{5}n - \dfrac{4}{11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; d) $(n^2 - n + 3)_{n\in\mathbb{N}}$;

e) $(-3n^2 + 12n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$; f) $(n^3 + 1)_{n\in\mathbb{N}}$;

g) $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$; h) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

i) $\left(\left(\dfrac{11}{10}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$; j) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$;

k) $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$; l) $((-0{,}5)^n)_{n\in\mathbb{N}}$;

m) $\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; n) $\left(\dfrac{3n+1}{-n-5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

o) $(n\cdot(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$; p) $(\sqrt{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$;

r) $(|2n-7|)_{n\in\mathbb{N}}$; s) $\left(\dfrac{n^2+1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$;

t) $\left(\dfrac{3^n}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$; u) $\left(\sin n\dfrac{\pi}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. Arată că șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n = \sin n - 2\cos 3n$ este mărginit.

9. Sunt mărginite următoarele șiruri?

a) $\left(\dfrac{n^2}{n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

b) $\left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$;

c) $\left(\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$;

d) $\left(\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

10. Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$. Determină formula termenilor a_{2n+1} și a_{2n}.

11. Calculează primii 6 termeni ai următoarelor șiruri. Studiază monotonia și mărginirea fiecăruia dintre următoarele șiruri.

a) $u_{n+1} = u_n - 1$, $u_0 = 1$; b) $u_{n+1} = 3^{u_n+5}$, $u_0 = -2$;

c) $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n$, $u_0 = 1$; d) $u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n$, $u_0 = 4$;

e) $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$, $u_0 = 5$; f) $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$, $u_0 = 0$;

g) $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right)$, $u_0 = 1$;

h) $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$, $u_0 = 3$.

4. Limita unui șir

În antichitate, matematicienii greci (Arhimede, Zenon și alții) au utilizat șirurile pentru obținerea unor aproximări cât mai bune ale unor numere. Mult mai târziu, s-au introdus conceptele de șir convergent și limită. Abia la începutul secolului al XIX-lea, Bolzano (1817) și Cauchy (1821) au dat definiția convergenței unui șir. În acest domeniu au avut rezultate remarcabile și matematicienii Gauss (1777-1855) și Abel (1802-1829).

Șiruri care au limită

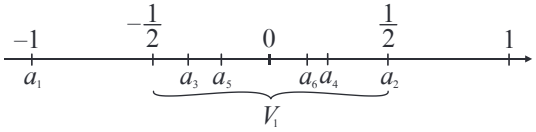
Noțiunea de limită este fenomenul cel mai important din analiza matematică. Să ne apropiem de această noțiune prin câteva exemple.

EXEMPLE

1) Fie șirul cu termenul general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Să reprezentăm pe axă primii termeni:

$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4},\ a_5 = -\frac{1}{5};\ a_6 = \frac{1}{6}; \ldots$



Dacă n ia valori foarte mari, ce poți spune despre poziția termenilor pe axă? De care număr real tind ei să se apropie?

Considerăm următoarele mulțimi care sunt vecinătăți ale originii:

$V_1 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $V_2 = (-2; 4)$, $V_3 = \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$, $V_4 = (-\infty, 1) \cup (7; \infty)$.

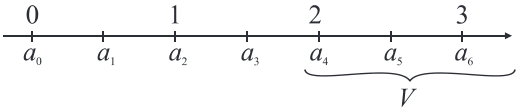
Pentru fiecare dintre ele răspunde la întrebările următoare:

a) Câți termeni ai șirului sunt în afara mulțimii V?

b) Începând de la ce rang $k \in \mathbb{N}^*$ avem $x_n \in V$, $\forall n \geqslant k$, $n \in \mathbb{N}^*$?

2) Considerăm șirul cu termenul general $a_n = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Avem $a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = 2,\ a_5 = \frac{5}{2},\ a_6 = 3, \ldots$



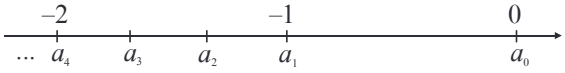
Dacă n ia valori foarte mari, de care element din $\overline{\mathbb{R}}$ tind să se apropie termenii șirului?

Considerăm mulțimea $V \in \mathcal{V}(\infty)$, $V = (2, \infty]$.

Răspunde la întrebările a) și b) de la exemplul 1. Dacă se consideră o altă vecinătate, $V' \in \mathcal{V}(\infty)$, care sunt răspunsurile la întrebările de mai sus?

3) Considerăm șirul cu termenul general $a_n = -\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Avem: $a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ a_2 = -\sqrt{2},\ a_3 = -\sqrt{3},\ a_4 = -2, \ldots$



1) Reprezintă grafic primii cinci termeni pentru fiecare din șirurile:

$\left(5 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(2 - n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\sqrt{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Ce poți spune despre termenii șirurilor când n ia valori foarte mari? Către ce element din $\overline{\mathbb{R}}$ tind ei să se apropie?

2) Se consideră șirul $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$, $n \geqslant 2$. Câți termeni ai șirului sunt în afara vecinătății $V = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ a elementului 2?

3) Se consideră șirul $(2n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ și $V \in \mathcal{V}(\infty)$, $V = (10; \infty]$. Câți termeni ai șirului sunt în afara mulțimii V?

4) Se consideră șirul cu termenul general $a_n = -3n + 13$, $n \in \mathbb{N}$ și mulțimea $V \in \mathcal{V}(-\infty)$, $V = [-\infty; -4]$. Determină $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \in V$, $\forall n \geqslant n_0$.

Logica în acțiune!

5) Să ne amintim calculul propozițional.

Orice propoziție are o valoare de adevăr notată cu 0, dacă propoziția este falsă, și cu 1, dacă propoziția este adevărată.

Fie p și q propoziții. Valorile de adevăr ale propozițiilor compuse sunt date în tabel:

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Demonstrează că, pentru orice propoziții p, q, următoarele propoziții sunt adevărate: $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$; $\overline{p \to q} \leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$; $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$; $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$; $(p \to q) \leftrightarrow (\rceil q \to \rceil p)$.

Dacă n este foarte mare, de care element din $\overline{\mathbb{R}}$ tind să se apropie termenii șirului?

Considerăm mulțimea $V \in \mathcal{V}(-\infty)$, $V = [-\infty, -5)$. Răspunde la întrebările a) și b) puse la exemplul 1.

Ce a fost comun în cele trei exemple de mai sus? De fiecare dată am găsit un element $l \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât orice vecinătate a lui l să conțină termenii șirului începând de la un anumit rang. Elementul $l \in \overline{\mathbb{R}}$, dacă există, se numește limita șirului.

Definiție.

Fie $(a_n)_n$ un șir și $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Șirul (a_n) are limita l* (sau *șirul (a_n) tinde la l*) dacă orice vecinătate a lui l conține toți termenii șirului începând de la un anumit rang.

Se notează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ sau $\lim a_n = l$ sau $a_n \xrightarrow{n} l$ sau $a_n \to l$.

Să analizăm, din punct de vedere al logicii matematice, definiția limitei unui șir.

Variabilele sunt: *vecinătate*, *rang*, *termeni* și sunt legate de cuantificatorii: *orice* (adică $\forall$), *un anumit* (adică $\exists$) și respectiv *toți* (adică $\forall$). Dacă scriem cu ajutorul cuantificatorilor și conectorilor logici definiția limitei unui șir, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists n_V \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_V, a_n \in V].$$

Observație.

Aplicând regulile de negație obținem: $\lim a_n \neq l \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(l)$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_V \in \mathbb{N}, n_V > n$ și $a_{n_V} \notin V$.

Șirul (a_n) nu are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă există o vecinătate a lui l în afara căreia există o infinitate de termeni ai șirului.

Șirul $a_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ nu are limita 0;

șirul (b_n): 1; 0; 1; 0; 1; 0; ... nu are limită.

Definiție.

Se numește *șir convergent* un șir care are limită finită. În caz contrar, șirul se numește *divergent*.

Observații.

♦ *Natura unui șir* este calitatea lui de a fi convergent sau divergent. Nu orice șir cu limită este convergent. Șirurile cu limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) nu sunt convergente, deoarece limita lor nu este finită.

♦ șir → convergent (cu limită finită)
șir → divergent → cu limita $+\infty$ sau $-\infty$
divergent → nu are limită

♦ Notăm: $\mathcal{C}$ – mulțimea șirurilor convergente, $\mathcal{D}$ – mulțimea șirurilor divergente și $\mathcal{L}$ – mulțimea șirurilor cu limită; obținem $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$; $\mathcal{C} = \mathcal{L} \setminus \mathcal{D}$.

Ce sunt predicatele și cuantificatorii?

6) Fie A mulțime și P mulțime de propoziții. O funcție $p: A \to P$ se numește predicat.

Exemplu: „$x \in \mathbb{R}$, $x + 3 = 4x^2$“ este un predicat care, pentru $x = 1$, este propoziție adevărată și, pentru $x = 2$, este propoziție falsă.

Predicatele pot avea mai multe variabile.

Exemplu: „$x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 3$“.

Predicatul devine propoziție dacă îi legăm variabilele cu cuantificatorii $\forall$ și $\exists$.

Exemple:

„$\forall x, \forall y, \forall z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 3$“ este falsă.

„$\exists x, \forall y, \forall z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 3$“ este falsă.

„$\exists x, \forall y, \exists z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 3$“ este adevărată; în acest caz, z depinde de x și y.

„$\exists x, \exists y, \exists z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 3$“ este adevărată.

„$\forall x, \forall y, \exists z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 3$“ este adevărată; în acest caz, z depinde de x și y.

7) Ce reprezintă mulțimile:

$\mathcal{D} \cup \mathcal{L}$; $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$; $\mathcal{D} \setminus \mathcal{L}$; $\mathcal{L} \setminus \mathcal{C}$?

Dă un exemplu de șir din $\mathcal{L} \setminus \mathcal{C}$.

Cum aplicăm definiția limitei pentru a demonstra că un șir are limita l?

Urmărește soluțiile propuse pentru exercițiile **8**, **9**, **10** și recunoaște elementele din definiția limitei unui șir.

8) Demonstrează că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n+3} = 1$.

Soluție.

Dacă $V \in \mathcal{V}(1)$, atunci există $r = r_V > 0$ astfel încât $(1 - r; 1 + r) \subset V$. Determinăm un rang $N = N_r$ începând de la care $a_n \in (1 - r; 1 + r) \subset V$. Pentru aceasta rezolvăm dubla inecuație cu necunoscuta $n \in \mathbb{N}$.

$1 - r < a_n < 1 + r$; $|a_n - r| < 1$;

$\dfrac{5}{n+3} < r$; $n + 3 > \dfrac{5}{r}$; $n > \dfrac{5-3r}{r}$

Dacă $r \in \left(0; \dfrac{5}{3}\right]$, atunci $N_r = \left[\dfrac{5-3r}{3}\right] + 1$.

Dacă $r \in \left(\dfrac{5}{3}; \infty\right)$, atunci $N_r = 0$.

Am arătat că:

$\forall V \in \mathcal{V}(1), \exists N_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \in V$, $\forall n \geqslant N_V$, $n \in \mathbb{N}$, deci șirul are limita 1.

Propoziție.
Fie (a_n) un șir crescător, nemărginit și $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci:

a) $\lim a_n = \infty$

b) $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Demonstrație.

a) Fie $V \in \mathcal{V}(\infty)$; există $m = m_V > 0$ astfel încât $(m; \infty) \subset V$. Șirul fiind nemărginit, există $N = N_m \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_N > m$.

Deoarece șirul este crescător, rezultă că $a_n \geqslant a_N > m$, $\forall n \geqslant N$.

N depinde de m, m depinde de V, deci N depinde de V.

Am arătat că $\forall V \in \mathcal{V}(\infty)$, $\exists N_V \in \mathbb{N}$ astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_v \Rightarrow a_n \in V$, adică $\lim a_n = \infty$.

b) Fie $V \in \mathcal{V}(0)$; există $r = r_V > 0$ astfel încât $(-r; r) \subset V$. Raționând ca la subpunctul a), deducem că există $N = N_r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \geqslant a_N > \frac{1}{r}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$, deci $-r < 0 < \frac{1}{a_n} < r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$, adică $\frac{1}{a_n} \in V$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$ sau $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Asemănător se demonstrează și următoarea ...

Propoziție.
Dacă șirul (a_n) este descrescător, nemărginit și $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci:

a) $\lim a_n = -\infty$

b) $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

EXEMPLU

$\lim \frac{1}{n!} = 0$; $\lim 10^n = \infty$;

$\lim(-\sqrt{n+2}) = -\infty$; $\lim \frac{1}{-\lg n} = 0$.

Propoziție.
$\lim a_n = l \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\lim(a_n - l) = 0$.

Folosește ideea:
„pentru $r > 0$, $l - r < a_n < l + r \Leftrightarrow -r < a_n - l < r$“
și redactează demonstrația teoremei.

Propoziție.
$a_n \to 0$ dacă și numai dacă $|a_n| \to 0$

Demonstrația se bazează pe propozițiile:
$\forall V \in V(0)$, $\exists r > 0$ astfel încât $(-r; r) \subset V$ și $a_n \in (-r; r) \Leftrightarrow |a_n| \in (-r; r)$.

9) Demonstrează că $\lim \sqrt{n} = \infty$.

Soluție.

Dacă $V \in \mathcal{V}(\infty)$, atunci există $m = m_V > 0$ astfel încât $(m; \infty) \subset V$. Determinăm un rang $N = N_m$ începând de la care $a_n \in (m; \infty) \subset V$. Rezolvând inecuația $a_n > m$ găsim $N_m = [m^2] + 1$.

10) Demonstrează că $\lim\left(\log_{\frac{1}{2}} n\right) = -\infty$.

Soluție.

Dacă $V \in \mathcal{V}(-\infty)$, atunci există $m = m_V < 0$ astfel încât $(-\infty, m) \subset V$. Determinăm un rang $N = N_m$ începând de la care $a_n \in (-\infty; m) \subset V$.

Rezolvând inecuația $a_n < m$, găsim $N_m = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^m\right] + 1$.

11) Folosind definiția limitei unui șir, arată că:

a) $\lim \frac{2n+1}{n+3} = 2$;

b) $\lim(2n^2 + 1) = \infty$;

c) $\lim(-10^n) = -\infty$;

d) $\lim(\lg n) = \infty$;

e) $\lim \frac{n^2+2}{n^2+1} = 1$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{2n+5} = 1$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n} = \infty$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 0$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2} = \infty$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n-2} = 0$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n^2+1} = \infty$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)^3 - n^3] = 0$.

Proprietăți ale limitei unui șir

Teoremă. Limita unui șir, dacă există, este unică.

Demonstrație.

Presupunem că șirul $(a_n)_n$ are în $\overline{\mathbb{R}}$ limitele l_1 și l_2, cu $l_1 \neq l_2$. Există $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ și $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ astfel încât $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Deoarece $l_1 = \lim a_n$, rezultă că în V_1 se găsesc toți termenii șirului de la un anumit rang. În afara vecinătății V_2 există o infinitate de termeni ai șirului, ceea ce contrazice $\lim a_n = l_2$.

Teoremă.

Dacă schimbăm ordinea termenilor unui șir, limita nu se schimbă; adică, dacă șirul (a_n) are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o bijecție, atunci șirul $(b_n = a_{f(n)})$ are limita l.

Demonstrație. În afara oricărei vecinătăți a lui l șirurile (a_n) și (b_n) au același număr finit de termeni.

În același mod putem demonstra următoarea ...

Teoremă.

Dacă adăugăm sau eliminăm dintr-un șir un număr finit de termeni, nu se modifică existența limitei și valoarea acesteia.

EXEMPLU

Dacă șirul (a_n) are limita l, atunci:
- șirul $(b_n = a_{n+7})$ are limita l;
- șirul (a_n): a_0; 0; a_1; 1; a_2; a_3; ...; a_n; ... are limita l.

Următoarea teoremă justifică trecerea la limită în inegalități.

Teoremă.

Dacă un șir de numere pozitive (a_n) converge la l, atunci $l \geqslant 0$.

Demonstrație.

Presupunem că $l < 0$; există $r > 0$ cu $(l - r; l + r) \subset (-\infty; 0)$. Mulțimea $(l - r; l + r)$ este o vecinătate pentru l.

Există un rang $N = N_r$ astfel încât $a_n \in (l - r; l + r)$, $\forall n \geqslant N$, adică $a_n < 0$, $\forall n \geqslant N$, contradicție.

Subșiruri

Definiție.

Fie $(a_n)_{n \geqslant 0}$ un șir și $(k_n)_n$ un șir strict crescător de numere naturale. Șirul $(a_{k_n})_{n \geqslant 0}$ se numește *subșir* al șirului $(a_n)_{n \geqslant 0}$.

Propoziție.

Dacă $(k_n)_n$ este un șir strict crescător din $\mathbb{N}$, atunci $k_n \geqslant n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Fie $0 \leqslant k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$

Din $k_1 > k_0$, rezultă $k_1 \geqslant 1 + k_0 \geqslant 1$; din $k_2 > k_1$ rezultă $k_2 \geqslant 1 + k_1 \geqslant 2$. Presupunem $k_n \geqslant n$.

Din $k_{n+1} > k_n$ rezultă $k_{n+1} \geqslant 1 + k_n \geqslant 1 + n$. Deci $k_n \geqslant n$, $\forall n \geqslant 0$.

12) Urmărește soluția propusă pentru a arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} \neq 1$, apoi arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n+1}{3n} \neq \frac{9}{4}$.

Soluție.

Deoarece $a_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$, găsim o vecinătate $V \in \mathcal{V}(1)$, $V = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ astfel încât în afara ei să existe o infinitate de termeni ai șirului. Într-adevăr

$$a_n > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > 1.$$

13) Calculează primii zece termeni ai șirului $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce observi?

Ce poți spune despre șirul format cu termenii de rang par? Dar despre cel format cu termenii de rang impar?

Formulează un rezultat valabil în general pentru termenii șirului $(a^n)_n$, cu $a < -1$.

14) Calculează:

a) $\lim \frac{2}{n^2+7}$;

b) $\lim \lg n$;

c) $\lim \frac{1}{5^n + 6^n}$;

d) $\lim(-10^n - 2)$.

15) Se consideră șirul $a_n = (-1)^n 3$, $n \in \mathbb{N}$. Calculează $\lim |a_n|$. Șirul (a_n) are limită?

16) Demonstrează că, dacă un șir de numere negative este convergent la l, atunci $l \leqslant 0$.

17) Fie (a_n) și (b_n) două șiruri astfel încât $a_n \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim a_n = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = l_2 \in \mathbb{R}$. Demonstrează că $l_1 \leqslant l_2$.

Observații

- Un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are o infinitate de subșiruri.
- Șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este un subșir al său; în acest caz, $k_n = n$, $\forall n \geqslant 0$.
- În aplicații putem întâlni subșiruri ca: $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(a_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, $(a_{3n})_{n\geqslant 0}$

Teoremă.
Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subșir $(a_{k_n})_n$ are limita l.

Demonstrație.
Pentru orice vecinătate $V \in \mathscr{V}(l)$, în afara ei există un număr finit de termeni ai șirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$ și, bineînțeles, un număr finit de termeni ai subșirului $(a_{k_n})_n$. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = l$.

Consecințe.

1) Un șir care are două subșiruri cu limite diferite nu are limită.

2) Dacă un subșir al șirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$ nu are limită, atunci $(a_n)_{n\geqslant 0}$ nu are limită.

3) Dacă un șir conține două sau mai multe subșiruri care au aceeași limită și ele „acoperă“ toți termenii șirului, adică orice termen al șirului este termen în cel puțin unul din subșirurile respective, atunci șirul are limită și limita sa este egală cu limita comună a subșirurilor.

Teoremă.
Se consideră șirurile (a_n), (b_n) și (x_n) astfel încât $\lim a_n = \lim b_n = 0$ și $x_n = \max\{a_n; b_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci șirul (x_n) are limita zero.

Demonstrație.
Dacă $x_n = a_n$, $\forall n \geqslant k$ sau $x_n = b_n$, $\forall n \geqslant k$ ($k \in \mathbb{N}$, k fixat), atunci $x_n \to 0$.

Dacă $x_n = a_n$, $\forall n \in M_1$ și $x_n = b_n$, $\forall n \in M_2$, cu M_1, M_2 infinite și $M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$, atunci $(a_n)_{n\in M_1}$ este subșir al șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și are limita 0; analog $(b_n)_{n\in M_2}$ are limita 0. Subșirurile $(a_n)_{n\in M_1}$ și $(b_n)_{n\in M_2}$ „acoperă” șirul (x_n), deci $x_n \to 0$.

18) Arată că șirul $(a_n)_n$, $a_n = (-1)^n$, nu are limită.

Indicație.
$a_{2n} = (-1)^{2n} \to 1$; $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \to -1$.

19) Fie șirul $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$. Calculează $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k}$.

20) Arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2(-1)^n}{n} = 0$.

21) Fie $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$, $n \geqslant 1$.

a) Reprezintă grafic șirul utilizând funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.
Studiază natura șirului.

b) Determină formula termenului general.

22) Fie șirul $u_n = \log_2 n$.

a) Calculează $\lim\limits_{k\to\infty} u_{4^k}$.

b) Arată că $u_{mp} = u_m + u_p$, $\forall\, m, p \in \mathbb{N}^*$.

23) Fie șirul $u_n = (-1)^n \sin\frac{n\pi}{2}$.

Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{4n+1}$.

Este convergent șirul $(u_n)_n$?

Șirul $(u_{2n+1})_n$ este divergent?

24) Fie șirul $v_n = (-1)^n \cos\frac{n\pi}{2}$. Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} v_{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_{4n+1}$.

Este convergent șirul $(v_n)_n$?

Este divergent șirul $(v_{2n+1})_n$?

1. Studiază monotonia șirurilor cu termenii generali, $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $a_n = \frac{n+5}{n+7}$; b) $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$;

c) $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$; d) $a_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2}$;

e) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$; f) $a_n = \frac{2^n}{n!}$;

g) $a_n = n^3 - n$; h) $a_n = (-1)^n n$.

2. Studiază mărginirea șirurilor $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definite prin termenii generali:

a) $a_n = 1 + (-1)^n$;

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

d) $a_n = \frac{n!}{n^n}$;

e) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$;

f) $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$;

g) $a_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + ... + \frac{1}{2^n+1}$;

h) $a_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + ... + \frac{n}{2n-1}$;

i) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$;

j) $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

3. Câți termeni ai șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$, cu $a_n = \frac{n-7}{2n-1}$, sunt negativi?

4. Câți termeni ai șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$, cu $a_n = \frac{n^2-7n+1}{n+2}$, sunt mai mici decât $\frac{1}{2}$?

5. Câți termeni ai șirului (a_n), cu $a_n = \frac{3}{n+2}$, se află în intervalul $\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right]$?

6. Care este cel mai mare termen al șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = -3n^2 + 11n - 2$?

7. Care este cel mai mic termen al șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = 3n^2 + 7n - 9$?

8. Fie $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2}, n\geqslant 1$.

a) Reprezintă grafic șirul $(a_n)_n$ utilizând dreapta de ecuație $y = 1 - \frac{x}{2}$. Ar putea fi convergent acest șir?

b) Determină formula termenului general.

c) Studiază existența limitei șirului $(a_n)_n$.

9. Arată că o progresie aritmetică cu rația strict pozitivă tinde la ∞, iar dacă rația este strict negativă, progresia tinde la $-\infty$.

10. Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+...+n}{n}$.

11. Arată că următoarele șiruri nu sunt monotone:

a) $x_n = (-2)^n$; b) $x_n = \sin\frac{n\pi}{3}$; c) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Stabilește dacă fiecare dintre șirurile de mai sus are limită.

12. Fie $(a_n)_n$ definit de $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n\geqslant 1$.

a) Reprezintă grafic șirul $(a_n)_n$. Care este natura șirului (convergent, divergent)?

b) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$.

c) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$.

13. a) Dacă un șir convergent $(u_n)_n$ are limita $l < 0$, atunci $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, dacă $n \geqslant n_0$, atunci $u_n < 0$.

b) Formulează un enunț pentru cazul $l > 0$.

14. Fie (a_n) și (b_n) două șiruri cu limitele l_1 respectiv l_2. Demonstrează că, dacă șirul (a_n) este majorat de șirul (b_n), atunci $l_1 \leqslant l_2$.

15. Fie (x_n) un șir de numere reale convergent la l. Demonstrează că, dacă $a \leqslant x_n \leqslant b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $l \in [a; b]$.

16. Arată că, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

17. Dacă $(a_{3n})_{n\geqslant 0}$, $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$ și $(a_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ au limită, arată că șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limită.

18. Studiază monotonia și mărginirea șirurilor $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definite prin:

a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$;

b) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot (2n)}$;

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

5. Convergență și mărginire

Criteriul majorării. Criteriul cleștelui

Pentru a arăta că un șir are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$, putem folosi compararea acestuia cu un șir cunoscut sau a cărui limită o calculăm ușor.

Teoremă. ***Criteriul majorării pentru șiruri convergente la zero***

Fie (a_n) și (b_n) două șiruri. Dacă există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n| \leqslant |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_1$ și $\lim b_n = 0$, atunci $\lim a_n = 0$.

Demonstrație. Fie $V \in \mathscr{V}(0)$; există $r > 0$ astfel încât $(-r; r) \subset V$. Deoarece $|b_n| \to 0$ și $(-r; r) \in \mathscr{V}(0)$, există $n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|b_n| \in (-r; r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_2$. Avem $-r \leqslant a_n \leqslant |a_n| \leqslant |b_n| < r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, deci $a_n \in (-r; r) \subset V$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant \max\{n_1; n_2\}$, adică $a_n \to 0$.

EXEMPLU

$\lim \dfrac{\cos(n!)}{n} = 0$ deoarece $\left|\dfrac{\cos n!}{n}\right| = \dfrac{|\cos n!|}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ și $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Consecință.

Dacă (a_n) este un șir convergent la zero și (b_n) este un șir mărginit, atunci $(a_n b_n)$ are limita zero.

Demonstrație. $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leqslant M|a_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Deoarece $\lim(M|a_n|) = 0$ (justifică!) rezultă $b_n \to 0$.

EXEMPLU

$x_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{10^n}$ are limita 0, deoarece $a_n = \dfrac{1}{10^n} \to 0$ și $b_n = \operatorname{arctg} n \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teoremă. ***Criteriul majorării pentru limită finită***

Se consideră $l \in \mathbb{R}$, (a_n) un șir și (b_n) un șir cu termenii pozitivi, convergent la zero. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - l| \leqslant b_n$, $\forall n \geqslant n_0$, atunci $\lim a_n = l$.

Demonstrație. Avem $a_n - l \to 0$, deci $a_n \to l$.

EXEMPLU

$\lim \dfrac{3n + \cos n}{n+2} = 3$, deoarece

$\left|\dfrac{3n + \cos n}{n+2} - 3\right| = \dfrac{|\cos n - 6|}{n+2} \leqslant \dfrac{7}{n+2}$ și $\lim \dfrac{7}{n+2} = 0$.

Teoremă. ***Criteriul minorării la ∞***

Fie (a_n) și (b_n) două șiruri. Dacă există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \geqslant b_n$, $\forall n \geqslant n_1$ și $\lim b_n = \infty$, atunci $\lim a_n = \infty$.

Cum aplicăm criteriul majorării (minorării) pentru a arăta că un șir are limita l?

1) Demonstrează că:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n} + \sin n!}{\sqrt{n}+1} = 1$; b) $\lim \dfrac{n^2}{n+2} = \infty$;

c) $\lim \left(\dfrac{-n^2}{n+1}\right) = -\infty$.

Soluție.

a) $\left|\dfrac{\sqrt{n} + \sin n!}{\sqrt{n}+1} - 1\right| = \dfrac{|\sin n! - 1|}{\sqrt{n}+1} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}+1}$;

$\lim \dfrac{2}{\sqrt{n}+1} = \lim \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{n}}{2} + \dfrac{1}{2}} = 0$

(șirul $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$ este crescător și nemărginit).

b) $a_n = \dfrac{n^2}{n+2} = n - 2 + \dfrac{4}{n+2} \geqslant n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Șirul $b_n = n - 2$ are limita ∞, deci $\lim a_n = \infty$.

c) $a_n = \dfrac{-n^2}{n+1} = -n + 1 - \dfrac{1}{n+1} < -n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Șirul $b_n = -n + 1$ are limita $-\infty$, deci $a_n \to -\infty$.

2) Demonstrează că:

a) $\lim \dfrac{5n+2}{n+1} = 5$; b) $\lim(7^n - 5^n) = \infty$;

c) $\lim(2^n - 5^n) = -\infty$.

3) Demonstrează că următoarele șiruri au limita zero:

a) $\left(\dfrac{\cos n!}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; b) $\left(\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^3}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$;

c) $\left(\dfrac{\arcsin \dfrac{1}{n}}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4) Calculează limita șirului $(u_n)_{n \geqslant 1}$,

$u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Indicație.

Observăm că u_n este suma termenilor progresiei geometrice: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3} \ldots \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Demonstrație. $\forall V \in \mathcal{V}(\infty)$, $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel încât $(M, \infty] \subset V$.

Deoarece $(M, \infty] \in \mathcal{V}(\infty)$ și $b_n \to \infty$, rezultă că $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_n > M$, $\forall n \geqslant n_2$. Deci $a_n \geqslant b_n > M$, $\forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, adică $a_n \in V$, $\forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$.

Asemănător se demonstrează și următoarea ...

Teoremă. ***Criteriul majorării la*** $-\infty$

Fie (a_n) și (b_n) două șiruri. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \leqslant b_n$, $\forall n \geqslant n_1$ și $\lim b_n = -\infty$, atunci $\lim a_n = -\infty$.

EXEMPLU

$a_n = n^2 + (-1)^n$ are limita ∞ deoarece $a_n \geqslant n^2 - 1$, $\forall n \geqslant \mathbb{N}$ și $\lim(n^2 - 1) = \infty$.

$b_n = -n^3 + \cos n$ are limita $-\infty$ deoarece $b_n \leqslant -n^3 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim(-n^3 + 1) = -\infty$.

Teoremă. ***Criteriul cleștelui***

$$\begin{tikzcd} a_n \arrow[dr] & x_n \arrow[d] & b_n \arrow[dl] \\ & x & \end{tikzcd}$$

Fie (a_n), (b_n), (x_n) șiruri de numere reale.

Dacă șirul (x_n) este majorat de șirul (b_n) și minorat de șirul (a_n) și dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x \in \mathbb{R}$, atunci (x_n) este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Francezii îl numesc *criteriul cleștelui, „teorema jandarmilor“*, iar englezii îi spun *„criteriul sandwich“*.

Demonstrație.

Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ și $(x_n)_n$ șiruri cu proprietățile din ipoteză. Există $n_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall\, n \geqslant n_0$, $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$. Avem $a_n - x \leqslant x_n - x \leqslant b_n - x$, rezultă $|x_n - x| \leqslant \max\{|a_n - x|, |b_n - x|\}$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - x| = \lim\limits_{n\to\infty} |b_n - x| = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{|a_n - x|, |b_n - x|\} = 0$.

Aplicând criteriul majorării rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Convergență și mărginire

Teoremă.

Orice șir convergent este mărginit

Demonstrație.

Dacă $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \in (l - 1; l + 1)$, $\forall n \geqslant n_0$.

Notăm: $m = \min\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}, l - 1\}$ și
$M = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}, l + 1\}$.

Deoarece $a_n \in [m; M]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deducem că șirul este mărginit.

Teorema ***de convergență a șirurilor monotone (Weierstrass)***

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

În consecință, $u_n = \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \to 2$.

5) Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

a) Arată că $a_n = \dfrac{n}{3n+1}$, $\forall n \geqslant 1$.

b) Demonstrează că șirul $(a_n)_n$ este convergent.

6) Orice număr real x este limita unui șir de numere raționale și limita unui șir de numere iraționale.

Soluție. În orice interval de numere reale există cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists r_n \in \mathbb{Q}$, $\exists i_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $r_n,\ i_n \in \left(x - \dfrac{1}{n}; x + \dfrac{1}{n}\right)$.

Avem $|r_n - x| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $|i_n - x| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând criteriul majorării, deducem $\lim r_n = 0$ și $\lim i_n = 0$.

Cum aplicăm criteriul cleștelui pentru a determina limita unui șir?

7) Calculează limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n+1} + \cos\frac{\pi}{n+2} + \ldots + \cos\frac{\pi}{2n}}{n},$$

$n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

Numerele $\dfrac{\pi}{n+1}, \dfrac{\pi}{n+2}, \ldots, \dfrac{\pi}{2n}$ aparțin intervalului $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ și sunt în ordine descrescătoare, deci

$$\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{n+k} \leqslant \frac{\pi}{n+1},\ \forall k = \overline{1,n}.$$

Aplicând funcția cosinus (care este strict descrescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$) obținem

$$\cos\frac{\pi}{n+1} \leqslant \cos\frac{\pi}{n+k} \leqslant \cos\frac{\pi}{2n},\ \forall k = \overline{1,n}.$$

Demonstrație.

Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ crescător și $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mulțimea A fiind majorată, aplicăm axioma lui Cantor, adică există $\sup A = l \in \mathbb{R}$. Arătăm că $\lim a_n = l$.

Fie $V \in \mathcal{V}(l)$; există $r > 0$ astfel încât $(l - r;\ l + r) \subset V$. Deoarece $l - r$ nu este majorant pentru mulțimea A, există $n_r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a - r < a_{n_r}$.

Șirul fiind crescător avem: $a - r < a_{n_r} \leqslant a_n \leqslant l < a + r, \forall n \geqslant n_r$, adică $a_n \in (a - r;\ a + r) \subset V, \forall n \geqslant n_r$, deci $\lim a_n = l$.

Observații.

♦ Teorema oferă o condiție de convergență suficientă, dar nu și necesară.

♦ Dacă $(u_n)_n$ este un șir convergent, nu rezultă că este și monoton. De exemplu, șirul $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$ este convergent la 0, dar nemonoton.

♦ Nu orice șir mărginit este convergent.

De exemplu, șirul $(-1)^n$ este mărginit dar nu este convergent.

♦ Teorema Weierstrass asigură convergența unui șir mărginit adăugând o condiție suplimentară, aceea de a fi monoton.

Teoremă. ***(Cantor)***

Fie $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall\, n \geqslant 0$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, atunci $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} I_n = \{\alpha\}$, unde $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demonstrație.

Șirurile (a_n) și (b_n) care apar în teorema lui Cantor sunt monotone, primul este crescător și al doilea descrescător.

Avem $a_n \leqslant b_m, \forall n \geqslant 0$ și m fixat. Din teorema lui Weierstrass, rezultă că șirul $(a_n)_n$ convergent la α, $\alpha \leqslant b_m, \forall m \geqslant 0$.

Similar, rezultă că șirul $(b_m)_m$ este convergent la β.

Avem $0 \leqslant |\alpha - \beta| \leqslant b_n - a_n \to 0$, deci $\alpha = \beta$.

Teoremă. ***(Cesaro)***

Orice șir mărgint conține un subșir convergent.

Demonstrație.

Fie (u_n) un șir mărginit. Fie $a_0 < u_n < b_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ne propunem să construim un subșir convergent (v_n) a lui (u_n).

Fie $v_0 = u_0 \in [a_0, b_0] = \left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right] \cup \left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$. Cel puțin unul dintre aceste două intervale care formează reuniunea conține o infinitate dintre termenii șirului (u_n). Notăm acest interval cu $[a_1, b_1]$.

Fie v_1 primul termen din șirul (u_n) care se află în $[a_1, b_1]$ și are indice mai mare decât indicele lui v_0; avem $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$.

Repetăm procedeul și găsim un interval $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, cu $b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$, care conține o infinitate dintre termenii șirului (u_n).

Adunând termen cu termen aceste inegalități și apoi înmulțind cu $\frac{1}{n}$, obținem $\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$\lim b_n = \lim\left(\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n+1}\right) = 0$ și

$\lim c_n = \lim\left(\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{2n}\right) = 0$. Aplicând criteriul cleștelui rezultă $\lim a_n = 0$.

8) Calculează

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Cum aplicăm proprietatea lui Weierstrass pentru a demonstra convergența unui șir?

9) Demonstrează că șirul $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent.

Soluție

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

În plus, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deducem că șirul este descrescător. Atunci $a_n \leqslant a_7$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; pe de altă parte $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este mărginit.

Aplicând proprietatea lui Weierstrass, rezultă că șirul este convergent.

10) Demonstrează că următoarele șiruri sunt convergente:

a) $a_n = \frac{3n+5}{2n+5}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $a_n = \frac{3^n - 1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

c) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

11) Demonstrează că următoarele șiruri sunt convergente:

a) $x_0 = 5$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $x_0 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

12) Dă câte un exemplu de:

a) șir monoton care nu este convergent;

b) șir convergent care nu este monoton;

Fie v_2 primul termen din șirul (u_n), cu indice superior indicelui lui v_1 din (u_n), conținut în $[a_2, b_2]$.

Repetând procedeul, obținem un șir de intervale $I_n = [a_n, b_n]$ cu $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, care respectă condițiile din teorema Cantor: $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$. Subșirul (v_n) al șirului (u_n) verifică $a_n \leqslant v_n \leqslant b_n$. Ca urmare, am găsit (v_n) un subșir convergent al șirului (u_n).

c) șir nemărginit care are limită;
d) șir mărginit care nu are limită;
e) șir nemărginit care nu are limită.

13) Demonstrează că, dacă un șir are un subșir nemărginit, atunci șirul nu are limită finită.

14) Arată că orice șir monoton are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, cu $a_n = \frac{n^3+3n}{2n^2+1}$.

a) Transformă formula termenului general pentru a obține: $a_n = \frac{n}{2}\cdot b_n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $(b_n)_n$ este mărginit.

b) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ utilizând criteriul minorării la ∞.

2. Arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Indicație. $0 < \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n} < \frac{n}{C_n^2}$

3. Arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Indicație. $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\ldots\frac{n}{n} < \frac{1}{n}$.

4. Arată că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{n\pi}{3}\cdot\frac{1}{5^n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2} = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n}{n^2} = 0$.

5. Fie șirul $(x_n)_{n\geqslant 2}$, $x_n = \sqrt[n]{n}$. Arată că:

a) $x_n > 1, \forall n \geqslant 2$;

b) dacă $y_n = x_n - 1 > 0, \forall n \geqslant 2$, atunci $y_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \forall n \geqslant 2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

6. Arată, folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, că șirurile cu termenii generali următori sunt convergente:

a) $a_n = \frac{5n-2}{n+1}$; b) $b_n = \frac{n}{2^n}$; c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

7. Folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, studiază convergența șirului (x_n) definit prin:

a) $x_n = \frac{3n+1}{2n}$, $n \geqslant 1$; b) $x_n = \frac{1-4n}{3n+1}$;

c) $x_n = \frac{n}{\alpha^n} (\alpha > 1)$; d) $x_n = \lg\frac{n+2}{n+1}$.

8. Folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, studiază convergența șirului (x_n):

a) $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$; b) $x_0 = 3$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 5}$;

c) $x_0 = \frac{5}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$.

9. Fie șirul (u_n), $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

a) Studiază monotonia șirului (u_n) în funcție de u_0.

b) Arată că șirul (v_n), unde $v_n = u_n - 6$, este o progresie geometrică și este convergentă.

c) Arată că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 6$.

10. Studiază convergența șirului (u_n), cu $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{5}{2}$.

11. Fie șirul $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arată că $\frac{1}{2\sqrt{n}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determină $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

12. Calculează, folosind criteriul cleștelui, limitele șirurilor:

a) $s_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n+1} + \cos\frac{\pi}{n+2} + \ldots + \cos\frac{\pi}{2n}}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

13. Fie șirul $(u_n)_n$ cu $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Determină a, b astfel încât $u_n = a + \frac{b}{n+1}$ și calculează $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

14. Fie șirul $(v_n)_n$, cu $v_n = \frac{n^2+3n-1}{n-1}$, $\forall n \geqslant 2$.

Determină a, b, c cu $v_n = an + b + \frac{c}{n-1}$, $\forall n \geqslant 2$.

Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

6. Operații cu șiruri care au limită. Șiruri remarcabile

Operații cu șiruri care au limită

Dacă efectuăm operații cu șiruri care au limită obținem, în cazul în care operația între limite este posibilă, șiruri cu limită.

Teoremă.

Fie (a_n) și (b_n) două șiruri cu limită (finită sau infinită).

♦ Dacă suma limitelor are sens, atunci șirul $(a_n + b_n)_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(*Limita sumei este egală cu suma limitelor*!)

Caz exceptat: $\infty - \infty$.

♦ Dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(*Constanta iese în fața limitei*!)

♦ Dacă produsul limitelor are sens, atunci $(a_n b_n)$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(*Limita produsului este egală cu produsul limitelor*!)

Cazuri exceptate: $0 \cdot \infty$ și $0 \cdot (-\infty)$

♦ Dacă șirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are sens și dacă raportul limitelor are sens, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

(*Limita raportului este egală cu raportul limitelor*!)

Cazuri exceptate: $\dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}; \dfrac{-\infty}{-\infty}; \dfrac{-\infty}{\infty}; \dfrac{\infty}{-\infty}$

♦ Dacă $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ are sens, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Cazuri exceptate: $1^\infty, 1^{-\infty}, 0^0, \infty^0$.

♦ Dacă $a \in (0, 1) \cap (1, \infty)$ și (x_n) este un șir strict pozitiv cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}^*$, atunci și $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_a x_n) = \log_a l$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_a x_n) = \log_a\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$.

Demonstrație.

Să demonstrăm că: $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.

a) Presupunem $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ și $l_1 = \lim a_n$, $l_2 = \lim b_n$.

Fie $V \in \mathcal{V}(l_1 + l_2)$; există $r > 0$ cu $(l_1 + l_2 - 2r; l_1 + l_2 + 2r) \subset V$.

Avem $(l_1 - r, l_1 + r) \in \mathcal{V}(l_1)$ și $(l_2 - r, l_2 + r) \in \mathcal{V}(l_2)$.

$\lim a_n = l_1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \in (l_1 - r, l_1 + r), \forall n \geqslant n_1$.

$\lim b_n = l_2 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_n \in (l_2 - r, l_2 + r), \forall n \geqslant n_2$.

1) Completează tabelul:

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim(a_n + b_n)$
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a + b$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	?
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?
$+\infty$	$-\infty$	nedeterminare

2) Dacă $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ și $\lim c_n = 2$, cât este limita șirului $x_n = 2a_n - 3b_n + c_n$?

3) Demonstrează că, dacă șirul (a_n) este convergent și (b_n) nu are limită, atunci $(a_n + b_n)$ nu are limită.

4) Rămâne adevărată concluzia din exercițiul precedent dacă $\lim a_n = \infty$ și (b_n) nu are limită?

Indicație. $a_n = n$, $b_n = (-1)^n$.

5) Completează tabelul:

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim(a_n b_n)$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$
∞	$b < 0$	?
$a < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$a > 0$	$-\infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	?
$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?
$+\infty$	0	nedeterminare
0	$-\infty$	?

6) Fie șirurile (a_n) și (b_n); calculează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$, dacă:

a) $a_n = n$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_n = n^2$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) $a_n = n$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

d) $a_n = 2^n$, $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

e) $a_n = \ln n$, $b_n = \ln\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă $a_n + b_n \in (l_1 + l_2 - 2r, l_1 + l_2 + 2r), \forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, deci $a_n + b_n \in V, \forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, adică $\lim(a_n + b_n) = l_1 + l_2$.

b) Presupunem că $\lim a_n = l_1 \in \mathbb{R}$ și $\lim b_n = \infty$. Fie $V \in \mathscr{V}(\infty)$; există $m > 0$ și $r > 0$ astfel încât $(l_1 - r + m; \infty] \subset V$.

$(l_1 - r; l_1 + r) \in \mathscr{V}(l_1) \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ cu $a_n \in (l_1 - r; l_1 + r), \forall n \geqslant n_1$.

$(m, \infty] \in \mathscr{V}(\infty) \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_n > m, \forall n \geqslant n_2$.

Avem $a_n + b_n > l_1 - r + m, \forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, adică $a_n + b_n \in V$, $\forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, deci $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

Pentru a demonstra celelalte formule, trebuie să considerăm, pe rând, toate cazurile $l_1, l_2 \in \{-\infty, \infty\} \cup \mathbb{R}$.

Lăsăm ca exercițiu demonstrarea celorlalte afirmații din teoremă.

Observații.

♦ Teorema se bazează pe operațiile posibile cu $\pm\infty$.

♦ Operațiile cu șiruri se pot aplica unui număr finit de șiruri. În caz contrar, rezultatele teoremei nu se mai păstrează.

EXEMPLU

Nu putem aplica teorema în cazul calculului $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{de } n \text{ ori}}$, deoarece suma nu are un număr finit de șiruri, dar putem calcula direct: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

Ce înseamnă că $\infty - \infty$ este *caz exceptat* sau *caz de nedeterminare*?

Dacă $\lim a_n = \infty$ și $\lim b_n = -\infty$, nu se poate da un enunț care să afirme existența sau valoarea limitei șirului $(a_n + b_n)$. Acesta poate să aibă orice limită (finită sau infinită) sau să nu aibă limită, cum o să vedem în următoarele ...

EXEMPLE

Dacă $a_n = n + a, a \in \mathbb{R}$ și $b_n = -n$, atunci $a_n + b_n \to a \in \mathbb{R}$.

Dacă $a_n = 2n$ și $b_n = -n$, atunci $a_n + b_n \to \infty$.

Dacă $a_n = n$ și $b_n = -2n$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$.

Dacă $a_n = n + (-1)^n$ și $b_n = -n$, atunci $(a_n + b_n)$ nu are limită.

Teoremă.

Fie $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$ și (a_n) un șir de numere nenegative.

a) Dacă $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{l}$.

(Limita radicalului este egală cu radicalul limitei)

b) Dacă $\lim a_n = \infty$, atunci $\lim \sqrt[p]{a_n} = \infty$.

Demonstrație.

a) $\sqrt[p]{a_n} = a_n^{\frac{1}{p}} = 10^{\frac{1}{p}\lg a_n}$; $\lim \sqrt[p]{a_n} = 10^{\frac{1}{p}\lim(\lg a_n)} = 10^{\frac{1}{p}\lg l} = \sqrt[p]{l}$.

7) Fie șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $b_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

b) Are limită șirul $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

În cazul $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ nu se poate decide existența sau valoarea limitei șirului $(a_n \cdot b_n)_n$ (*Cazul exceptat* $0 \cdot \infty$).

8) Dacă $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 7$ și $\lim c_n = -\infty$, ce limită are șirul $x_n = (2a_n + b_n)c_n$?

9) Demonstrează că:

a) dacă șirul strict pozitiv $(b_n)_n$ tinde la zero, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$;

b) dacă șirul strict negativ $(b_n)_n$ are limita zero, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = -\infty$.

10) Fie șirul (b_n) astfel încât $b_n > 0$, $\forall n \in M_1$ și $b_n < 0, \forall n \in M_2$ și $\lim b_n = 0$. Demonstrează că, dacă mulțimile M_1 și M_2 sunt infinite și $M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ nu are limită.

11) Completează tabelul:

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$
$a \neq 0$	∞	0
$a \neq 0$	$-\infty$	?
$+\infty$	$b > 0$	∞
$+\infty$	$b < 0$	?
$-\infty$	$b > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$b < 0$	?
0	$\pm\infty$	?
$\pm\infty$	$\pm\infty$	nedeterminare
0	0	?

12) Dacă $\lim a_n = \infty$, $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim b_n = 0$, cât este $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$?

Consecință.

Fie $p \in \mathbb{N}$ și (a_n) un șir. Dacă $\lim a_n = -\infty$, atunci $\lim \sqrt[2p+1]{a_n} = -\infty$.

EXEMPLU

$$\lim \sqrt{5+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{5}, \quad \lim \sqrt[4]{n^2+1} = \infty, \quad \lim \sqrt[3]{-n^3+1} = -\infty.$$

Probleme rezolvate

1) Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrează că (x_n) este convergent.

Soluție.

Calculând primii trei termeni ai șirului avem $x_1 < x_2 < x_3$.

Demonstrăm prin inducție matematică propoziția: P(n): $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

P(1) este adevărată ($x_1 < x_2$). Presupunem că $x_k < x_{k+1}$; atunci $2 + x_k < 2 + x_{k+1}$ și $\sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+x_{k+1}}$, adică $x_{k+1} < x_{k+2}$, deci șirul este strict crescător. Atunci $x_n \geqslant \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Observăm $x_1 < 2$, $x_2 < 2$, $x_3 < 2$, deci demonstrăm prin inducție matematică propoziția $Q(n)$: $x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$Q(1)$ este adevărată ($x_1 < 2$). Presupunem $x_k < 2$; atunci $2 + x_k < 4$ și $\sqrt{2+x_k} < 2$, adică $x_{k+1} < 2$. Rezultă $x_n \in [\sqrt{2}; 2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul este mărginit. Fiind monoton și mărginit, șirul este convergent.

2) Calculează limita șirului (x_n) definit prin relația de recurență $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

Am demonstrat că șirul este monoton și mărginit $\left(x_n \in [\sqrt{2}, 2), \forall n \in \mathbb{N}^*\right)$. Din teorema lui Weierstrass rezultă $\lim x_n = l$ și $l \in [\sqrt{2}, 2]$. Trecem la limită în relația de recurență; obținem ecuația $l = \sqrt{2+l}$, care are soluția $l = 2$.

3) Calculează limita șirului definit astfel: $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = 1 + a_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soluție.

Avem $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul este strict crescător. Deoarece orice șir monoton are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, deducem că există $\lim a_n = l \in (1; \infty]$. Prin trecere la limită în relația de recurență obținem ecuația $l^2 - l + 1 = 0$, care nu are soluții reale, deci $l = \infty$.

Observație.

Teoremele și exemplele precedente introduc reguli de calcul în $\overline{\mathbb{R}}$. În tabelul următor sunt date operațiile care au sens, respectiv operațiile fără sens (nedeterminările) din $\overline{\mathbb{R}}$.

13) Fie șirurile (a_n) și (b_n); calculează $\lim a_n$, $\lim b_n$ și $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ dacă:

a) $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$;

b) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$;

c) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n^2}$;

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

14) Dă câte un exemplu de șiruri (a_n) și (b_n) pentru fiecare din următoarele cazuri:

a) $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$ și $\lim \frac{a_n}{b_n} = 2$.

b) $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$ și $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

c) $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$ și $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu are limită.

15) Completează tabelul:

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim\left(a_n^{b_n}\right)$
$a > 1$	$+\infty$	$+\infty$
$a \in (0, 1)$	$+\infty$	?
$a > 1$	$-\infty$	?
$a \in (0, 1)$	∞	0
$+\infty$	$b > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$b < 0$	?
0	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?
0	0	nedeterminare
1	∞	?
∞	0	?

16) a) Dacă $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$, cât este $\lim(\lg(2a_n - b_n))$?

b) Dacă $\lim a_n = -\infty$, $\lim b_n = -\infty$, cât este $\lim\left(\log_{\frac{1}{2}}(a_n b_n + 7)\right)$?

Operația	Operații care au sens	Nedeterminări
Adunare Scădere	$a+\infty=\infty$ $a-\infty=-\infty$ $\infty+\infty=\infty$ $-\infty-\infty=-\infty$	$\infty-\infty$; $-\infty+\infty$ (cazul exceptat $\infty-\infty$)
Înmulțire Împărțire	$a\cdot\infty=\begin{cases}\infty, \text{ dacă } a>0\\ -\infty, \text{ dacă } a<0\end{cases}$ $a\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, \text{ dacă } a>0\\ \infty, \text{ dacă } a<0\end{cases}$ $\infty\cdot\infty=\infty$; $\infty\cdot(-\infty)=-\infty$; $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$; $\frac{a}{\infty}=0$; $\frac{a}{-\infty}=0$.	$0\cdot\infty$; $0\cdot(-\infty)$ (cazul exceptat $0\cdot\infty$) $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{-\infty}{\infty}$; $\frac{\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$ (cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$) $\frac{0}{0}$
Puteri Logaritmi	$a^{\infty}=\begin{cases}\infty, \text{ dacă } a>1\\ 0, \text{ dacă } a\in(0,1)\end{cases}$ $a^{-\infty}=\begin{cases}0, \text{ dacă } a>1\\ \infty, \text{ dacă } a\in(0,1)\end{cases}$ $\infty^{a}=\begin{cases}\infty, \text{ dacă } a>0\\ 0, \text{dar } a<0\end{cases}$ $\infty^{\infty}=0$; $\infty^{-\infty}=0$; $0^{\infty}=0$ $\log_{\alpha}\infty=\begin{cases}\infty, \text{ dacă } \alpha>1\\ -\infty, \text{ dacă } \alpha\in(0,1)\end{cases}$ $\log_{\alpha}0=\begin{cases}-\infty, \text{ dacă } \alpha>1\\ \infty, \text{ dacă } \alpha\in(0,1)\end{cases}$ $\sqrt[n]{\infty}=\infty$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ $\sqrt[n]{-\infty}=-\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, n impar	1^{∞}; $1^{-\infty}$ (cazul exceptat 1^{∞}); ∞^{0}; 0^{0}.

Șiruri remarcabile

1. *Șirul cu termenul general $x_n=n^a$, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$*

Teoremă.

Dacă $a\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}n^a=\begin{cases}0, a<0\\ 1, a=0\\ \infty, a>0\end{cases}$.

Demonstrație.

Scriem $x_n=10^{a\lg n}$ și folosim limita logaritmului și limita puterii.

EXEMPLU

$\lim n^{100}=\infty$, $\lim\sqrt{n}=\infty$, $\lim n^{-\pi}=0$.

Paradoxul lui Zenon. *Ahile și broasca țestoasă (matematician și filozof antic grec, 490-430 î.Hr.).*

Se povestește că Ahile cel iute de picior, aflându-se pe tărâmul umbrelor, a fost provocat la întrecere de o broască țestoasă. Broasca a plecat în cursă cu un avantaj Δ. Ahile a parcurs distanța Δ în timpul t_1, timp în care broasca a mai avansat încă $\Delta/2$; Ahile a parcurs distanța $\Delta/2$ în timpul $t_2=t_1/2$, dar în acest timp broasca s-a mai deplasat încă $\Delta/4$. Se pare că Ahile nu va întrece niciodată broasca țestoasă pentru că, de fiecare dată, până când Ahile va ajunge în poziția în care s-a aflat broasca, aceasta deja a mai avansat puțin.

2. Șirul cu termenul general $x_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Teoremă.

Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a \in (-1; 1) \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a > 1 \\ \text{nu există}, & a \in (-\infty; -1] \end{cases}$

Demonstrație.

Dacă $a > 1$, atunci $a = 1 + b$, $b > 0$.

$a^n = (1+b)^n = 1 + C_n^1 b + C_n^2 b^2 + \ldots + b^n > C_n^1 b = nb$. Deoarece $\lim(nb) = \infty$, deducem $\lim a^n = \infty$.

Dacă $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, atunci $|a| \in (0, 1)$ și $b = \dfrac{1}{|a|} > 1$.

Avem $|a^n| = \dfrac{1}{b^n}$ și $\lim b^n = \infty$, de unde rezultă $\lim |a^n| = 0$, deci $\lim a^n = 0$.

Dacă $a \in \{-1; 0; 1\}$, rezultatul se obține imediat.

Dacă $a < -1$ și notăm $x_n = a^n$, atunci $\lim x_{2n} = \infty$ și $\lim x_{2n+1} = -\infty$, deci (x_n) nu are limită.

EXEMPLU

$$\lim\left(\frac{7}{2}\right)^n = \infty; \quad \lim\frac{2^n + (-5)^n}{7^n} = \lim\left(\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(-\frac{5}{7}\right)^n\right) = 0.$$

3. Șirul cu termenul general $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Numărul e.

Fie șirul cu termenul general $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \geqslant 1$. Încercând să trecem la limită, obținem nedeterminarea 1^∞.

Teoremă.

Șirul $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \geqslant 1$ este convergent. Limita sa, notată cu e, aparține intervalului $(2, 3)$.

Observație.

În demonstrație vom folosi inegalitatea lui Bernoulli: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, $\forall a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație.

Studiem monotonia lui $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Deoarece $e_n > 0$, $\forall\, n \geqslant 1$, studiem poziția față de 1 a raportului $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$.

Avem $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \dfrac{n+1}{n} =$

$$= \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

deci șirul $(e_n)_n$ este strict crescător și, implicit, minorat de $e_1 = 2$.

Considerăm acum șirul $f_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geqslant 1$. Analog se arată că șirul (f_n) este strict descrescător.

Să analizăm cu instrumentele analizei matematice acest paradox. Construim șirul $(t_n)_{\mathbb{N}}$, t_1, $t_2 = t_1/2$, $t_3 = t_2/2$, ...

Știm acum că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_1 + \dfrac{t_1}{2} + \ldots + \dfrac{t_1}{2^n}\right) = 2t_1$, *deci Ahile ajunge broasca și o întrece după timpul $2t_1$. Dacă vom aduna însă cantitățile din ce în ce mai mici (infinitezimale) $t_1 + \dfrac{t_1}{2} + \ldots + \dfrac{t_1}{2^n}$, vom fi ocupați toată viața și tot nu vom ajunge să adunăm o infinitate de termeni.*

De fapt, nu este important dacă Ahile a întrecut sau nu broasca țestoasă și cum s-a mișcat el în tărâmul lui Hades. Este important că, timp de mii de ani, oamenii s-au preocupat de aceste idei, ceea ce i-au condus către mai buna înțelegere a lumii.

17) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n + 2n^2 + 3n^3 + \ldots + 2001n^{2001})$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - n + 2 - n^2 + \ldots + 2001 - n^{2001})$.

18) Calculează:

a) $\lim\left(\sqrt[5]{n^2} + 2n^{\frac{1}{3}}\right)$; b) $\lim\left(n^{-\frac{2}{7}} - 7n^3\right)$.

19) Calculează: a) $\lim(2006^n - 3)$;

b) $\lim\dfrac{8^n + 9^n}{11^n}$; c) $\lim(\pi^n + \sqrt{n})$;

d) $\lim\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^n$; e) $\lim\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}\right)^n$.

20) Calculează: $\lim\left[1 - 2\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^n}\right)\right]$.

Indicație. Numerele $\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3^2}; \ldots; \dfrac{1}{3^n}$ sunt în progesie aritmetică de rație $\dfrac{1}{3}$.

21) Calculează:

a) $\lim\left(\dfrac{\cos n}{n^2} + \dfrac{2^n - 1}{2^n}\right)$; b) $\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 7}{2 \cdot (0{,}5)^n + 1}$;

c) $\lim\dfrac{\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)^n + 2}{\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^n + 1}$; d) $\lim\dfrac{1 + 2 + \ldots + 2^n}{1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}}$

Evident $e_n < f_n$, $\forall\, n \geqslant 1$, deoarece $1+\frac{1}{n}>1$, $\forall\, n \geqslant 1$. Cum $f_5<3$, $2=e_1<e_2<e_3<\ldots<e_n<f_n<f_{n-1}<\ldots<f_5<3$, deci $e_n \in (2, 3)$, $\forall\, n \geqslant 1$. Șirul, fiind monoton și mărginit, este convergent. Limita sa, notată cu e, aparține de asemenea intervalului (2, 3).

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Obținem dubla inegalitate: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Observații. ♦ Numărul e este o constantă fundamentală în analiza matematică (e este irațional și $e \approx 2{,}718281\ldots$).

♦ În analiza matematică este foarte folosit logaritmul cu baza e. Acesta se numește logaritm natural. În loc de $\log_e x$ vom scrie $\ln x$.

♦ Logaritmând în baza e dubla inegalitate obținem

$$n\ln\frac{n+1}{n} < 1 < (n+1)\ln\frac{n+1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{sau}$$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*}$$

22) Calculează limita șirului cu termenul general $a_n = \sqrt[n]{3^n+4^n}$, $n \geqslant 2$.

23) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}$, $n \geqslant 2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^5+2^5+\ldots+n^5}$, $n \geqslant 2$.

24) Calculează:

a) $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n}$; b) $\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^{5n}$.

25) Se consideră șirurile (a_n) și (b_n). Calculează $\lim a_n$, $\lim b_n$ și $\lim\left(a_n^{b_n}\right)$ dacă:

a) $a_n = 10^{\frac{1}{n}}$, $b_n = n$; b) $a_n = 10^{\frac{1}{n^2}}$, $b_n = n$;

c) $a_n = 10^{\frac{1}{n}}$, $b_n = n^2$, d) $a_n = 10^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $b_n = n$.

Notă istorică.

$\log_e x$ se notează $\ln x$. A fost descoperit de John Neper (1550 - 1617) și de Jobst Bürgi (1552 - 1632) în dorința de a pune la dispoziția astronomilor un mijloc de simplificare a calculelor.

Isaac Newton (1615-1677) și G. Leibniz (1646 - 1716) au stabilit dezvoltarea în serie a numărului e.

Leonard Euler (1707 - 1783, matematician, mecanician și astronom elvețian) a introdus în 1748 notația e ca bază a logaritmilor naturali (sau neperiani).

În 1728, Daniel Bernoulli (1700 - 1782) a stabilit formula $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Iraționalitatea lui e a fost demonstrată în 1815 de către J. Fourier (1768 - 1830).

● **1.** Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^5+4n^2-n}{n^2+n+1}\right)^{n^2+3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\sqrt{n+7}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n^2+n+1}{2n+7}\right)^{-\sqrt{n}}$.

● **2.** a) Calculează $\lim\left[(x_n)^{y_n}\right]$, dacă $x_n = e^{-n^2}$ și $y_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Stabilește natura șirului $\left(x_n^{y_n}\right)$, dacă $x_n = e^{-n}$ și $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determină două șiruri (x_n) și (y_n) astfel încât $\lim x_n = \lim y_n = 0$, iar șirul $\left(x_n^{y_n}\right)$ este convergent.

● **3.** a) Calculează $\lim\left[(x_n)^{y_n}\right]$, dacă $x_n = 2^n$ și $y_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculează $\lim\left[(x_n)^{y_n}\right]$, dacă $x_n = 10^{n^2}$, $y_n = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determină două șiruri (x_n) și (y_n) astfel încât $\lim x_n = \infty$, $\lim y_n = 0$, iar șirul $\left(x_n^{y_n}\right)$ nu are limită.

● **4.** Se consideră șirul cu termenul general $x_n = n^{a^2-3a+2}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât șirul (x_n) să fie divergent.

● **5.** Se consideră șirul cu termenul general $x_n = \left(\frac{a+1}{2a+1}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Determină valorile parametrului real a astfel încât șirul (x_n) să fie convergent.

● **6.** Se consideră șirul cu termenul general $x_n = (\lg a + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$. Determină valorile parametrului a astfel încât șirul (x_n) să nu aibă limită.

7. Calculul limitelor în cazuri de nedeterminare

De cele mai multe ori, încercând să determinăm limita unui șir, observăm că suntem în fața unor operații nepermise. Pentru înlăturarea nedeterminării și aflarea limitei se pot utiliza diferite metode. Unele dintre ele au fost puse în evidență până acum (criteriile de convergență, teorema de convergență a șirurilor monotone). În continuare vom prezenta unele metode algebrice de „eliminare“ a nedeterminărilor (scoaterea forțată a unui factor comun, amplificarea cu expresia conjugată). Pentru aceasta, reamintim cele 7 cazuri de nedeterminare:

$\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0.

1. *Limita unei funcții polinomiale de gradul $k \geqslant 1$*

$$\lim_{n\to\infty}(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n + a_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^k \underbrace{\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n}+\ldots+a_0\cdot\frac{1}{n^k}\right)}_{\to a_k} = \begin{cases}\infty, & a_k > 0\\ -\infty, & a_k < 0\end{cases}.$$

Nedeterminarea înlăturată: $\infty - \infty$.

2. *Limita unui raport de funcții polinomiale*

Până acum am reușit să calculăm astfel de limite pe cazuri particulare, prin diferite metode. Vom prezenta o metodă unitară de calcul a limitei unui raport de funcții polinomiale.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1}+\ldots+b_1 n + b_0} =$$

$$= \frac{n^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n}+\ldots+\frac{a_0}{n^k}\right)}{n^l\left(b_l + \frac{b_{l-1}}{n}+\ldots+\frac{b_0}{n^l}\right)} = n^{k-l}\cdot\frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n}+\ldots+a_0\frac{1}{n^k}}{b_l + \frac{b_{l-1}}{n}+\ldots+b_0\frac{1}{n^l}} \to \begin{cases}\frac{a_k}{b_l}, & k = l\\ 0, & k < l\\ \infty\cdot\frac{a_k}{b_l}, & k > l\end{cases}.$$

Nedeterminarea înlăturată: $\frac{\infty}{\infty}$.

3. *Limita unui șir al cărui termen general conține puteri*

Reamintim că $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases}\infty, & a > 1\\ 1, & a = 1\\ 0, & -1 < a < 1\\ \text{nu există}, & a \leqslant -1\end{cases}$.

EXEMPLU

$$\lim_{n\to\infty}(5^n - 2) = \infty; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{5^n + 7^n}{3^n + 7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^n\left[\left(\frac{5}{7}\right)^n + 1\right]}{7^n\left[\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1\right]} = 1.$$

4. *Limita unui șir al cărui termen general conține radicali*

Extindem noțiunea de *grad* astfel: dacă $P(n)$ este o funcție polinomială de grad k, spunem că $\sqrt[p]{P(n)}$ are gradul $\frac{k}{p}$.

1) Calculează: a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n^3 - 3n^2 + 1)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2 - n^3)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n} + 2\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(3-\sqrt{3}\right)n^4 + \left(2-\sqrt{3}\right)n^3 + 1\right]$.

2) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+1}{1-n^2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-n}{n^2+5}$.

3) Determină a și $b \in \mathbb{R}$ astfel încât

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-1}{n+5} - an - b\right) = 2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{\sqrt{n}+3} - a\sqrt{n} - b\right) = 0$.

4) Calculează: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\pi^n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)^n$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n + 2\cdot 5^n}{4^n + 5^{n+1}}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n - 4^n}{2^n - 5^n}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n + 7^n}{3^n - 4^n}$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n - 3^n}{4^{n+1} + 2^n}$.

5) Calculează: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{1+\alpha^n}$ $(\alpha > 0)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n + 4^n}{3^n + 7^n}$ $(a > 0)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$ $(a > 0, b > 0)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\alpha^n + 4}{2\beta^n - 3}$ $(\alpha, \beta \in (0, 1))$;

Exerciții rezolvate.

1) Să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-3n+5}-\sqrt{n+8}\right)$.

Folosim metoda scoaterii forțate a factorului comun n din fiecare radical.

$$\left(\sqrt[3]{n^3-3n+5}-\sqrt{n+8}\right)=\underbrace{n}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}\right)}_{\to 1}\to\infty$$

În funcție de termenul care are gradul mai mare obținem limita $+\infty$ sau $-\infty$. Spunem că funcționează „principiul dominării de grad".

2) Luăm un exemplu în care cei doi termeni au același grad: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{3n^3+n-5}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\underbrace{\left(1-\sqrt[3]{3+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}}\right)}_{\to 1-\sqrt[3]{3}<0}=-\infty$.

În cazul în care nu există „dominare de grad", se aplică „principiul dominării de coeficient". Și în acest caz, limita este $+\infty$ sau $-\infty$.

3) Să vedem ce se întâmplă în cazul în care nu există „dominări de grad sau coeficient".

Să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+n+8}\right)$.

Metoda factorului comun nu este eficientă, deoarece obținem cazul $\infty\cdot 0$. Amplificăm cu conjugata și obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1-(n^2+n+8)}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+n+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-4-\frac{7}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}\right)}=-2$$

În cazul calculului limitei unei diferențe de radicali aplicăm, dacă este cazul, „*principiul dominării de grad*" sau „*principiul dominării de coeficient*", iar limita este $+\infty$ sau $-\infty$. Dacă nu există nici un fel de dominări, amplificăm cu conjugata.

- Conjugata expresiei $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ este $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
- Conjugata expresiei $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ este $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.
- Conjugata lui $\sqrt[p]{a}-\sqrt[p]{b}$ este $\sqrt[p]{a^{p-1}}+\sqrt[p]{a^{p-2}b}+\ldots+\sqrt[p]{b^{p-1}}$.

Nedeterminări înlăturate: $\infty-\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercițiu rezolvat. Fie a_0, a_1, ..., a_k numere reale și

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\ldots+a_k\sqrt{n+k}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\overbrace{\left(a_0+a_1\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\ldots+a_k\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)}^{a_0+\ldots+a_k}.$$

6) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2-5n}-n^2\right)$

Indicație.

$$\sqrt{n^3+n^2-5n}-n^2=n^2\underbrace{\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}}-1\right)}_{\to -1}.$$

7) Calculează:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^5+2n^4-3n+1}-\sqrt{n^4+n^3+3n^2}\right)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(2n+1)^2-\sqrt{n^2-3n+5}\right]$.

8) Determină a și b astfel încât:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+n+4}-(an+b)\right]=1$.

Indicație. $\lim\limits_{n\to\infty}n\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}-a-\frac{b}{n}\right)}_{\to 1-a}=$

$$=\begin{cases}\infty; & 1-a>0\\ -\infty; & 1-a<0\end{cases}.$$

9) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-3n+1}-\sqrt[3]{n^3+5n^2-7}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-5n+1}-\sqrt{n^2+3n+4}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2-3n+5}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt{n-3}-\sqrt{n}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-3n+1}-n\right)$.

10) Determină a, b astfel încât:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^3+n^2+2n+7}-(an+b)\right]=4$.

11) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n+1}-3\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}+n}{\sqrt[4]{n^3-n}+2n}\right)^{\frac{3n^2-1}{\sqrt[3]{n^6-3n}}}$.

12) Studiază convergența șirurilor $u_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$; $v_n=\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+3n}\right)$.

Dacă $a_0 + \ldots + a_k > 0$, atunci $l = +\infty$. Dacă $a_0 + \ldots + a_k < 0$, atunci $l = -\infty$. Dacă $a_0 + \ldots + a_k = 0$, suntem în cazul de nedeterminare $\infty \cdot 0$. Scriem $a_k = -a_0 - a_1 \ldots - a_{k-1}$, deci

$$l = \lim_{n\to\infty}\left[a_0\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+k}\right) + a_1\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+k}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + a_{k-1}\left(\sqrt{n+k-1}-\sqrt{n+k}\right)\right] = 0.$$

5. *Limita unui șir care conține nedeterminarea 1^∞*

Teoremă.

♦ Dacă (a_n) este un șir nenul cu $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

♦ Dacă (a_n) este un șir nenul cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

Indicație. $[a_n] \leqslant a_n < [a_n] + 1, \forall\, n \geqslant 1$. Se minorează și se majorează cu două șiruri ce au limita e, apoi se folosește criteriul cleștelui.

Observație.

Pentru eliminarea nedeterminării 1^∞ cu ajutorul acestei teoreme se procedează astfel:

• se pune în evidență, în componența bazei, șirul (a_n) convergent la zero; de obicei, se adună și se scade 1;

• se pune în evidență la exponent șirul $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$, obținut prin înmulțiri și împărțiri convenabile;

• se aplică operații permise de tipul $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}-1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4n-1}{n^2-3n+2}\right)^{\frac{n^2-3n+2}{4n-1}}\right]^{\frac{n(4n-1)}{n^2-3n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2-3n+2}} = e^4$$

6. *Șirul* $\left(x_n = n(\sqrt[n]{a}-1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n} = 0$ și că $a = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Rezultă de aici că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln a$.

• $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$;

• Dacă (u_n) converge la zero, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{u_n}-1}{u_n} = \ln a$.

Nedeterminări înlăturate: $\dfrac{0}{0}$ sau $0\cdot\infty$

13) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{3n+7}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+7}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\left(\dfrac{n^2+n-3}{n^2+1}\right)^n\right]$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^{-\frac{n}{3}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{2\sqrt{n}-3}\right)^{a\sqrt[6]{n-3}}$, $a \in \mathbb{R}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n-2}}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{\ln n}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^n+1}{e^n}\right)^{1+(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+n)}$.

14) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\right)^{2n+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+7}\right)^{6n+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2-5n+2}{4n^2+n+11}\right)^{\frac{2n^2+3}{n+5}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5^n+2^n}{5^n+3^n}\right)^{n+1}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4^n+3}{4^n+1}\right)^{2^{2n+1}}$.

15) Calculează:

$$L = \lim_{n\to\infty}(n^2+1)\left(6^{\frac{1}{n^2}}+7^{\frac{1}{n^2}}-2\right)$$

Indicație.

Nedeterminare de tipul $\infty \cdot 0$.

Exercițiu rezolvat.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.

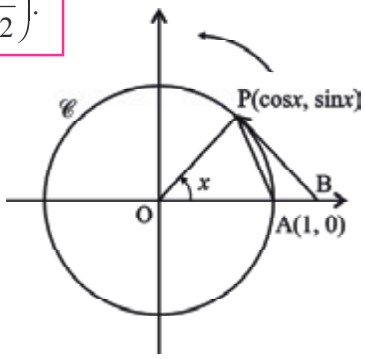
Fiind în cazul de nedeterminare 1^∞ procedăm astfel:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab},\ \text{unde}$$

$$x_n=\frac{n\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\to\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}.$$

7. *Șiruri al căror termen general conține funcții trigonometrice*

Lemă. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\forall\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.



Demonstrație.

Fie $\mathscr{C}$ cercul trigonometric.

Pentru $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, fie punctul $P(\cos x, \sin x)\in\mathscr{C}$ astfel încât arcul orientat $\overset{\frown}{AP}$ are măsura x.

Fie $B\in Ox$, $PB\perp OP$.

Evident, aria ΔAOP este mai mică decât aria sectorului de cerc AOP, care este mai mică decât aria ΔBOP, adică $\dfrac{1}{2}OA\cdot OP\sin x<\dfrac{\pi\cdot OP^2\cdot x}{2\pi}<\dfrac{1}{2}OP\cdot PB$. Pentru că $OA = OP = 1$ și $\dfrac{PB}{OP}=\operatorname{tg}x$, avem $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Consecință. $|\sin x|\leqslant|x|$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Teoremă.

Dacă $\lim a_n = l$ și $l\in\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin a_n)=\sin l$.

Demonstrație.

$$|\sin a_n-\sin l|=\left|2\sin\frac{a_n-l}{2}\cos\frac{a_n+l}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{a_n-l}{2}\right|\leqslant|a_n-l|.$$

Deoarece $\lim|a_n-l|=0$, aplicând criteriul majorării rezultă $\lim(\sin a_n) = \sin l$.

Consecință.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ și $l\in\mathbb{R}$, atunci $\lim(\cos a_n) = \cos l$.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{n^2+1}{n^2}+\frac{7^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{n^2+1}{n^2}\right).$$

16) Calculează: $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

17) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$, $a, b, c\in(0,\infty)-\{1\}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{2}{n+1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-a^{\frac{1}{n}}\right)^n$, $a > 0$ (discuție);

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{2}{n^2+1}}$.

18) Încercuiește litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, în caz contrar.

a) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}>1,\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; A. F.

b) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}>1,\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$; A. F.

c) $\operatorname{tg}x>x,\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$; A. F.

d) $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1,\forall x\in\mathbb{R}$; A. F.

19) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3}{n-5}\sin\dfrac{1}{2n+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+5)\operatorname{tg}\dfrac{1}{n+1}$.

Indicație.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3}{n-5}\sin\dfrac{1}{2n+1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}}\cdot\frac{n^2+3}{(n-5)(2n+1)};$$

EXEMPLU

$\lim \sin\frac{1}{n^2}=0$; $\lim \cos\frac{2}{n}=1$; $\lim \sin\frac{\pi n-1}{6n+2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

Folosind un rezultat pe care îl vom demonstra în cazul limitelor de funcții, se obține următoarea...

Teoremă.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ și $a_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1$.

EXEMPLU

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1 \text{ (deoarece } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0).$$

Nedeterminări înlăturate: $\frac{0}{0}$ sau $0\cdot\infty$.

Consecință. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ și $a_n\neq 0$, $\forall n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n}=1$.

Într-adevăr, $\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n}=\frac{\sin a_n}{a_n}\cdot\frac{1}{\cos a_n}$ și cum $\cos a_n\xrightarrow{n}\cos 0=1$, rezultă că $\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n}\xrightarrow{n}1$.

8. Teoremă. *Criteriul raportului*

Fie $(a_n)_n$ șir de numere strict pozitive. Presupunem că $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$.

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

2) Dacă $l\in(1,\infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

3) Dacă $l=1$ nu putem trage nici o concluzie.

Demonstrație.

Din $l<1$, rezultă că $\exists\, q>0$ cu $0\leqslant l<q<1$;

$\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ cu $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, $\forall n\geqslant n_0$. Deci $a_{n_0+1}<qa_{n_0}$, $a_{n_0+2}<q^2a_{n_0}$ și, în general, $0\leqslant a_{n_0+k}<q^k a_{n_0}$. Pentru $k\to\infty$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

9. Teoremă. *Criteriul Cesaro-Stolz*

Fie șirul (a_n) și șirul (b_n) strict monoton și nemărginit. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$ (finită sau infinită), atunci există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ și, în plus, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

Observații.

♦ Reciproca nu este adevărată. Contraexemplu:

fie $(a_n=(-1)^n)$, $(b_n=n)$; $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\to 0$ și $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)$ nu are limită.

♦ Teorema este valabilă și dacă înlocuim condițiile puse în cazul șirurilor (a_n) și (b_n) cu „șirul (b_n) monoton și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$”.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+5)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n+1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{2n+5}{n+1}.$$

20) Calculează :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot q^n$ $(-1<q<1$, dat)

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot q^n\,(q>0)$ (discuție);

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$ $(a>0)$ (discuție).

21) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

22) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+x}{2+y}+\frac{\sqrt{2}+x}{2\sqrt{2}+y}+\ldots+\frac{\sqrt{n}+x}{2\sqrt{n}+y}\right)$,

$x, y\in\mathbb{R}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\ldots+\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt[3]{n}}$.

23) Calculează limitele șirurilor:

a) $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n^2}$;

b) $a_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

c) $a_n=\frac{1}{n}(\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln n)$;

d) $a_n=\frac{1}{n}\left(\frac{a+b}{c+d}+\frac{a+\sqrt{2b}}{c+\sqrt{2d}}+\ldots+\frac{a+\sqrt{nb}}{c+\sqrt{nd}}\right)$,

$a, c\in\mathbb{R}^*$, $b, d\in\mathbb{R}_+^*$;

♦ Folosind această teoremă se elimină nedeterminările: $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

EXEMPLU

Să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

Rezolvare.

Fie $a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, $b_n = \ln n$. Evident $b_n > 0$, $n \geqslant 2$, $(b_n)_n$ crescător și nemărginit. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \dfrac{1}{\ln e} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2^p a_2+3^p a_3+\ldots+n^p a_n}{n^{p+1}}$, $a_n \to a$, $p \in \mathbb{N}^*$.

24) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n+4}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^3+1}{2n+5}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^\pi+2^\pi+\ldots+n^\pi}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$.

25) Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

10. Consecințe ale teoremei Cesaro-Stolz

Consecința I.

Fie șirul (u_n) cu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n} = u$.

Demonstrație.

Într-adevăr, notând $a_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ și $b_n = n$, sunt verificate condițiile teoremei Cesaro-Stolz.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(u_1+u_2+\ldots+u_{n+1})-(u_1+u_2+\ldots+u_n)}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = u$. Atunci și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n} = u$.

Consecința II.

Fie șirul de numere strict pozitive (v_n) cu $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v \in [0, \infty]$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_1 v_2 .. v_n} = v$.

Demonstrație.

Pentru $v \in (0, \infty)$, într-adevăr, aplicând consecința I pentru șirul $u_n = \ln v_n$, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln v$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n} = \ln v$. Dar $\dfrac{u_1+\ldots+u_n}{n} = \dfrac{\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n}{n} = \ln\sqrt[n]{v_1 v_2 \ldots v_n}$, Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\sqrt[n]{v_1\ldots v_n}} = e^{\ln v}$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_1\ldots v_n} = v$.

Analog se demonstrează pentru $v = 0$ sau $v = \infty$.

Consecința III. ***Criteriul radicalului***

Fie (w_n) șir de numere strict pozitive și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = l$, finită sau infinită.

Atunci șirul $\left(\sqrt[n]{w_n}\right)$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{w_n} = l$.

Indicație.

Aplicăm consecința II șirului ($v_n = \dfrac{w_n}{w_{n-1}}$) cu $v_1 = w_1$. $\sqrt[n]{v_1 v_2 \ldots v_n} = \sqrt[n]{w_1 \cdot \dfrac{w_2}{w_1} \ldots \dfrac{w_n}{w_{n-1}}} = \sqrt[n]{w_n}$.

Observație.

Cu ajutorul consecinței III a lui Cesaro-Stolz se elimină nedeterminări de tipul ∞^0.

PROBLEME PROPUSE

1. Găsește formula termenului general și studiază convergența următoarelor șiruri. În caz de convergență, determină limita:

a) $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{2^n}, \forall n \geqslant 1 \end{cases}$;

b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$, $\forall\, n \geqslant 1$;

c) $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{n}{(n+1)!} \end{cases}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

2. Arată că următoarele șiruri nu sunt monotone:

a) $x_n = (-e)^n$; b) $x_n = \operatorname{tg}\dfrac{n\pi}{3}$; c) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{5^n}$.

3. Calculează: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

4. Fie $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 1$. Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{n^2-5}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^3}{n^2+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+n^2+5}{n^4+2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3-1}{n^2+5}-\dfrac{2n^2+5n-1}{n}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{3n+1}-\dfrac{n^2+1}{3n-6}\right)$.

6. Determină numerele reale a și b astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-an-b\right)=1$.

7. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+4^n}{3^n+4^{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+4^n}{2^n+5}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n+3\cdot 5^n}{2^n-3^n-5^n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{3^n+4^n+5^n}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{5^n}\right)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+2^n}{2^n+1}$.

8. Calculează limitele șirurilor definite prin:

a) $a_n = \dfrac{3^n+a^n}{2^n+5^n}$, $a > 0$;

b) $a_n = \dfrac{2^n+3^n+a^n}{3^n+b^n}$, $a, b > 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}$, $a, b > 0$.

9. Calculează limitele șirurilor definite prin:

a) $a_n = \sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2-4n+1}$;

b) $a_n = \sqrt[3]{n^3-3n^2+2n-5}-\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}$;

c) $a_n = n-\sqrt[4]{n^4+2n^3-3n^2+3n-1}$;

d) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+1}$;

e) $a_n = \sqrt{n^2+2n-5}-n^2$;

f) $a_n = \sqrt[3]{5n^6-2n^4+4n^2-3}-\sqrt{3n^4-8n+11}$;

g) $a_n = 2\sqrt{n^2-3n+1}-n$.

10. Determină a, b, c, d ($d \in \mathbb{N}$) astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-an-b\right)=2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(an-\sqrt{n^2+bn-2}\right)\cdot n=1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=-1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{9n^4-24n^3+6n^2+5}-(an^d+bn+c)\right]=3$.

11. Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2-3n+1}-(an+b)\right]=3$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^3+2n^2-5n+1}-(an+b)\right]=1$.

12. Discută următoarele limite în funcție de parametrii dați:

a) $x_n = n^k\left(\dfrac{n+1}{n+3}-1\right)$, $k \in \mathbb{N}$;

b) $x_n = \sqrt[3]{n^2+n-2}-an$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2-2n+1}-an$, $a \in \mathbb{R}$.

13. Discută și calculează limitele următoarelor șiruri: a) $a_n = \sqrt{n^2-3n+1}-an$, $a \in \mathbb{R}$;

b) $a_n = n^k\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $a_n = n^k\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-3n+1}-n\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

14. Determină limitele șirurilor cu termenul general:

a) $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; b) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n-3}$;

c) $a_n=\left(1+\frac{n}{n^2-3}\right)^{2n+7}$; d) $a_n=\left(1+\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt[6]{n}}$.

15. Calculează limitele pentru șirurile definite prin:

a) $a_n=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n-3}$; b) $a_n=\left(\frac{n^2+2n-3}{n^2+n-1}\right)^{3n+1}$;

c) $a_n=\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{n^3}$; d) $a_n=\left(\frac{2^n+1}{2^n-1}\right)^{2^n}$; e) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{e^n}$;

f) $a_n=\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)^{n+\sqrt{n}}$; g) $a_n=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{n^2}$.

16. Determină $a, b\in\mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{bn}{n^2+1}\right)^{3n}=e^2$.

17. Calculează $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}$, unde $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ și $x_n\neq 0$, $\forall n\geqslant 0$.

18. Discută, în funcție de valorile lui $a\in\mathbb{R}$, valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+a+a^2+...+a^n)^2}{1+a^2+a^4+...+a^{2n}}$.

19. Calculează limita șirului cu termenul general $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)...\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

Indicație. Se înmulțește cu $\left(1-\frac{1}{2}\right)$.

20. Arată că, dacă $|x|<1$, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$.

21. Calculează: $l=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}...\cos\frac{x}{2^n}$, $x\neq 0$.

Indicație. Se înmulțește cu $\sin\frac{x}{2^n}$.

22. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}+2^{2n}}$ și $g:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+x^n}$. Trasează graficele funcțiilor f și g.

23. Calculează: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2-nk+n^2)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

24. Calculează limitele următoarelor șiruri:

a) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3+k}{n^4+k}$; b) $a_n=\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^p}$, $p\in\mathbb{N}$;

c) $a_n=\frac{C_n^1}{1+2^n}+\frac{C_n^2}{2+2^n}+...+\frac{C_n^n}{n+2^n}$.

25. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n^2+1}}+b^{-\frac{1}{n^2+1}}-2\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)+...+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)\right]$

26. Află relația dintre a și b astfel încât șirul $(x_n)_n$, $x_n=\ln(n+1)+a\ln(n+2)+b\ln(n+3)$ să conveargă la 0.

27. Știind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ (*Euler*), calculează: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}...+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$.

28. Calculează limitele și arată că

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}>\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.

29. Calculează $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, dacă:

a) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$; b) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$;

c) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$; d) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!+k!}$;

e) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}$.

30. Arată că șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin $x_0=1$, $x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt[3]{1+x_n}}$ este convergent, apoi calculează $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

31. Calculează limitele șirurilor următoare:

a) $x_n=n!-n\cdot 3^n$; b) $x_n=\frac{5^n}{n!}$; c) $x_n=\frac{n^n}{n!}$;

d) $x_n=\frac{k^n}{n!}$, $k>0$; e) $x_n=\frac{n^3}{3^n}$; f) $x_n=n^2-2^n$.

32. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a\sqrt[n]{a}+b\sqrt[n]{b}+c\sqrt[n]{c}}{a+b+c}\right)^n$, $a, b, c > 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n^2]{a}+\sqrt[n^2]{b}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}\right)^n$, $a, b > 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)^{n-\sqrt{n}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;

33. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2\cdot\sqrt{2}+3^2\cdot\sqrt[3]{3}+\ldots+n^2\cdot\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(n+2)}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\ln n}}{n}$.

34. Folosind criteriul Cesaro-Stolz, arată că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$, $p\in\mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)=\dfrac{1}{2}$, $p\in\mathbb{N}^*$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[a]+[2a]+\ldots+[na]}{n^2}=\dfrac{a}{2}$, $[\cdot]$ este partea întreagă.

35. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+n^2+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$.

36. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n^n}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n^1C_n^2\ldots C_n^n}$, unde $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Dacă șirurile (x_n) și (y_n) sunt descrescătoare, atunci șirul $(x_n + y_n)$ este descrescător.
b) Dacă șirurile (x_n) și (y_n) sunt crescătoare, atunci șirul (x_ny_n) este crescător.
c) Dacă șirurile (x_n) și (y_n) sunt mărginite, atunci șirul $(x_n + y_n)$ este mărginit.
d) Dacă $\lim x_n = 1$ și $\lim y_n = -\infty$, atunci $\lim(x_n^{y_n})=0$.

2. Studiază monotonia și mărginirea șirurilor cu termenul general:

a) $x_n=\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$; b) $x_n=\dfrac{n^2+1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

3. Demonstrează că: a) $\lim\dfrac{5n-\sin n}{n+3}=5$;

b) $\lim\left[\dfrac{1+2+\ldots+n}{1^2+2^2+\ldots+n^2}(\cos n^3)\right]=0$.

4. Demonstrează că următoarele șiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente:

a) $x_n=\dfrac{3^n}{n!}$; b) $x_0=\sqrt{6}$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Testul 2

1. Calculează următoarele limite de șiruri:

a) $\lim(\sqrt{2n+3}-\sqrt{3n+2})$;

b) $\lim\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{5n+1}$;

c) $\lim\left(\dfrac{n+1}{2n+3}-\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)$.

2. Determină $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât

$\lim(\sqrt{4n^2+3n+5}-an-b)=1$

3. Se consideră șirul (a_n) definit astfel: $a_0 = 1$, $a_{n+1}=a_n^2-5a_n+7$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Stabilește dacă șirul (a_n) are limită și în, caz afirmativ, calculează $\lim a_n$

4. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)^{n^3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{C_{n+1}^2}+\sqrt{C_{n+2}^2}+\ldots+\sqrt{C_{2n}^2}}{n^2}$.

Testul 3

1. Se consideră mulțimile:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, $B = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \geqslant 1\}$,
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 4\}$ și $D = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < 0\}$.

a) Scrie sub formă de intervale (din $\overline{\mathbb{R}}$) mulțimile A, B, C și D.
b) Determină $A \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus D$ și $C \setminus B$.
c) Care dintre mulțimile A, B, C și D este vecinătate pentru origine? Dar pentru $+\infty$?

2. Completează următoarele enunțuri, astfel încât să obții propoziții adevărate:

a) Dacă $|2x+3| \leqslant 0$ și $x \in \mathbb{R}$, atunci $x = ...$

b) Mulțimea punctelor de acumulare pentru $(0; 1] \cup \{2; 3\}$ este ...
c) Mulțimea punctelor izolate pentru $\mathbb{Z}$ este ...

d) Dacă $A = \left[-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right] \cap \mathbb{N}$, atunci $\min A = ...$ și $\max A = ...$

3. Se consideră mulțimea $A = (0; 2)$. Dă câte un exemplu de:
a) majorant irațional al mulțimii A;
b) minorant din $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ al mulțimii A;
c) vecinătate a lui $-\infty$ care conține mulțimea A;
d) vecinătate a punctului $\frac{1}{10^6}$ care este inclusă în mulțimea A.

4. Determină $n \in \mathbb{N}^*$ în fiecare din cazurile:

a) $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{7}$; b) $\left|\frac{\lg n - 1}{\lg n + 1} - 1\right| < \frac{1}{10}$.

5. Demonstrează că mulțimea $\{x + \cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este nemărginită.

Testul 4

1. a) Care este inversa funcției $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?
b) Care este domeniul maxim de definiție al funcției $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x(x^2-1)}$?

c) Precizează $\min f$ și $\max f$, dacă $f : \left[0; \frac{4\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

d) Dacă funcția $f : \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to E$, $f(x) = \arccos x$ este surjectivă, care este mulțimea E?

2. Dă câte un exemplu de:
a) perioadă negativă a funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;
b) restricție inversabilă a funcției $f : \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \to [-1; 1]$, $f(x) = \cos x$;
c) număr $a > 0$, $a \neq 1$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^{-x+3}$ să fie strict crescătoare;
d) număr $a > 0$, $a \neq 1$ astfel încât funcția $f : \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a \operatorname{ctg} x$ să fie strict descrescătoare.

3. Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5(x^2 - 9)$.
a) Determină domeniul maxim de definiție D.
b) Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
(p1) funcția f este pară;
(p2) $f(x) = \log_5(x - 3) + \log_5(x + 3)$, $\forall x \in D$.
c) Determină intervalele de monotonie ale funcției f.
d) Demonstrează că funcția f este nemărginită.

4. Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.
a) Determină domeniul maxim de definiție D.
b) Demonstrează că f este impară.
c) Demonstrează că 2006π este perioadă pentru funcția f.
d) Demonstrează că f este strict monotonă pe $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
e) Demonstrează că funcția $g : \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \to (-1; 0)$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ este inversabilă și determină g^{-1}.

Limite de funcții

1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale

În secolul al XVII-lea, trei mari probleme se aflau în atenția oamenilor de știință: studiul traiectoriei unui mobil și viteza sa, studiul tangentelor la o curbă și studiul problemelor de maxim și de minim. Aceste probleme au condus la conturarea unui concept fundamental în analiza matematică, *limita unei funcții într-un punct*.

Cristalizarea completă a conceptelor, așa cum le întâlnim astăzi, datează din secolul al XIX-lea și se datorează unor matematicieni celebri: Cauchy, Bolzano, Darboux, Weierstrass, Heine etc.

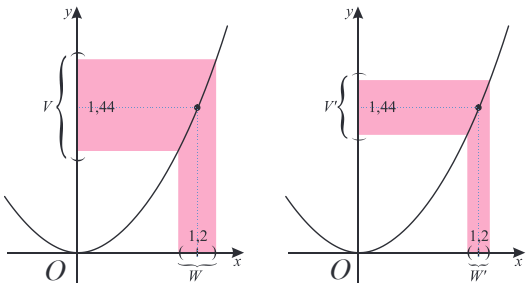
Modelarea conceptului

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și tabelul de valori:

x	1,1	1,19	1,2	1,21	1,3
$f(x)$	1,21	1,4161	1,44	1,4641	1,69

Analiza tabelului de valori ne conduce la ipoteza că, pentru numere x din ce în ce mai apropiate de 1,2 , numerele $f(x)$ sunt din ce în ce mai apropiate de 1,44.

Această observație poate fi formulată astfel: oricât de mică ar fi vecinătatea V a numărului 1,44 de pe axa Oy, există o vecinătate W a numărului 1,2 de pe axa Ox astfel încât $f(W \setminus \{1, 2\}) \subset V$.



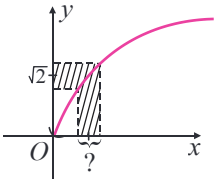
Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Graficul funcției ne sugerează că, oricât de „sus“ este plasat un punct M pe Oy, există o vecinătate W a originii din Ox astfel încât $f(W) \subset (M, \infty)$.

Ce înțelegem prin limită?

1) La un concurs de mașini de curse, distanța parcursă de o mașină este funcție de timp. Momentul cel mai important este cel în care mașina va trece linia de sosire. Un alt moment important este momentul 0, în care mașina demarează în cursă. Ce alte momente importante pot fi studiate în timpul cursei? De ce crezi că în studiul acestor momente ne interesează comportamentul automobilului în vecinătățile acestora?

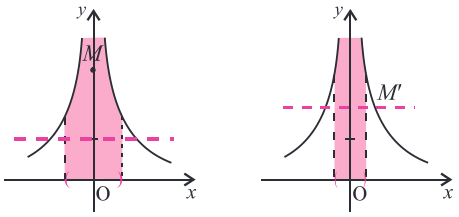
Să interpretăm grafic ...

2) Fie funcția $f: [0; \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.



a) Fie $V = \left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{10}; \sqrt{2} + \dfrac{1}{10}\right)$, $V \in \mathcal{V}(\sqrt{2})$.

Reprezintă grafic pe axa Oy mulțimea V. Găsește o mulțime $U \in \mathcal{V}(2)$ astfel încât $f(x) \in V$, $\forall x \in U \cap [0, \infty) \setminus \{2\}$.



SĂ NE AMINTIM

Fie $D \subset \mathbb{R}$ și $a \in \overline{\mathbb{R}}$; a este punct de acumulare pentru D dacă, $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, avem $V \cap D \setminus \{a\} \neq \varnothing$.

Am notat cu D' mulțimea punctelor de acumulare pentru mulțimea D.

Teoremă *de caracterizare a punctelor de acumulare*

Fie $D \subset \mathbb{R}$ și $a \in \overline{\mathbb{R}}$; a este un punct de acumulare pentru D dacă și numai dacă există un șir $(x_n) \subset D \setminus \{a\}$ astfel încât $\lim x_n = a$.

Demonstrație. Presupunem $a \in \mathbb{R}$.

„$\Rightarrow$" Fie $V_n = \left(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $a \in D'$ și $V_n \in \mathcal{V}(a)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ există $x_n \in V_n \cap D \setminus \{a\}$ și, deoarece $|x_n - a| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem că $\lim x_n = a$.

„$\Leftarrow$" Fie $V \in \mathcal{V}(a)$; deoarece există $(x_n) \subset D \setminus \{a\}$ cu $\lim x_n = a$, rezultă că $\exists N_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{N_V} \in V \cap D \setminus \{a\}$, adică $a \in D'$.

Dacă $a = \infty$ sau $a = -\infty$ raționamentul este asemănător, se modifică doar forma mulțimii V.

Atenție! Problema existenței limitei unei funcții $f : D \to \mathbb{R}$ se pune doar în punctele a care sunt puncte de acumulare pentru D.

Definiție. *(Cauchy)*

Fie $f : D \to \mathbb{R}, a \in D'$ și $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Funcția f are limita l în punctul a dacă, $\forall\, V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap D \setminus \{a\}) \subset V$, adică $\forall x \in U \cap D \setminus \{a\}$, $f(x) \in V$.

În acest caz notăm $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ și citim „limită când x tinde la a din $f(x)$ este egală cu l".

EXEMPLU

$$\lim_{x \to 1,2} x^2 = 1,44; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

RETINE

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D \setminus \{a\}$ rezultă $f(x) \in V)$.

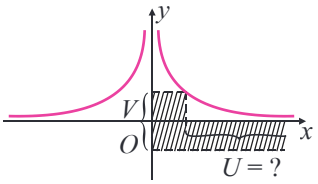
Observații.

♦ Dacă aplicăm regulile de negație obținem: $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists V \in \mathcal{V}(l)$, astfel încât $\forall U \in \mathcal{V}(a), \exists x \in U \cap D \setminus \{a\}$ și $f(x) \notin V)$.

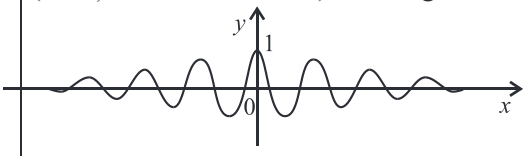
b) Fie $V' = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{100}; \sqrt{2} + \frac{1}{100}\right)$, $V' \in \mathcal{V}(\sqrt{2})$. Găsește o mulțime $U' \in \mathcal{V}(2)$ astfel încât $f(x) \in V', \forall x \in U' \cap [0; \infty) \setminus \{2\}$.

3) Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



Alege pe axa Oy o vecinătate V a punctului O. Găsește o vecinătate $U \in \mathcal{V}(\infty)$ astfel încât, dacă $x \in U \setminus \{0\}$, să rezulte $f(x) \in V$.

4) Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (funcția „sinus atenuat") având graficul:



Analizează graficul funcției f pentru a completa spațiile punctate.

a) Pentru numere reale x din ce în ce mai apropiate de 0, numerele reale $f(x)$ sunt din ce în ce mai apropiate de ...

b) Pentru numere reale x din ce în ce mai mari, numerele reale $f(x)$ sunt din ce în ce mai apropiate de .....

Indicație.

a) Pentru numere reale x foarte apropiate de 0, $f(x)$ este foarte apropiat de 1, adică $\frac{\sin x}{x} \approx 1$.

5) Fie $M = (-\infty, 0) \setminus \{-1\} \cup \{2\}$.

Încercuiește litera A dacă afirmația este adevărată și litera F în caz contrar:

a) $0 \in M'$; A. F.; b) $2 \in M'$; A. F.;
c) $-1 \in M'$; A. F.; d) $-\infty \in M'$; A. F;
e) $1 \in M'$; A. F.; f) $-2 \in M'$; A. F.;
g) $\infty \in M'$; A. F.; h) $\frac{1}{2} \in M'$; A. F..

♦ Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ și există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall\, x \in V \cap D \setminus \{a\}$ implică $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$), spunem că f are în punctul a limita zero pozitiv (respectiv zero negativ) și notăm 0_+ (respectiv 0_-).

EXEMPLU

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} = x - [x]$. Reprezintă graficul funcției f și arată că $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq 1$.

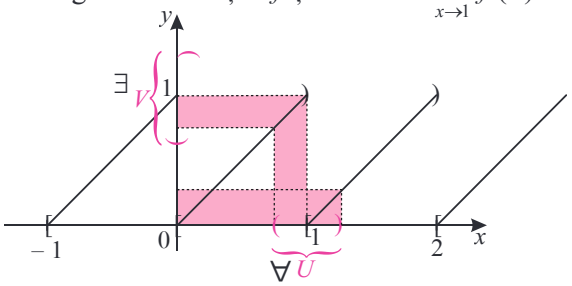


Figura ilustrează faptul că există o vecinătate V a lui 1 de pe axa Oy și, oricare ar fi U vecinătate a lui 1 de pe axa Ox, mulțimea U nu este „dusă“ de funcția f în vecinătatea V a lui 1. În acest caz, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nu există.

Putem observa că această funcție are „tendințe“ laterale în punctul 1 de pe axa Ox, adică, dacă ne apropiem de 1 prin valori mai mici decât 1, valorile funcției se apropie de 1, iar dacă ne apropiem de 1 prin valori mai mari decât 1, valorile funcției se apropie de 0.

Observație.

Definiția limitei de șiruri se obține din definiția limitei de funcții considerând că șirul este o funcție definită pe $\mathbb{N}$. Mulțimea numerelor naturale are ca unic punct de acumulare ∞; ca urmare, limita unui șir se poate calcula numai în ∞.

Teorema care urmează are o importanță deosebită, deoarece ne permite să utilizăm rezultatele obținute despre limite de șiruri pentru limite de funcții.

Teoremă. ***(Criteriul lui Heine)***

Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ și $l \in \overline{\mathbb{R}}$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ dacă și numai dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \geq 0} \subset D \setminus \{a\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, există $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Demonstrație.

„$\Rightarrow$” Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, pentru oricare $V \in \mathcal{V}(l)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall\, x \in D \cap U \setminus \{a\}$ implică $f(x) \in V$.

Fie șirul (x_n) din $D \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Rezultă că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n > N$, $x_n \in U$, deci $\forall\, n > N$, $f(x_n) \in V$.

„$\Leftarrow$” Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq l$, adică $\exists V \in \mathcal{V}(l)$ astfel încât, $\forall U \in \mathcal{V}(a)$, $\exists\, x \in U \cap D \setminus \{a\}$ pentru care $f(x) \notin V$.

6) Care este mulțimea D' dacă:

a) $D = \mathbb{R}$;

b) $D = \mathbb{R}^*$;

c) $D = \{0; 2; 4; 6\}$;

d) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$?

7) Folosind definiția, demonstrează:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x - 3) = -1$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} 10^x = \infty$.

8) Fie funcția $h: [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x \in [-2, 1) \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ -2x + 3, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}.$$

a) Trasează graficul funcției h.

b) Există $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$?

9) Urmărește soluția propusă pentru a arăta că $\lim\limits_{x\to\infty}(x + \sin x) = \infty$ și apoi demonstrează că $\lim\limits_{x\to-\infty}(x + \cos x) = -\infty$.

Soluție.

Fie $V \in \mathcal{V}(\infty)$; există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $(m, \infty] \subset V$. Determinarea mulțimii $U \in \mathcal{V}(\infty)$ se bazează pe inegalitatea $x + \sin x \geqslant x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trebuie să avem $x - 1 > m \Leftrightarrow x > m + 1$, deci $U = (m + 1, \infty]$.

Dacă $x \in U \setminus \{\infty\}$, atunci $x > m + 1$ sau $x - 1 > m$. Rezultă $f(x) \geqslant x - 1 > m$, $\forall x \in U$, deci $f(x) \in V$, $\forall x \in U$.

Cum folosim criteriul cu șiruri pentru a calcula limita unei funcții într-un punct?

10) Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$.

Determină $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Indicație.

Pentru orice șir $(x_n)_n$, cu $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ avem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}(x_n + 1) = 1$$

i) Dacă $a \in \mathbb{R}$, considerăm $U_n = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{V}(a), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $x_n \in U_n \cap D \setminus \{a\}$ și $f(x_n) \notin V, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Din $x_n \in U_n$ rezultă $|x_n - a| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Conform ipotezei există $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$, contradicție cu $f(x_n) \notin V, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Dacă $a = \infty$, considerăm $U_n = (n, +\infty] \in \mathcal{V}(\infty), \forall n \in \mathbb{N}$. Există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $x_n \in U_n \cap D$ și $f(x_n) \notin V, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Din $x_n \in U_n$ rezultă $x_n > n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$, contradicție.

iii) Dacă $a = -\infty$, raționamentul este asemănător cu cel din cazul ii) (rămâne ca exercițiu).

EXEMPLU

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3) = 7$ deoarece
$(\forall x_n \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, x_n \to 2$ rezultă $f(x_n) = x_n^2 + 3$ și $f(x_n) \to 7)$.

Consecința 1.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ și $a \in D'$. Dacă f are limită în a, atunci aceasta este unică.

Ideea demonstrației. Unicitatea limitei unui șir.

Consecința 2.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ și $a \in D'$. Presupunem că există șirurile (x_n) și (y_n) din $D \setminus \{a\}$ cu:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ și

ii) $(f(x_n))_n$ și $(f(y_n))_n$ au limite diferite.

Atunci nu există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Ideea demonstrației este negarea teoremei de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul șirurilor.

Consecința 3. *Studiul limitei funcțiilor de tip Dirichlet*

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} g(x), x \in \mathbb{Q} \\ h(x), x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, unde g și h sunt funcții reale. Atunci f are limită în $a \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$.

Ideea demonstrației. Dacă $(z_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, se consideră subșirurile termenilor raționali, respectiv iraționali, din z_n (dacă există) și se folosește criteriul lui Heine.

EXEMPLU

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

Arată că, $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$, nu există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

11) Folosind criteriul lui Heine, calculează următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3}{(x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \lg x$.

Cum folosim criteriul cu șiruri pentru a arăta că o funcție nu are limită într-un punct?

12) Arată că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ nu are limită în ∞.

Soluție.

Căutăm două șiruri (x_n) și (x'_n) cu limita ∞, astfel încât $(f(x_n))$ și $(f(x'_n))$ să aibă limite diferite. Alegem (x_n) și (x'_n) printre valorile importante ale funcției sinus:

$x_n = n\pi \to \infty$ și $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$.

Avem $f(x_n) = \sin n\pi = 0$ și

$f(x'n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$.

Funcția f nu are limită în ∞ deoarece $f(x_n) \to 0$ și $f(x'_n) \to 1$.

Observație.

Putem să rezolvăm problema considerând un șir (x_n), $x_n \to \infty$ astfel încât $(f(x_n))$ nu are limită. Găsește un asemenea șir!

13) Arată că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ nu are limită în ∞.

14) Demonstrează că funcția

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ nu

are limită în punctul 5.

15) Demonstrează că funcția

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ nu are limită în punctul 1.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ nu are limită în punctul -1.

Soluție. $\forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}$, există șirurile (x_n) din $\mathbb{Q} \setminus \{a\}$ și (y_n) din $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{a\})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a; f(x_n) = 1, f(y_n) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 0$, deci nu există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Pentru a arăta că o funcție f nu are limită în punctul a este suficient să găsim două șiruri $(x_n), (x'_n) \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \to a, x'_n \to a$ astfel încât $(f(x_n))$ și $(f(x'_n))$ să aibă limite diferite.

Limite laterale

Exemplu: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x}$.

x	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-8}	-10^{-10}	0	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$f(x)$	-10^{4}	-10^{6}	-10^{8}	-10^{10}	|	10^{10}	10^{8}	10^{6}	10^{4}

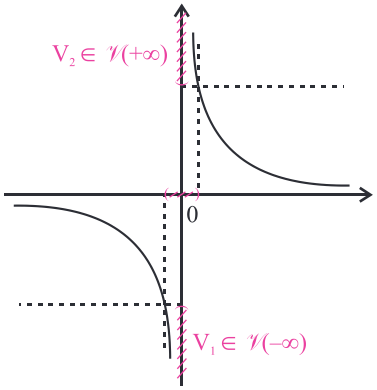
Analiza tabelului și a reprezentării grafice arată că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Însă, funcțiile

$f_1 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ și

$f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{x}$,

au limită în 0:

$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = +\infty$.



Definiție.
Punctul $a \in \mathbb{R}^*$ este *punct de acumulare la dreapta* (respectiv *la stânga*) pentru D dacă, $\forall\, V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap D \cap (a, +\infty) \neq \varnothing$ (respectiv, $V \cap D \cap (-\infty, a) \neq \varnothing$).

Observație.
Dacă a este punct de acumulare la stânga și la dreapta pentru D, atunci a este punct de acumulare pentru D (notăm $a \in D'$).

Definiții.
Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$ și $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $a \in D' \cap \mathbb{R}$ punct de acumulare la dreapta. Dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall\, x \in U \cap D \cap (a, +\infty)$ avem $f(x) \in V$, spunem că *f are limita l la dreapta în a* și notăm

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a+0)_d = l$.

Fie $a \in D'$ punct de acumulare la stânga. Dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall\, x \in U \cap D \cap (-\infty, a)$ avem $f(x) \in V$, spunem că *f are limita l la stânga în a* și notăm

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = f(a-0) = l$.

16) Arată că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$ nu are limită în 1.

Cum calculăm limitele laterale ale unei funcții într-un punct?

17) Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculează limitele laterale ale funcției în punctul 0.

Soluție.

Fie $x_n \in \mathbb{R}^*,\ x_n < 0,\ x_n \to 0$; atunci $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{x_n} = -\infty$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

Fie $x_n \in \mathbb{R}^*,\ x_n > 0,\ x_n \to 0$; atunci $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{x_n} = \infty$; deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \infty$.

18) Determină parametrul real a pentru care funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x<4 \\ ax^2+5, & x>4 \end{cases}$ are limită în $x = 4$.

Indicație.

$\forall\, (x_n)_{n\geq 0}$ șir din $(-\infty, 4)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 11$, deci $\exists\, f(4-0) = 11$.

$\forall\, (x_n)_{n\geq 0}$ șir din $(4, +\infty)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 16a+5$, deci $\exists\, f(4+0) = 16a+5$.

Rezolvăm ecuația $f(4-0) = f(4+0)$ și obținem $a = \dfrac{3}{8}$.

19) Calculează limitele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x+3, & x<2 \\ 2x+1, & x\geq 2 \end{cases}$, în $x = 2$.

20) Determină limitele laterale (dacă există) ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ în punctul 5.

21) Stabilește dacă funcția

$f: \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{(x-5)^2}$ are limită în punctul 5

Observație.

Teorema Heine de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul șirurilor se extinde pentru limita la dreapta (la stânga).

Teoremă.

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $a \in D' \cap \mathbb{R}$ un punct de acumulare. Funcția f are limită în a dacă și numai dacă f are limită la dreapta și la stânga în a și aceste limite sunt egale.

Demonstrație.

„$\Rightarrow$" Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, atunci evident există $f(a-0) = l$ și $f(a+0) = l$.

„$\Leftarrow$" Presupunem că există $f(a+0)$ și $f(a-0)$, iar $f(a+0) = f(a-0) = l$. Rezultă că, pentru oricare $V \in \mathcal{V}(l)$, există $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât $\forall\, x \in U_1 \cap D \cap (-\infty, a)$ implică $f(x) \in V$ și $\forall\, x \in U_2 \cap D \cap (a, +\infty)$ implică $f(x) \in V$. Cum $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ și $\forall\, x \in U \cap D \setminus \{a\}$ implică $f(x) \in V$, rezultă că există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

22) Determină parametrul real a astfel încât funcția:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1}, & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$

să aibă limita în punctul 1.

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-2}, & x < 2 \\ e^{\frac{1}{2-x}}, & x > 2 \end{cases}$ să aibă limită în punctul 2.

23) Determină valorile parametrului real m astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2 + e^{\frac{m}{x-1}}}$ să aibă limită în punctul $x = 1$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Arată, cu ajutorul definiției cu vecinătăți, că $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Folosind definiția cu vecinătăți arată că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

3. Calculează, folosind teorema de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul șirurilor și operații cu șiruri care au limită, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3 + x - 1)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 2x^2 + 3)$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

4. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

Definim șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ și $(y_n)_{n\geq 0}$, $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

i) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

ii) Există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

5. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x - \sqrt{2}}$.

i) Calculează $f(\sqrt{2} - 0)$ și $f(\sqrt{2} + 0)$.

ii) Există $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$?

6. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2) \\ 10, & \text{dacă } x = 2 \\ -x^2 + 7, & \text{dacă } x \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Cercetează dacă există $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

7. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 3 - ax^2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Determină parametrul real a astfel încât f să aibă limită în 1.

8. Fe $h: [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-2, 1) \\ 2, & x = 1 \\ -2x + 3, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

i) Calculează $h(1-0)$ și $h(1+0)$.

ii) Are h limită în $x_0 = 1$?

9. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x \in (-\infty, -1) \\ x, & x \in [-1, \infty) \end{cases}$.

Cercetează dacă există $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

10. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+a}, & x \in (-\infty, -2) \\ x, & x \in [-2, \infty) \end{cases}$.

Pentru ce valori ale parametrului a, f are limită în -2?

2. Operații cu limite de funcții. Limitele funcțiilor elementare

Operații cu funcții

Definiție. Dacă $f, g : D \to \mathbb{R}$, atunci:

♦ funcția $f + g : D \to \mathbb{R}$, cu $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in D$ se numește *funcția sumă* a funcțiilor f și g;

♦ funcția $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, cu $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in D$ se numește *funcția produs* a funcțiilor f și g;

♦ funcția $\frac{f}{g} : D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, cu $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in D_1$, se numește *funcția cât* a funcțiilor f și g.

EXEMPLU

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ și $g(x) = \sin x$. Atunci: $(f + g)(x) = x + \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $(f \cdot g)(x) = x\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fie funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2\sin x$. Se observă că $h = f^2 \cdot g$.

Compunerea funcțiilor este o altă modalitate de a defini funcții noi cu ajutorul unor funcții cunoscute.

SĂ NE AMINTIM

Fie funcțiile $f : A \to B$ și $g : C \to D$, $\operatorname{Im} f \subseteq C$. Funcția $g \circ f : A \to D$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, se numește *compusa funcției g cu funcția f*.

Operații cu limite de funcții

Proprietățile care urmează se pot demonstra cu ajutorul rezultatelor obținute pentru operațiile cu limite de șiruri.

Teoremă.

Fie funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$, astfel încât există limitele $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\lim\limits_{x \to a} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

♦ Dacă suma limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci funcția $f + g$ are limită în punctul a și $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

♦ Dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci funcția αf are limită în punctul a și $\lim\limits_{x \to a}(\alpha f(x)) = \alpha \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

♦ Dacă produsul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci funcția $f \cdot g$ are limită în punctul a și $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

♦ Dacă $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D \setminus \{a\}$ și raportul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în punctul a și $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

Să ne amintim operațiile cu funcții!

1) Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

i) Calculează:

a) $(f + 2g - h)(x)$;

b) $(f \cdot g \cdot h)(x)$;

c) $(g \cdot h^2)(x)$;

d) $\left(h + \frac{g}{f}\right)(x)$;

e) $\left(\frac{f - 2g}{3f + 1}\right)(x)$.

ii) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Care dintre enunțurile următoare sunt adevărate?

a) dacă $F(x) = \frac{x + \cos x}{2^x + 5}$, atunci $F = \frac{h^3 + g}{f + 5}$;

b) dacă $F(x) = 4^x + 2^x$, atunci $F = f^2 + f$;

c) dacă $F(x) = \frac{x\cos x}{2^x}$, atunci $F = \frac{h^3 \cdot g}{f}$;

d) dacă $F(x) = \sin^2 x$, atunci $F = 1 - g^2$;

e) dacă $F(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + x^2}$, atunci $F = \frac{1 - g}{1 + h^4}$.

2) Fie funcțiile

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 3x + 2$,

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 3^x$,

$f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(x) = \sqrt{x}$.

Marchează corespondențele:

a) $f_3 \circ f_2 \circ f_1$	1) $3^{\sqrt{x}}$
b) $f_2 \circ f_3$	2) $3^{2\sqrt{x}} - 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2$
c) $f_3 \circ f_2$	3) $\sqrt{3^{x^2 - 3x + 2}}$
d) $f_2 \circ f_2$	4) 3^{3^x}
e) $f_1 \circ f_2 \circ f_3$	5) $9^x - 3^{x+1} + 2$
f) $f_1 \circ f_2$	6) $\sqrt{3^x}$

3) Calculează limitele funcțiilor de la exercițiul **1**, i) și ii), în punctul $x = 0$.

♦ Dacă $f(x) > 0$, $\forall x \in D$ și $\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci funcția $f(x)^{g(x)}$ are limită în punctul a și $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

♦ Dacă $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ și $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, atunci funcția $\log_\alpha f(x)$ are limită în punctul a și $\lim\limits_{x\to a}(\log_\alpha f(x)) = \log_\alpha\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

În cazurile exceptate la operații cu limite de funcții, limita poate să existe (și să fie egală cu un număr real, $+\infty$ sau $-\infty$) sau să nu existe. Exemplele următoare motivează această afirmație.

♦ *Cazul de excepție „$\infty - \infty$“.*

EXEMPLE

1) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ și $g(x) = -x$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ și

$\exists \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

2) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $g(x) = -x$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ și $\exists \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

3) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ și $g(x) = 2x$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ și $\exists \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+g(x)) \overset{\infty-\infty}{=} -\infty$.

4) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$ și $g(x) = -x$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(-x) = -\infty$, $f(x) + g(x) = \sin x$; $\nexists \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x))$.

♦ *Cazul de excepție „$0 \cdot \infty$“.*

EXEMPLE

1) Fie $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $g(x) = 4^x$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ și $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty} 2^x = \infty$.

2) Fie $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $g(x) = 2^x$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2^x = 1$.

3) Fie $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x^2$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ și $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty}(-x) = -\infty$.

4) Fie $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ și $g(x) = x$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $f(x)\cdot g(x) = \sin x$, $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x)$.

4) Completează tabelul:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 + l_2$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	
$l_1 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
∞	$-\infty$	nedeterminare

5) Completează tabelul:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 l_2$
$l_1 > 0$	$+\infty$	
$l_1 < 0$	$+\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
0	$\pm\infty$	

6) Completează tabelul:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$	$\frac{l_1}{l_2}$
$l_1 > 0$	0_+	$+\infty$
$l_1 > 0$	0_-	
$+\infty$	$l_2 > 0$	
$-\infty$	$l_2 > 0$	
0	$+\infty$	
0	$-\infty$	
$+\infty$	0_+	
$-\infty$	0_-	

7) Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ și $a \in D'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ și funcția g nu are limită în a, demonstrează că funcția $f + g$ nu are limită în a.

Indicație. Folosește raționamentul de demonstrație prin reducere la absurd.

8) Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ și $a \in D'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ și g nu are limită în a, demonstrează că funcția fg nu are limită în a.

9) Rămâne adevărată concluzia din problema precedentă dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ și g nu are limită în a?

Limitele funcțiilor elementare

1) *Funcția constantă:* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} c = c,\ \forall\alpha\in\overline{\mathbb{R}}}$$

2) *Funcția identitate pe* $\mathbb{R}$: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} x=\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x=\infty}\qquad\boxed{\lim_{x\to-\infty} x=-\infty}$$

3) *Funcția putere cu exponent natural:*
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} x^n=\alpha^n,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}\qquad\boxed{\lim_{x\to\infty} x^n=\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}\infty, & n \text{ par}\\ -\infty, & n \text{ impar}\end{cases}}$$

4) *Funcția putere cu exponent real:* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}^*$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} x^a=\alpha^a,\ \forall\alpha\in(0,\infty)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x^a=\begin{cases}\infty, & a>0\\ 0, & a<0\end{cases}}\qquad\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^a=\begin{cases}0, & a>0\\ \infty, & a<0\end{cases}}$$

5) *Funcția radical*

a) $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2p]{x}$, $p\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\sqrt[2p]{x}=\sqrt[2p]{\alpha},\ \forall\alpha\in[0,\infty)}\qquad\boxed{\lim_{x\to\infty}\sqrt[2p]{x}=\infty}$$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2p+1]{x}$, $p\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\sqrt[2p+1]{x}=\sqrt[2p+1]{\alpha},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\sqrt[2p+1]{x}=\infty}\qquad\boxed{\lim_{x\to-\infty}\sqrt[2p+1]{x}=-\infty}$$

6) *Funcția polinomială*

$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{0,n}$, $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} p(x)=p(\alpha),\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} p(x)=\lim_{x\to\infty} a_nx^n=\begin{cases}\infty, & a_n>0\\ -\infty, & a_n<0\end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} p(x)=\lim_{x\to-\infty} a_nx^n=\begin{cases}\infty, & a_n>0,\ n \text{ par sau } a_n<0,\ n \text{ impar}\\ -\infty, & a_n>0,\ n \text{ impar sau } a_n<0,\ n \text{ par}\end{cases}}$$

Calculul limitelor de funcții elementare și utilizarea operațiilor cu funcții care au limită.

10) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^5$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{10}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^8$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x^6+5x^4+3x^2-1)$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+4x^3+2x+1)$.

11) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} x^{\sqrt{2}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{\pi}{2}}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1+\sqrt{2}}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1-\sqrt{2}}$.

12) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}|x-1|$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}|x-1|$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}|x^2-4|$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}|x^2-4|$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}|x-1|$.

13) Calculează limitele: a) $\lim\limits_{x\to 16}\sqrt[4]{x}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt[n]{x}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ fixat;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt[7]{x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}\right)$.

14) Calculează următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+1)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+1)$;

c) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-2x+1)$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x+1)$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x+1)$; f) $\lim\limits_{x\to 0}(x^5-4x-3)$;

g) $\lim\limits_{x\to-1}(x^5-4x-3)$; h) $\lim\limits_{x\to 1}(x^5-4x-3)$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-4x-3)$; j) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-4x-3)$.

15) Calculează următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-x-1}$;

7) *Funcția rațională*. Notăm $D=\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}\,|\,q(x)\neq 0\}$

$f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, unde $p(x)$ și $q(x)$ sunt funcții polinomiale cu coeficienți reali, $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0,\ q(x)=b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+...+b_1x+b_0,\ b_p\neq 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)},\ \forall\alpha\in D}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}=\begin{cases}\infty\ \text{, dacă } n>p \text{ și } \dfrac{a_n}{b_p}>0\\ -\infty\text{, dacă } n>p \text{ și } \dfrac{a_n}{b_p}<0\\ \dfrac{a_n}{b_p}\text{, dacă } n=p\\ 0\ \text{, dacă } n<p\end{cases}}$$

Asemănător se calculează $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

Dacă $\alpha\in\mathbb{R}\setminus D$, există două funcții polinomiale p_1 și q_1 astfel încât $\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}\cdot(x-\alpha)^m$, cu $m\in\mathbb{Z}$ și $q_1(\alpha)\neq 0$.

8) *Funcția exponențială* $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}a^x=a^\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty,\ a>1\\ 0,\ 0<a<1\end{cases}}\qquad\boxed{\lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0,\ a>1\\ \infty,\ 0<a<1\end{cases}}$$

9) *Funcția logaritmică* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\log_a x=\log_a\alpha,\ \forall\alpha\in(0,\infty)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}\infty,\ a>1\\ -\infty,\ 0<a<1\end{cases}}\qquad\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x=\begin{cases}-\infty,\ a>1\\ \infty,\ 0<a<1\end{cases}}$$

10) *Funcția sinus*: $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

Nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$.

11) *Funcția cosinus*: $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

Nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-x-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-x-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{x-1}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-1}{x-1}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-1}{x-1}$; j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^5-1}$; l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^5-1}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^5-1}$; n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^5-1}$.

16) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to -1}2^x$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3}\right)^x$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}a^x,\ a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$;

e) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; f) $\lim\limits_{x\to\sin\alpha}e^x,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

g) $\lim\limits_{x\to\ln a}e^x,\ a\in(0,\infty)$.

17) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to e}\ln x$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x$;

d) $\lim\limits_{x\to 100}\lg x$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\lg x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\lg x$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(e\lg x+10\ln x)$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\ln x$; i) $\lim\limits_{x\to 10}\log_{\frac{1}{10}}x$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}x$; k) $\lim\limits_{x\searrow 0}\log_{\frac{1}{e}}x$.

18) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to k\pi}\sin x$, $\lim\limits_{x\to k}\cos x,\ k\in\mathbb{Z}$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{}{4}}\cos x$; e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{}{3}}\cos x$; g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$.

12) *Funcția tangentă:* $\operatorname{tg}:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

$$\boxed{\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}+k\pi}\operatorname{tg}x=\infty,\ \forall k\in\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}+k\pi}\operatorname{tg}x=-\infty,\ \forall k\in\mathbb{Z}}$$

Nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tg}x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{tg}x$.

13) *Funcția cotangentă:* $\operatorname{ctg}:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}}$$

$$\boxed{\lim_{x\nearrow k\pi}\operatorname{ctg}x=-\infty,\ \forall k\in\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\lim_{x\searrow k\pi}\operatorname{ctg}x=\infty,\ \forall k\in\mathbb{Z}}$$

Nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{ctg}x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{ctg}x$.

14) *Funcția arcsinus:* $\arcsin:[-1;1]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\arcsin x=\arcsin\alpha,\ \forall\alpha\in[-1;1]}$$

15) *Funcția arccosinus:* $\arccos:[-1;1]\to[0,\pi]$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\arccos x=\arccos\alpha,\ \forall\alpha\in[-1;1]}$$

16) *Funcția arctangentă:* $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}}$$

17) *Funcția arccotangentă:* $\operatorname{arcctg}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arcctg}\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\operatorname{arcctg}x=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi}$$

Pentru demonstrarea acestor formule se folosesc: criteriul cu șiruri, proprietatea corespunzătoare de la șiruri și, în cazul arcfuncțiilor, schimbarea de variabilă.

19) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to0}\arccos x$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{arctg}x$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\operatorname{arctg}x$; d) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}x$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$.

20) Calculează limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\arccos(\sin x)$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\operatorname{arc\,tg}(2\sin x)$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\sin(\pi-\operatorname{arctg}x)$.

21) Încercuiește litera A dacă afirmația este adevărată și litera F în caz contrar.

a) Nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; A. F.

b) Există $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$; A. F.

c) Nu există $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$; A. F.

d) Nu există $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$; A. F.

Există șirul $(x_n)_n\to0$, astfel încât:

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=1$; A. F.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0$; A.F.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=\frac{\pi}{2}$; A.F?

22) Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{\sqrt[3]{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x}+x^3\right)\left(\sqrt[5]{x}-|x|\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}+1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\sin x^2}+1}{\sqrt[3]{\cos x^6}}$.

Limitele funcțiilor compuse

Teoremă.

Fie $f: A \to B$ și $g: B \to \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $b \in B'$.

Dacă $\begin{cases} \text{i) } \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \text{ii) } \exists\, V \in \mathcal{V}(a), \forall\, x \in V \cap A \setminus \{a\}, f(x) \neq b, \\ \text{iii) } \exists \lim\limits_{y\to b} g(y) = l,\ l \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$

atunci $\exists \lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim\limits_{y\to b} g(y) = l$.

Demonstrație.

Fie $(x_n)_n \subset A \setminus \{a\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Definim $(y_n = f(x_n))_n$. Din ii) rezultă că $\exists\, m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n > m$, $y_n \in B \setminus \{b\}$, iar din iii) obținem

$\lim\limits_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = l$.

Observație.

Substituția $y = f(x)$ se mai numește schimbare de variabilă.

Problemă rezolvată.

Calculează limitele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \setminus \{2; 3\} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \dfrac{1}{e - e^{\frac{1}{x-2}}}$ în punctele $x = 2$ și $x = 3$.

Soluție.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{1}{e - e^y} = \dfrac{1}{e}$, unde $y = \dfrac{1}{x-2}$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{e - e^y} = 0$, unde $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Dacă $x \in (2; 3)$, atunci $x - 2 \in (0; 1)$ și $\dfrac{1}{x-2} > 1$, deci $e < e^{\frac{1}{x-2}}$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{y\to e\\ y>e}} \dfrac{1}{e - y} = -\infty$, unde $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ și

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{y\to e\\ y<e}} \dfrac{1}{e - y} = \infty$, unde $y = e^{\frac{1}{x-2}}$.

ATENȚIE

Dacă $f: D \to \mathbb{R}$ este o funcție elementară sau o funcție care se obține din funcții elementare prin aplicarea succesivă de un număr finit de ori a operațiilor algebrice, de compunere, de inversare și $\alpha \in D \cap D'$, atunci există $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Cum folosim schimbarea de variabilă pentru a calcula limita unei funcții compuse?

23) Verifică următoarele calcule:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$, unde $y = x^3 - x^2 + x - 1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \sin y = 0$, unde $y = \dfrac{1}{x}$.

24) Completează spațiile punctate:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 4} = \lim\limits_{y\to....} \sqrt{y} = \infty$, unde $y = x^2 + 3x - 4$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\sqrt{x^2+3x-4}} = \lim\limits_{y\to....} e^y = ...$, unde $y = ...$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim\limits_{y\to...} \sqrt[3]{y} = ...$, unde $y = ...$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \lim\limits_{y\to....} .... = ...$, unde $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$.

25) Completează spațiile punctate astfel încât să obții propoziții adevărate:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{tg}(2^x) = \lim\limits_{y\to....} \mathrm{tg}\, y = 0$, unde $y = 2^x$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}(1 - 2\cos x) = \lim\limits_{y\to....} \mathrm{tg}\, y = ...$, $y = ...$;

c) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \mathrm{tg}\, x} = \lim\limits_{y\to....} \sqrt{y} = ...$, unde $y = ...$;

d) $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(\mathrm{tg}\, x) = \lim\limits_{y\to....} .... = ...$, unde $y = \mathrm{tg}\, x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right) = \lim\limits_{y\to...} ... = ...$, unde $y = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

26) Completează spațiile punctate astfel încât să obții propoziții adevărate:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{tg}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{y\to...} \mathrm{tg}\, y = 0$, cu $y = \dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \sin(3x - 3) = \lim\limits_{y\to...} \sin y = ...$, cu $y = ...$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} |\cos x| = \lim\limits_{y\to...} |y| = ...$, unde $y = ...$;

d) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) = \lim\limits_{y\searrow 0} ... = ...$, unde $y = ...$

PROBLEME PROPUSE

1. Calculează limitele laterale ale funcțiilor următoare, în punctele indicate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases},\ \alpha=0;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ \cos x, & x\leqslant 0\end{cases},\ \alpha=0;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2^x, & x\geqslant 1\\ x^2, & x<1\end{cases},\ \alpha=1.$

2. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to-1}(x^4+x)$; b) $\lim\limits_{x\to2}(-x^3+8x^2)$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+2}{2x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+x}{x^4-x}$;

e) $\lim\limits_{x\nearrow0}\dfrac{x^4+x^3}{x^4}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+1)$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-5x^2+2)$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\sqrt{2}x^2+x-1\right)$; j) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x^2+1)$.

3. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+4x-1}{2x^2-3x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2+4x-1}{2x^2-3x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{1+x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^3}{1+x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^5}{1+x^3}$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{2x^2+3x+4}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{3x+2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}$; j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{4-x^2}$;

k) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; l) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$;

m) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$; n) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$;

o) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; p) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+x^2-2}{x^2-1}$;

r) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^6+x^4+x^2-3}{x^2-1}$;

s) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2n}+x^{2n-2}+\ldots+x^2-n}{x^2-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

ș) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; t) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x+2}$.

4. Calculează limitele laterale în punctul $x=2$, pentru funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x^2+x+1},\ g(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x<2\\ x^2, & x\geqslant 2\end{cases}.$$

5. Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$;

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\sin x$;

g) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\cos x$; h) $\lim\limits_{x\to1}\sin x$;

i) $\lim\limits_{x\to-1}\cos x$; j) $\lim\limits_{x\to a+2k\pi}\sin x,\ a\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$; l) $\lim\limits_{x\to a+2k\pi}\cos x,\ a\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$;

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$; n) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x$.

6. Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x$;

c) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\searrow\pi}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\pi-x}\right)$.

7. Calculează limitele laterale ale funcțiilor în punctele indicate:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$, $a=3$ și $a=-3$;

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$, $a=1$;

c) $f:\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2\cos x-1}$, $a=\dfrac{\pi}{3}$;

d) $f:(1;2)\cup(2;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{-x}{\ln(x-1)}$, $a=2$.

8. Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to0}\arcsin x$; $\lim\limits_{x\to0}\arccos x$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}}\arcsin x$; $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}}\arccos x$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\arcsin x$; $\lim\limits_{x\to1}\arccos x$;

d) $\lim\limits_{x\searrow0}\dfrac{\arccos x}{x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin x}{(x-1)^2}$.

9. Folosește la calculul limitelor următoare calculul limitelor unor funcții polinomiale și completează spațiul punctat.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(4^x-2^x+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots;\ (y=2^x)$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln^2 x+\ln x+1)=\ldots\ldots\ldots;\ (y=\ln x)$;

c) $\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots;\ (y=\mathrm{tg}x)$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt[3]{x}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \left(y=\sqrt[3]{x}\right)$.

10. Arată că următoarele limite sunt egale cu 0:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x)\mathrm{tg}\dfrac{x+1}{x+\pi}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}\cos\dfrac{1}{x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{1-[x]}$.

11. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\pi-\arccos x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(\mathrm{arctg}x+\arcsin\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{\pi}{12}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos x}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\sin x}{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\mathrm{arctg}(3-2\cos x)$;

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\ln\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{arctg}x\right)\right]$;

h) $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin(2x-1)$; i) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(\arcsin x+\arccos x)$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)\left(-\sqrt{3}x^2-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^3-x^2+x-1)$;

l) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

12. Determină $a,\ b\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-2x}-ax\right)=b$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^n+a}{(x-1)^2}=b$.

13. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-q; & x<1\\ 2x+p; & x>1,\\ q; & x=1\end{cases}$

unde p și q sunt parametri reali.

Pentru ce valori ale lui p și q funcția f are limită în punctul $x=1$?

În ce caz această limită este egală cu $f(1)$?

14. Pentru ce valori ale lui a și b funcția

$$f:\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x<0\\ a\sin x+b\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

are limită în 0?

15. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|+a\sin x$ și $g(x)=x$. Pentru ce valori ale lui a există $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+g(x))$?

16. Determină $a\in\mathbb{R}$ dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in(-\infty,0)\\ 1-x, & x\in[0,1]\\ a, & x\in(1,\infty)\end{cases},\ a\in\mathbb{R}\text{ are limită în orice }\alpha\in\mathbb{R}.$$

17. a) Arată că nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{tg}\,x$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție periodică, neconstantă. Arată că nu există $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ și că nu există $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

18. Arată că următoarele funcții nu au limită în punctele indicate:

a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, în $x=0$;

b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$, în $x=0$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=[x]$, în $x=2$;

d) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}\cdot(2-\{x\})$, în $x=2$.

19. Folosește teorema de trecere la limită pentru funcții compuse, pentru calcularea limitelor următoare:

a) $\lim\limits_{x\searrow 0}\ln(\mathrm{arctg}x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}x\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(\mathrm{arctg}x)$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}x}$.

20. Cercetează existența limitelor funcțiilor în punctul $x=a$, $a\in\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}x^3-2x, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ x^3+2x+1, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}px^n, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ q, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases},\ p,q>0,\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$.

3. Criterii de existență a limitei unei funcții

În anumite cazuri este dificil sau imposibil să soluționăm problema limitei unei funcții într-un punct utilizând numai proprietățile precedente. Se impune să utilizăm pentru limite de funcții criterii de comparație întâlnite și la studiul limitelor de șiruri. Pentru limitele de șiruri am găsit deja condiții suficiente pentru ca, pornind de la un șir a cărui limită este cunoscută, să determinăm limita unui alt șir.

Teoremă. ***Criteriul majorări/minorării***

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$.

i) Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ și $\exists l \in \mathbb{R}, \exists\, V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

ii) Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ și $\exists\, V \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

iii) Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ și $\exists\, V \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Demonstrație.

i) Dacă $(x_n)_n$ este un șir oarecare din $D \setminus \{a\}$ convergent la a, atunci $\exists\, N_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > N_V$, $x_n \in V$. Din $|f(x_n) - l| \leqslant g(x_n)$, $\forall n > N_V$ și $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$, deci $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Demonstrația pentru ii) și iii) o propunem ca exercițiu.

Exerciții rezolvate. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos x - 2^x)$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x - \sin x - \cos x)$.

Soluție.

a) Din $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

b) $\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| = 2\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \cdot \left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \leqslant$

$\leqslant \left|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|$, $\forall x \in (0, \infty)$. Cum

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = 0$.

c) $\cos x - 2^x \leqslant 1 - 2^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(1 - 2^x) = -\infty$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos x - 2^x) = -\infty$.

d) Din $e^x - \sin x - \cos x \geqslant e^x - 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x - 2) = \infty$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x - \sin x - \cos x) = \infty$.

Cum utilizezi criteriul majorării?

1) Justifică:

a) $|\operatorname{arctg} x| < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\operatorname{arctg} x = 0$.

2) Justifică:

a) $5^x - 4^x = 4^x\left(\left(\dfrac{5}{4}\right)^x - 1\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\dfrac{5}{4}\right)^x - 1\right) = \infty$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5^x - 4^x\right) = \infty$.

3) Încercuiește propozițiile adevărate:

a) $x - 1 < [x] \leqslant x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ este descrescătoare;

c) $1 - 2^{[x]} < 1 - 2^{x-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(1 - 2^{x-1}) = \infty$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(1 - 2^{[x]}) = -\infty$.

Unde greșesc?

4) Fie funcțiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

Calculează (dacă există) $\lim\limits_{x\to 0}(g \circ f)(x)$.

Varianta 1. $|f(x)| = |x| \cdot \left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$

i) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (criteriul majorării)

ii) $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0} 1 = 1$

i) și ii) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(g \circ f)(x) = \lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$.

Varianta 2. Șirurile $\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)_n$

sunt convergente la 0

$(g \circ f)\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = g\left(f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right) = g(0) = 0$, deci

$\exists \lim\limits_{n\to 0}(g \circ f)\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = 0 \quad (1)$

Teoremă. ***Criteriul „cleștelui“***

Fie $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ și $V \in \mathcal{V}(a)$.

Dacă $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \forall x \in V \cap D \setminus \{a\} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Demonstrație.

Dacă $(x_n)_n$ este un șir oarecare de numere reale convergent la a, $x_n \in D \setminus \{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $\exists N_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n > N_V$, $x_n \in D \cap V \setminus \{a\}$. Din i) rezultă $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$, $\forall n > N_V$ și din ii) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = l$. Din criteriul „cleștelui“ pentru șiruri rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l$ deci $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Exercițiu rezolvat. Calculează: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]}{x}$; b) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} [\mathrm{tg}x]\cdot \mathrm{ctg}x$.

Soluție.

a) $[x] \leqslant x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ implică $\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1$, $\forall x > 0$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$, obținem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} = 1$.

b) $\mathrm{tg}x - 1 < [\mathrm{tg}x] \leqslant \mathrm{tg}x$, implică $1 - \mathrm{ctg}x < [\mathrm{tg}x]\cdot\mathrm{ctg}x \leqslant 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Cum $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} (1 - \mathrm{ctg}x) = \lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} 1 = 1$ obținem $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} [\mathrm{tg}\,x]\cdot\mathrm{ctg}\,x = 1$.

Teoremă. Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$. Dacă:

i) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ și

ii) $\exists M > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$ (f este mărginită pe o vecinătate a lui a),

atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$

Demonstrație.

Din $0 \leqslant |f(x)\cdot g(x)| \leqslant M|g(x)|$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$ și $\lim\limits_{x\to a} M|g(x)| = 0$ rezultă $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$ (criteriul „cleștelui“).

Exercițiu rezolvat.

Calculează: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sin x$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}$

Soluție. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sin x = 0$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$; punând $y = \frac{1}{x}$, obținem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$.

Cum $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x} = 0$.

$(g\circ f)\left(\frac{2}{4n\pi+\pi}\right) = g\left(\frac{2}{4n\pi+\pi}\right) = 1$,

deci $\exists \lim\limits_{n\to 0} (g\circ f)\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = 1$ (2).

Din (1) și (2), rezultă că $\nexists \lim\limits_{x\to 0} (g\circ f)(x)$.

Indicație. Recitește teorema referitoare la limitele funcțiilor compuse.

Cum utilizăm „criteriul cleștelui“?

5) Justifică:

a) $1 \leqslant \frac{x+\cos^2 x}{x} \leqslant \frac{x+1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\cos^2 x}{x} = 1$.

6) Justifică:

a) $|\cos x| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1}\cos x = 0$.

7) Calculează: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$.

Indicație. $\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right| =$

$= 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|$.

8) Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x^2+1]}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\cdot\left(\left[\frac{1}{x^3}\right] + \left[\frac{8}{x^3}\right]\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

9) Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\sin\frac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Exerciții rezolvate. **1)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, \text{ dacă } x\in(0,\infty) \\ \sin x - x, \text{ dacă } x\in(-\infty,0] \end{cases}$. Există $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$?

Soluție. $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ (criteriul „cleștelui") și $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=0$, deci $\exists f(0+0)=0$ și $\exists f(0-0)=0$. Rezultă că $\exists\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$. Să observăm că există și $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$.

2) Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$. Există $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$?

Soluție. Presupunem că există $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ .Notăm $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x\cos\frac{1}{x}$ și $\exists\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ (criteriul „cleștelui"). Atunci $\exists\lim\limits_{x\searrow 0}(f-g)(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\sin y$, contradicție, deci nu există $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Observație. În definirea unor funcții a căror limită a fost determinată în acest paragraf s-au utilizat, prin intermediul operațiilor cu funcții, și funcții care nu aveau limită în punctul în care aceasta a fost calculată. Se știe că nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$, dar am demonstrat că există $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$ sau $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$. Deci operații cu funcții care nu au limită într-un punct nu conduc, în general, la o funcție care nu are limită în acel punct.

1. Calculează: a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x-\ln x)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-1)^{[x]}}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\cos x)\cdot e^x$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\frac{1}{x}\right]$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[\operatorname{tg} x]}{\operatorname{tg} x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right]+\left[\frac{2}{x^2}\right]+\ \dots\ +\left[\frac{n}{x^2}\right]\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$ fixat;

j) $\lim\limits_{x\searrow 0}x^{\left[\frac{1}{x}\right]}$; k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\dots+[nx]}{x}$, $n\in\mathbb{N}$;

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a+bx)[x]}{x^2}$, $a, b\in\mathbb{R}$; m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{10}\left[\frac{9}{x}\right]$.

2. Cercetează dacă există $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin x)\ln x$.

3. Stabilește dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}[x], x\in\mathbb{Q}\\ x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ are limită în punctele 2 și $+\infty$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin x-x, \text{ dacă } x\in(-\infty,0]\\ 2x\cos\frac{1}{x}+a\sin\frac{1}{x}, \text{ dacă } x\in(0,\infty)\end{cases}$. Determină $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f are limită în punctul $x=0$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $\left|f(x)-x^2\right|\leqslant a|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde $a>0$. Atunci: i) $f(0)=0$; ii) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

6. Determină $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x+1}-ax-b\right)=2\sqrt{2}$.

7. Se consideră $f:(-\infty,0]\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln|x+1|+\frac{x}{x+1}$. Calculează limitele la capetele domeniului de definiție (se poate utiliza $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=0$).

8. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^{-2x}-2\cdot 3^{-x}$. Calculează limitele funcției la $+\infty$ și $-\infty$.

9. Se consideră $f:(-\infty,-1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+1)}$. Calculează:

i) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; ii) $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

10. Se consideră $f:D\to\mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x)=\frac{1+a^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2}-\frac{x}{a(x^2+1)}$. Determină a astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}(-ax\cdot f(x))^x=e^2$.

11. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$, $a, b\in\mathbb{R}_+$, $c\in\mathbb{R}$. Determină a, b, c astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-4x)=-2$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

4. Metode de eliminare a nedeterminărilor

I. Cazul exceptat $\infty - \infty$

Nedeterminările se înlătură, de regulă, folosind „factorul comun forțat” sau amplificarea cu „conjugata”. Amintim formulele:

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}^*$

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, n impar

EXEMPLE

Calculează: a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x)$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x-3^x-5^x)$.

Soluție.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\infty$ (principiul „dominării de grad”);

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2-(\sqrt{x^2-x+1})^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=1$ (amplificăm cu „conjugata”);

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+1\right)}=\frac{1}{3}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x-3^x-5^x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-\left(\frac{3}{5}\right)^x-1\right)\right]=-\infty$.

II. Cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$

Nedeterminările se înlătură, de regulă, utilizând „factorul comun forțat”, amplificările cu conjugata sau limitele remarcabile.

EXEMPLE

Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}+1}{2x^2+\sqrt{x+1}}$; b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$; c) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x-3}+1}$.

Soluție.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}+1}{2x^2+\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}{2+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}=\frac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{(x^2-9)(1+\sqrt{x-2})}=$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{3-x}{(x-3)(x+3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{-1}{(x+3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=-\frac{1}{12}$.

Cazul exceptat $\infty-\infty$

1) Calculează următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x-1}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+1}-x\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(10^x-4^x)$.

Cazul exceptat $\frac{0}{0}$

2) Calculează limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$;

c) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}}{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant2$.

3) Calculează limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x-3}+1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)-1}{\sqrt{x-1}+1}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x-3}+1}{\sqrt[3]{(x-3)^3}+1}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x-3}+1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{3}{2}$.

Teoremă. *(Limite remarcabile)*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*cazul exceptat* $\dfrac{0}{0}$).

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (*cazul exceptat* 1^{∞}).

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ (*cazul exceptat* $\dfrac{0}{0}$).

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$ (*cazul exceptat* $\dfrac{0}{0}$).

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ r\in\mathbb{R}$ (*cazul exceptat* $\dfrac{0}{0}$).

Demonstrație.

1) Dacă $x>0$, avem

$\sin x<x<\operatorname{tg} x,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; cu

$x\searrow 0$ și criteriul cleștelui se obține $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Analog se procedează în cazul $x<0$.

2) Se obține din $\lim\limits_{x_n\to 0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

4) Cu schimbarea de variabilă $a^x-1=y,\ x=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$,

avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(y+1)}\cdot\ln a=\ln a$.

5) Cu schimbarea $\ln(1+x)=y,\ x=e^y-1$ obținem:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{yr}-1}{e^y-1}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{yr}-1}{yr}\cdot\dfrac{y}{e^y-1}\cdot r\overset{yr=t}{=}$

$\overset{yr=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{e^y-1}\cdot r=r$.

Observație. Plecând de la $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ se obține și:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$

(se utilizează limita produsului și schimbarea de variabilă).

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}7x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg}4x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\operatorname{tg}2(x-1)}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}4x}{x}$;

l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{\operatorname{tg}(x^4-1)}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{x-1}$;

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)^{10}-1}{x}$;

p) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^{2007}-1}{x-2}$;

q) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$, $a\in\mathbb{R}$.

Cazul exceptat 1^{∞}

4) Calculează limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}$.

EXEMPLE

Calculează: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-1}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$.

Soluție.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2}\cdot\frac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}2x=0$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-1}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{x}=\infty$.

IV. Cazul exceptat 1^∞

Nedeterminarea se înlătură utilizând limita remarcabilă $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

EXEMPLU

Calculează: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x\nearrow 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

Soluție.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^x=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-1}}\right]^{-\frac{1}{x+2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+2}}=e^{-1}$.

b) $\lim\limits_{x\nearrow 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\nearrow 1}(1+2x-2)^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left[(1+2x-2)^{\frac{1}{2x-2}}\right]^{\frac{2x-2}{x-1}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}}=e^2$.

III. Cazul exceptat $0\cdot\infty$

Utilizând egalitatea $f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$, nedeterminarea se reduce la unul din cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

EXEMPLU

Calculează: a) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2^{\frac{1}{x^2}}-1\right)$.

Soluție. a) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2^{\frac{1}{x^2}}-1\right)\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y}=\ln 2$.

5) Calculează limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}(9-4x)^{\frac{1}{x-2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+n}{x-1}\right)^x$, $n\in\mathbb{N}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{1}{x-3}}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Cazul $0\cdot\infty$

6) Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\operatorname{tg}\frac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x^2+x}\operatorname{tg}x^2$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(2^x-3^x)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-3)\arcsin\frac{1}{x+1}\right]$;

f) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{x-2}\operatorname{arctg}(x-2)\right]$.

IV. Cazurile exceptate 0^0 și ∞^0

Utilizând egalitatea $f^g = e^{g\ln f}$, nedeterminarea se reduce la calculul limitei $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ (cazul exceptat $0\cdot\infty$).

Se utilizează, de regulă, și limitele remarcabile:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0,\ a>0}\ ;\quad \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0,\ a>0}$$

a căror demonstrație se va efectua cu ajutorul teoremei l'Hospital.

EXEMPLU

Calculează: a) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$.

Soluție.

a) $L=\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\frac{1}{x}} \overset{0^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x}\ln x}$; $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x}\ln x=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\searrow 0}\ln x=-\infty; L=e^{-\infty}=0$

b) $L=\lim\limits_{x\searrow 0} x^x \overset{0^0}{=} e^{\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x}$; $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\ln y}{y}=0;$

$L=e^0=1$.

Cazurile 0^0, ∞^0

7) Calculează:

a) $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\searrow 1}(\ln x)^{x-1}$.

Exerciții rezolvate.

Calculează limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos x}-\sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a, b>0$.

Soluție.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

b) **Metoda I.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos x}-\sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x}-\frac{1-\sqrt[m]{\cos x}}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\sqrt[n]{\cos x}+\ldots+\left(\sqrt[n]{\cos x}\right)^{n-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\sqrt[m]{\cos x}+\ldots+\left(\sqrt[m]{\cos x}\right)^{m-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{m}=\frac{m-n}{2mn}.$$

Metoda II. $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos x}-\sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{m}}}{\cos x-1}-\frac{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{n}}}{\cos x-1}\right\}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

Considerăm schimbarea de variabilă $y=\cos x-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+(\cos x-1)\right]^r-1}{\cos x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^r-1}{y}=r,\ \forall r\in\mathbb{R}$$

Rezultă $l=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1^2=\frac{m-n}{2mn}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}}=e^1=e$.

d) **Metoda I.**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right]^{\frac{a^x+b^x-2}{2x}}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=e^{\frac{1}{2}\ln(ab)}=\sqrt{ab}$$

Metoda II.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}};\ l_1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\ln\left[\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)+1\right]}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}\cdot\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)$$

Considerăm schimbarea de variabilă $y=\frac{a^x+b^x}{2}-1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)+1\right]}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1,\ \text{deci}$$

$l_1=\frac{1}{2}\ln ab$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{a\cdot b}$.

● Calculează:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10^{10}\cdot x}{x^2-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+x+x^3}{1-x-x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+7}{x^2+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2(x+2)}{x^5+5}$;

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^5+x-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-1}{2x+3}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+1}{2x^3-7x^2+8x-3}$;

9. $\lim\limits_{x\nearrow 2}\frac{x}{x-2}$;

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x-2}{|x-2|}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{3}{x^3-1}\right)$;

12. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}$, $a\in\mathbb{R}$;

13. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, $a>0$;

14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;

16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$;

18. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1\right)$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)$;

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-x\right)$;

21. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$, $x\in\mathbb{R}^*$;

22. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$; $m,n\in\mathbb{N}$; $m,n\geqslant 2$;

23. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x(x^2+x-6)}{\sqrt{x-2}}$;

24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$;

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$;

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x-2}{x}$, $a>0$, $b>0$;

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$;

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin ax)}{\ln(1+\sin bx)}$, $a,\ b\in\mathbb{R},\ b\neq 0$;

30. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+2)-\ln(x+1)]$;

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(x^4-1)}{\arcsin(x^2-1)}$;

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $a,\ b\in\mathbb{R},\ b\neq 0$;

33. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{|\sin x|}{x}$;

34. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

35. Fie $a,\ b\in(0,\infty)$ și funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x-1}$. Calculează:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$;

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$;

iii) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

36. Află $a,\ b\in\mathbb{R}$ dacă:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$;

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=2$;

iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{ax^3+bx^2}-2x\right)=\dfrac{-1}{3}$.

37. Calculează $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

38. a) Determină $A\subset\mathbb{R}$ astfel încât $ax^2+x+3\geqslant 0$, $\forall\, a\in A$ și $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

b) Pentru $a\in A$, calculează $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{ax^2+x+3}\right)$.

39. Determină $a\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3ax}{2x^2-1}\right)^x=e^2.$$

40. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{\frac{1}{x-1}}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$ și $a_1+a_2+\ldots+a_n>0$.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^{b_1x}+a_2^{b_2x}+\ldots+a_n^{b_nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N}^*$,

$a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots a_n>0;\ b_1,\ b_2,\ldots b_n\in\mathbb{R}$.

42. a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx)^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx)]^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Calculează:

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

45. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)(1-\sin^3 x)}{\cos^6 x}$;

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\ldots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

47. Calculează limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(x\sin x)]^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$.

5. Asimptotele unei funcții

Considerăm mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ și $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție. Spunem că reprezentarea grafică a funcției f are ramuri nemărginite dacă nu există un cerc în plan care să conțină în interiorul său graficul funcției f; acest lucru se întâmplă fie când D e mulțime nemărginită, fie când f e funcție nemărginită. Dacă o ramură nemărginită a graficului se apropie de o anumită dreaptă, spunem că această dreaptă este asimptotă la graficul funcției. Termenul de asimptotă provine din limba greacă: a = „fără“, simptotos = „a coincide“. Noțiunea de asimptotă se întâlnește inițial la Menechnurs (sec 4 î.Hr.), iar termenul a fost propus de Autolykos (sec 4 î.Hr.). Asimptotele unei funcții, fiind drepte în plan, pot fi: *asimptote verticale* (au direcția axei Oy), *asimptote orizontale* (au direcția axei Ox), *asimptote oblice* (nu au direcția axelor Ox și Oy).

În cele ce urmează, $D \subset \mathbb{R}, D \neq \varnothing$.

Asimptote verticale

Asimptotele verticale se definesc pentru funcții nemărginite, chiar dacă funcțiile respective sunt definite pe mulțimi mărginite.

Definiție.

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare al lui D (adică $x_0 \in \mathbb{R} \cap D'$); fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție.

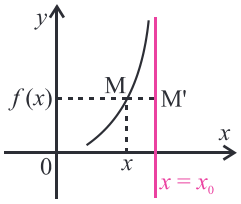
Dreapta de ecuație $x = x_0$ este *asimptota verticală la stânga* (respectiv *la dreapta*) la graficul funcției f, dacă: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ (respectiv $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$) există și este infinită.

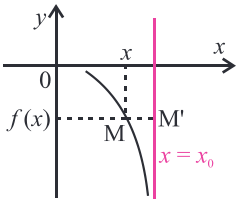
Dreapta de ecuație $x = x_0$ se numește asimptotă verticală la graficul funcției f dacă ea este *asimptotă verticală* și la stânga și la dreapta la graficul funcției f.

Observație.

În reperul cartezian xOy, dreapta $x = x_0$ este o dreaptă verticală.

Interpretare geometrică





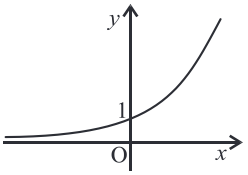
$\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \nearrow x_0} d(M, M') = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \nearrow x_0} d(M, M') = 0$

deci dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la stânga.

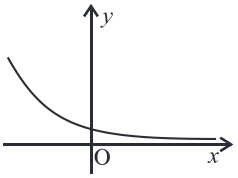
Să recunoaștem asimptotele unor grafice de funcții cunoscute.

1) Care dintre următoarele funcții admit asimptote verticale?

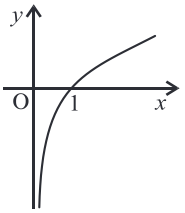
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x, a > 1$



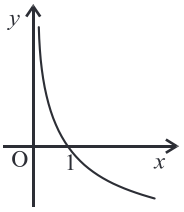
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x, 0 < a < 1$



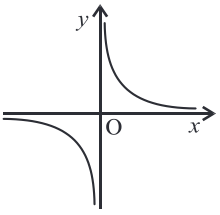
c) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, \ a > 1$



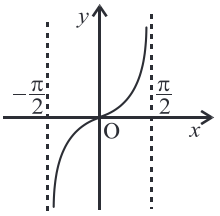
d) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, \ 0 < a < 1$

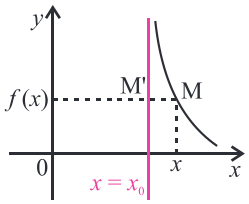


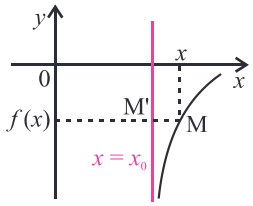
e) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{1}{x}$



f) $f: \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \text{tg}x$







$\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \searrow x_0} d(M, M') = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \searrow x_0} d(M, M') = 0$

deci dreapta de ecuație $x = x_0$ este asimptotă verticală la dreapta.

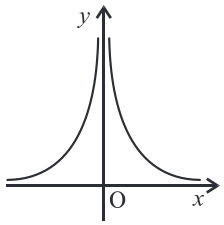
(Am notat cu $d(M, M')$ distanța dintre punctele M și M').

EXEMPLE

1) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty$,

deci dreapta de ecuație $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală la graficul lui f.



2) $f : \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ctg}x$; $\lim\limits_{x \nearrow \pi} f(x) = -\infty$, deci dreapta de ecuație $x = \pi$ este asimptotă verticală la stânga la graficul lui f.

3) $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = +\infty$, deci dreapta de ecuație $x = 1$ (paralelă cu Oy) este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul lui f.

4) $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}x$, $\lim\limits_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$, deci dreapta de ecuație $x = -\dfrac{\pi}{2}$ (paralelă cu Oy) este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul lui f.

Asimptote oblice. Asimptote orizontale

Asimptotele oblice se definesc pentru funcții definite pe *mulțimi nemărginite*.

Definiție.

Fie o funcție $f : D \to \mathbb{R}$.

Dacă D este o mulțime nemărginită la dreapta (∞ este punct de acumulare al mulțimii D), atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este *asimptotă oblică* la $+\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0$.

Dacă D este o mulțime nemărginită la stânga ($-\infty$ este punct de acumulare al mulțimii D), atunci dreapta de ecuație $y = m'x + n'$, $m', n' \in \mathbb{R}$, $m' \neq 0$ este *asimptotă oblică* la $-\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0$.

Să studiem existența asimptotelor verticale.

2) Determină punctele de acumulare finite ale mulțimilor: $A = (0, 1)$; $B = (0, +\infty)$; $C = (0, 1) \cup \{2\}$; $D = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

3) Fie $x_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Calculează $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \text{tg}x$.

Este dreapta de ecuație $x = x_0$ asimptotă verticală la stânga pentru graficul lui f?

4) Fie $x_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, $f(x) = \text{tg}x$.

Calculează $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$. Este dreapta verticală de ecuație $x = x_0$ asimptotă verticală la dreapta pentru graficul lui f?

5) Fie $x_0 \in [-1, 0]$. Calculează $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{1}{x^2}$.

Este dreapta de ecuație $x = x_0$ asimptotă verticală la stânga pentru graficul lui f?

6) Fie $x_0 \in (0, 2)$. Calculează $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Este dreapta de ecuație $x = x_0$ asimptotă verticală pentru graficul lui f?

7) Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Calculează $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$ și $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$. Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală a funcției f?

8) Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$.

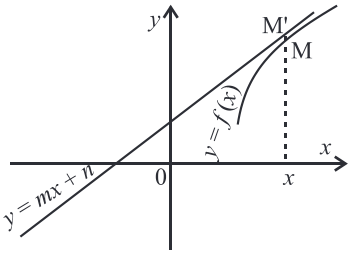
Calculează $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x)$ și $\lim\limits_{x \searrow 2} f(x)$. Dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală a funcției f?

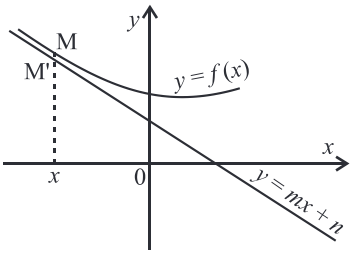
Să studiem existența asimptotelor oblice.

9) Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Calculează $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Dacă m este finit, atunci calculează $n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$. Este dreapta $y = x + 1$ asimptotă oblică a funcției la ∞ sau la $-\infty$?

Interpretare geometrică.





$\lim\limits_{x\to\infty} d(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - n) = 0$

$y = mx + n$ asimptotă oblică la $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} d(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx - n) = 0$

$y = mx + n$ asimptotă oblică la $-\infty$.

Teoremă.

Fie o funcție $f : D \to \mathbb{R}$.

1) Dacă ∞ este punct de acumulare pentru D, atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$ este *asimptotă oblică la* $+\infty$ a lui f dacă și numai dacă există $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$, $n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$.

2) Dacă $-\infty$ este punct de acumulare pentru D, atunci dreapta de ecuație $y = m'x + n'$ *este asimptotă oblică la* $-\infty$ a lui f dacă și numai dacă există $m' = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$, $n' = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - m'x) \in \mathbb{R}$.

Demonstrație.

1) Dacă $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$, atunci

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx - n] = 0$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = n$.

Avem $\frac{f(x)}{x} - m = \frac{f(x) - mx}{x}$, deci

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = 0$, de unde $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Reciproc, dacă $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ și $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}$,

atunci $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx \right) - n = 0$, deci $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$.

Analog se demonstrează afirmația 2).

10) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$.

Calculează $m' = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n' = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - m'x]$. Calculează $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$.

Este dreapta $y = 2x$ asimptotă oblică la $\pm\infty$?

11) Verifică dacă funcțiile următoare admit asimptote oblice:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$;

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x + 1}$;

c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.

Să studiem existența asimptotelor orizontale.

12) Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - 1}{x}$.

Calculează $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Este dreapta $y = 1$ asimptotă orizontală a funcției f ?

13) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$.

Calculează $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Este dreapta $y = 2$ asimptotă orizontală a funcției f ?

14) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

a) Calculează $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Arată că dreapta $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Rezolvă ecuația $f(x) = 0$ și decide dacă asimptota orizontală poate intersecta graficul funcției f.

15) Verifică dacă funcțiile următoare admit asimptote la $\pm\infty$ și completează spațiile punctate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Deoarece $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ și $\nexists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, f.....

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Avem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, deci funcția ....., dar este

Definiție.

Fie o funcție $f: D \to \mathbb{R}$.

Dacă ∞ este punct de acumulare pentru D, atunci dreapta de ecuație $y = a$ este *asimptotă orizontală la* ∞ a graficului lui f dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Dacă $-\infty$ este punct de acumulare pentru D, atunci dreapta de ecuație $y = a$ este *asimptotă orizontală la* $-\infty$ a graficului lui f dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Presupunem că mulțimea D este nemărginită la dreapta. Pentru a vedea dacă există asimptotă la ∞ (orizontală sau oblică) și în cazul în care există, pentru a o determina, procedăm astfel:

a) calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

• dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ și este finită, atunci dreapta $y = a$ este *asimptotă orizontală* la ∞;

• dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ și este infinită, atunci:

b) calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;

• dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ și este finită nenulă, atunci:

c) calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$;

• dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = n$ și este finită, atunci dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică* la ∞.

Presupunând că mulțimea D este nemărginită la stânga, în mod similar se studiază existența asimptotei la $-\infty$ și, în cazul în care există, se trece la determinarea ei.

Observații.

♦ O funcție f, definită pe o mulțime nemărginită, nu admite și asimptotă orizontală și asimptotă oblică la ∞ (sau $-\infty$).

♦ Există funcții definite pe mulțimi nemărginite care nu au nici asimptote orizontale și nici oblice la $+\infty$ ($-\infty$).

posibil să aibă asimptotă oblică. Calculăm $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = \infty$; deoarece limita este infinită, funcția .....

c) $f: (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, dreapta $y = 2$ este .....

d) $f: [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funcția .....

Calculăm:

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - x} = 1$ (m este finit);

$n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x-1} = 3$.

Deci dreapta de ecuație $y = x + 3$ este .....

16) Verifică dacă funcțiile următoare admit asimptote la $\pm\infty$:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$;

e) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$;

f) $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

g) $f: (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;

h) $f: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determină asimptotele verticale (dacă există) ale următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg}x$;

d) $f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ctg}x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;

f) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}$;

g) $f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{-\ln|\sin x|}$;

h) $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$.

2. Determină valoarea parametrului real $a>0$ pentru care funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+ax+a}$ să aibă o singură asimptotă verticală ($D\subset\mathbb{R}$ fiind domeniul maxim de definiție).

3. Determină asimptotele funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție:

a) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$;

b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$;

d) $f(x)=x-2\operatorname{arctg}x$;

e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$;

f) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$;

g) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$;

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$;

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$;

j) $f(x)=\ln(4-x^2)$;

k) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$;

l) $f(x)=\dfrac{x^2-9x+8}{x-2}$;

m) $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$;

n) $f(x)=(x^2-x)e^x$.

4. Determină numerele reale a și b astfel încât dreapta de ecuație $y=2x-1$ să fie asimptotă oblică a funcției $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$, $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+px-1}{x+1}$, $p\in\mathbb{R}$. Determină p astfel încât graficul funcției f să admită asimptota oblică $y=x+1$.

(Bacalaureat - 1996, enunț parțial)

6. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{2\ln x-1}{x}$.

Determină asimptota oblică la ramura graficului funcției f spre ∞; cercetează dacă această asimptotă intersectează graficul funcției și, în caz afirmativ, determină coordonatele punctului de intersecție.

(Bacalaureat - 1995, enunț parțial)

7. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+2-4\dfrac{\ln x}{x}$.

Determină asimptota oblică la ramura graficului funcției f spre ∞. Această asimptotă intersectează graficul funcției într-un punct A. Află coordonatele punctului A.

(Bacalaureat - 1994, enunț parțial)

8. Fie funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{(x+a)^2}{bx-1}$, $a,b\in\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție.
Determină a și b astfel încât graficul funcției f să admită dreapta de ecuație $y=x+3$ ca asimptotă oblică.

(Bacalaureat - 1993, enunț parțial)

9. Determină valorile parametrilor reali p și q astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=px-q\sqrt{|x^2-1|}$ să admită ca asimptote dreptele $y=2x$ și $y=0$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Dă câte un exemplu de:

a) funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care în punctul 2 are o limită laterală finită și cealaltă limită laterală infinită;

b) funcție care nu are limită în $-\infty$;

c) funcții f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - g(x)] = 5$;

d) funcții f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

2. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

p1) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $f(3 - 0) \neq f(3)$, atunci f nu are limită în punctul 3.

p2) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și există $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{7\}$, $x_n \to 7$ astfel încât $f(x_n) \to \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to 7} f(x) = \infty$.

p3) Dacă f este o funcție polinomială, atunci $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \in \mathbb{R}$.

(p4) Dacă f și g sunt funcții polinomiale, atunci $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$

3. Calculează limitele laterale ale următoarelor funcții în punctele indicate.

a) $f : \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\cos x - 1}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

b) $f : (0; 2) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \\ \frac{1}{e - e^x}, & x > 1 \end{cases}$; $\alpha = 1$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Stabilește dacă f are limită în punctele 1, 0 și $-\infty$.

Testul 2

1. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 1)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 + x - 6}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3^x + 4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(a-1)^2 x^2 + 2x}}{3x + 1} = -2$;

b) funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a, & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{2} \cdot \left[\frac{5}{x}\right], & x > 0 \end{cases}$ să aibă limită în 0.

3. Calculează: a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{1 - \operatorname{ctg} x}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2 - \frac{x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

Testul 3

1. Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1 - x)e^x$.

a) Determină $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

b) Determină $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Ce asimptotă admite funcția g?

2. Considerăm funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = e^x - x$.

a) Determină $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

b) Arată că $h(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$, pentru $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Dedu de aici că $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - 2}.$$

a) Determină a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuație $y = 2x - 3$ să fie asimptotă pentru graficul funcției f.

b) Graficul funcției f mai are și alte asimptote? Justifică răspunsul.

Continuitatea funcțiilor

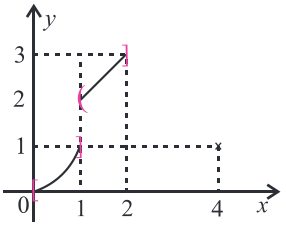
1. Continuitate punctuală; puncte de discontinuitate; continuitate pe un interval. Operații cu funcții continue

În mod obișnuit, a afirma că o curbă este *continuă* este echivalent cu a spune că aceasta *nu are întreruperi*, că o putem trasa fără să ridicăm creionul de pe hârtie etc.

Graficele funcțiilor reale de o variabilă reală pot fi reprezentate printr-o curbă într-un plan raportat la un sistem de coordonate.

EXEMPLU

Fie funcția $f:[0,2]\cup\{4\}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & \text{dacă } 1<x\leqslant 2.\\ 1, & \text{dacă } x=4\end{cases}$



Observăm că reprezentarea grafică se întrerupe în punctele de abscise 1, 2 și 4. Ce se întâmplă cu valorile funcției în jurul acestor puncte?

Soluție.

Să analizăm comportarea valorilor lui f în jurul punctului de abscisă 1. Observăm că, atunci când x tinde spre 1 și $x<1$, valorile $f(x)$ tind către valoarea lui f în 1, adică $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=1=f(1)$. Dacă x tinde spre 1 și $x>1$, valorile $f(x)$ tind spre 2, deci $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=2$; „saltul“ din jurul punctului de abscisă 1 se datorează faptului că limitele laterale în 1 sunt diferite.

Să studiem comportarea lui f în jurul punctului de abscisă 2: $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=3=f(2)$, deci nu avem „salt“ în 2.

Dacă alegem un punct de abscisă x_0 diferit de 1, 2 sau 4, adică $x_0\in(0,1)\cup(1,2)$, constatăm că $f(x)$ tinde la $f(x_0)$ când x tinde la x_0.

Punctul de abscisă 4 este punct izolat în domeniul de definiție al funcției f, deoarece funcția f nu este definită în alte puncte dintr-o vecinătate a lui 4. Graficul „nu se întrerupe“ în $x=4$.

Ce înțelegem prin continuitate?

1) În imaginea de mai sus apar reprezentate obiecte sau fenomene care au caracteristici continue. De exemplu: trenul este un obiect unitar (continuu), locomotiva și vagoanele sunt „legate“ între ele; calea ferată este continuă.

Dă cel puțin trei exemple de obiecte sau fenomene sugerate de imagine, care au aspecte continue.

2) Dă exemple de discontinuități prezente în imaginea de mai sus. Ce discontinuități poți remarca la obiecte sau fenomene din clasa voastră?

Să interpretăm grafic...

3) Trasează graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} a, \text{ dacă } x\leqslant 0\\ b, \text{ dacă } x>0\end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$. În ce condiții funcția f este continuă în $x_0=0$?

4) Trasează graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-1|$. Este funcția continuă în punctele -1 și 1?

5) Trasează graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{dacă } x\leqslant -1\\ \ln(-x), & \text{dacă } x\in(-1,0) \text{ și}\\ x-1, & \text{dacă } x\in[0,\infty)\end{cases}$ studiază apoi continuitatea ei.

Vom defini continuitatea funcției într-un punct:

Definiție. Fie $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$.

Funcția f se numește *continuă în* x_0 dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $\exists\, U_V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $\forall\, x \in E$, $x \in U_V$ rezultă $f(x) \in V$.

Dacă f nu este continuă în x_0, atunci x_0 se numește *punct de discontinuitate*.

Observații.

♦ Problema continuității se pune doar în punctele domeniului de definiție al funcției.

♦ Dacă $x_0 \in E$ este punct izolat al lui E, adică $x_0 \in E - E'$, atunci f este continuă în x_0.

♦ Dacă $x_0 \in E \cap E'$ (x_0 este punct de acumulare din domeniul de definiție al funcției), studiul continuității funcției în x_0 revine la cercetarea existenței limitei în x_0 și compararea ei cu valoarea funcției în x_0.

♦ Dacă x_0 este punct de acumulare al lui E doar la dreapta (respectiv stânga), atunci:

f continuă în $x_0 \Leftrightarrow f$ continuă la dreapta (respectiv stânga) în x_0.

Teoremă *de caracterizare a continuității*

Fie $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Sunt echivalente afirmațiile:

1) f este continuă în x_0;

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

3) $\forall$ șirul $(x_n)_{\mathbb{N}}$ din E, $x_n \xrightarrow{n} x_0$ rezultă $f(x_n) \xrightarrow{n} f(x_0)$.

Observații.

♦ Dacă, în plus, $x_0 \in E \cap E'$, atunci:

f continuă în $x_0 \Leftrightarrow \exists f(x_0 - 0),\ \exists f(x_0 + 0),\ f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

♦ Funcția f nu este continuă în $a \in E \cap E'$ dacă și numai dacă nu există $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, sau $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ există și este diferită de $f(a)$.

Noțiunea de continuitate a avut ca suport intuitiv noțiunea de neîntrerupere a curbelor. Există însă funcții cărora le putem studia continuitatea fără a le trasa graficul.

EXEMPLE

1) Să considerăm următoarea funcție de tip Dirichlet:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859, matematician german) s-a ocupat de studiul seriilor trigonometrice și de teoria numerelor; a definit conceptul de funcție în sensul modern de corespondență.

6) Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcții să fie continue în punctul x_0 specificat

a) $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leqslant 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leqslant a \\ x, & x > a \end{cases}$; $x_0 = a$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$;

e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leqslant a \\ x - 1, & x > a \end{cases}$; $x_0 = a$;

f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant a \\ 4, & x > a \end{cases}$; $x_0 = a$.

7) Considerăm funcția $f: \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ a, & x = 0 \end{cases},\ a \in \mathbb{R}.$$

a) Determină parametrul a știind că f este continuă.

b) Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x_0 = 0$ este punct de discontinuitate? De ce speță?

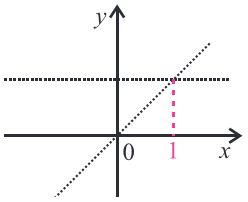
8) Studiază punctele de discontinuitate și completează spațiile punctate ale funcției

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ x + 1, & \text{dacă } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Indicație.

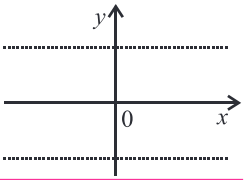
Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$, punctul x = ... este punct de discontinuitate de speța ..... . Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 1$

Această funcție este continuă în 1, deoarece $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$. Graficul acestei funcții ar putea fi trasat (sugerat, mai bine zis) după modelul alăturat:



2) De precizat că există funcții care nu sunt continue în nici un punct, așa cum este, de exemplu, funcția lui Dirichelet

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}.$$



Definiție.

Fie $f: E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in E$ un punct în care f este discontinuă.

♦ x_0 se numește *punct de discontinuitate de prima speță* al funcției f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite.

♦ x_0 se numește *punct de discontinuitate de speța a doua* dacă nu este punct de discontinuitate de prima speță.

Observație. Dacă x_0 este punct de acumulare doar la stânga (respectiv la dreapta), atunci x_0 este punct de discontinuitate de primă speță dacă există $f(x_0-0)\in\mathbb{R}$ și $f(x_0-0)\neq f(x_0)$ (respectiv dacă există $f(x_0+0)\in\mathbb{R}$ și $f(x_0+0)\neq f(x_0)$).

De remarcat următorul rezultat...

Teoremă. Orice punct de discontinuitate al unei funcții monotone este de prima speță.

Observație. În plus, dacă $f: E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este strict crescătoare și $x_0\in E\cap E'$, atunci $f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$ și, mai mult, dacă $x_1<x_2$, $x_1, x_2\in E\cap E'$, atunci $f(x_1-0)\leqslant f(x_1)\leqslant$ $\leqslant f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)\leqslant f(x_2)\leqslant f(x_2+0)$.

Continuitate pe un interval

Definiție.

Spunem că *o funcție f este continuă pe o submulțime a domeniului de definiție* dacă este continuă în fiecare punct al acesteia. Mulțimea punctelor din domeniul de definiție pe care o funcție este continuă se numește *domeniul de continuitate al funcției*.

Dacă f este continuă pe întreg domeniul său de definiție, spunem simplu că f este continuă.

Teoremă. Funcțiile elementare (polinomiale, putere, exponențiale, logaritmice și trigonometrice) sunt funcții continue pe întreg domeniul lor de definiție.

Demonstrație. Dacă f este funcție elementară, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ pentru orice punct x_0 din domeniul maxim de definiție al funcției f și x_0 punct de acumulare. Dacă x_0 este punct izolat, atunci f este continuă.

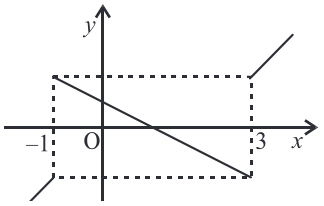
și $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=2$, punctul $x=$ ..... este punct de discontinuitate de speța ..... .

9) Fie $f, g, h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Demonstrează că, pentru fiecare funcție, punctul 0 este punct de discontinuitate și precizează de ce speță este acesta, pentru fiecare caz în parte.

10) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are următoarea reprezentare grafică:



a) Este funcția continuă pe $\mathbb{R}$?

b) Dar pe intervalul $\left(-\frac{1}{2},1\right)$?

c) Precizează natura punctelor de discontinuitate ale funcției f.

11) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $k>0$ astfel încât $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

Arată că f este continuă (funcțiile care verifică proprietatea din enunț se numesc funcții Lipschitz).

Indicație.

Fie $y=x_0$ în relația dată. Cu $x\to x_0$ și criteriul cleștelui se obține $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

12) Prelungește prin continuitate în origine funcțiile $f, g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}},\ g(x)=x\ln|x|.$$

13) Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$ funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^a\cdot\sin\frac{1}{x}$ poate fi prelungită prin continuitate în origine?

Prelungirea prin continuitate

Fie $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in (\mathbb{R} - E) \cap E'$.

Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\tilde{f}: E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \in E \\ l \quad , \text{ dacă } x = x_0 \end{cases}$ este continuă în x_0. Din acest motiv, $\tilde{f}$ se numește *prelungirea prin continuitate a lui f în punctul* x_0.

EXEMPLU

Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, funcția f poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 0$ la funcția $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0 \quad , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$.

Probleme rezolvate.

1) Cercetează continuitatea în punctul $x_0 = 0$ pentru funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax^2} - \cos bx}{x^2}, x < 0 \\ e^2 \quad , x = 0 \\ (bx + e^x)^{\frac{1}{x}} \quad , x > 0 \end{cases}, \text{ unde } a \in \mathbb{R} \text{ și } b \geqslant 0.$$

Soluție.

Calculăm limitele laterale în punctul $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} a \cdot \frac{e^{ax^2} - 1}{ax^2} + \lim_{x \nearrow 0} \frac{b^2}{2} \frac{\sin^2 \frac{bx}{2}}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2} = a + \frac{b^2}{2};$$

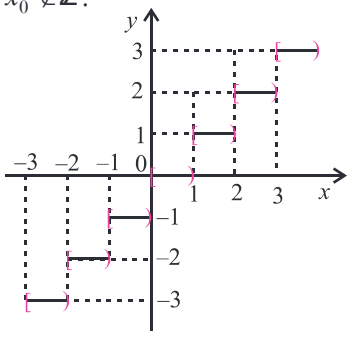
$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (1 + bx + e^x - 1)^{\frac{1}{bx + e^x - 1} \cdot \frac{bx + e^x - 1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{bx + e^x - 1}{x}} = e^{b+1}.$$

Cum $f(0) = e$ și f continuă în $x_0 = 0$, avem $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = f(0)$, deci $b + 1 = 2$, $a + \frac{b^2}{2} = e^2$, de unde $b = 1$, $a = e^2 - \frac{1}{2}$.

2) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrează că f este continuă în x_0 dacă și numai dacă $x_0 \notin \mathbb{Z}$.

Soluție.

Dacă $x_0 \in \mathbb{Z}$, atunci $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = x_0 - 1$ și $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = x_0$, deci x_0 este punct de discontinuitate de prima speță.



Dacă $x_0 \notin \mathbb{Z}$, atunci $[x] = [x_0]$ pentru x dintr-o vecinătate suficient de mică a lui x_0, deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [x] = [x_0] = f(x_0)$, deci f este continuă în x_0.

14) Studiază continuitatea în punctele indicate pentru următoarele funcții, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$; în $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$; în $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}, x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1, \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$; în $x_0 = \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - 2ax + x^2}, 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ ax + 3, x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \end{cases}$;

în $x_0 = 1$ și $x_0 = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, x \neq 0 \\ a \quad , x = 0 \end{cases}$; în $x_0 = 0$

f) $f(x) = [x^2]$; în $x_0 = 2$ și $x_0 = 9$.

15) Studiază continuitatea următoarelor funcții pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, unde

$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -1, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

(citim „funcția signum”);

d) $f(x) = \begin{cases} 2x, \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Operații cu funcții continue

Având în vedere faptul că definiția continuității este bazată pe limite de funcții, multe din proprietățile limitelor de funcții se regăsesc și în cazul funcțiilor continue.

Teoremă.

Dacă funcțiile $f, g : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) sunt continue în punctul $x_0 \in E$, atunci funcțiile $f+g$, $a \cdot f$ ($a \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (dacă $g(x_0) \neq 0$), f^g (dacă $f(x_0) > 0$), $\log_f g$ (dacă $f(x_0) > 0$, $f(x_0) \neq 1$, $g(x_0) > 0$) sunt continue în x_0.

EXEMPLU

1) $f(x) = 3\sin x + \sqrt[3]{x} - 2e^x$ este continuă pe $\mathbb{R}$;

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ este continuă pe $(0, \infty)$.

Teoremă.

Dacă funcția $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci funcția $|f|$ este continuă în x_0.

Demonstrație. Fie $(x_n)_n \subset E$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\big||f(x_n)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x_n) - f(x_0)| \to 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x_0)|$.

Teoremă.

Fie $f : E_1 \to E_2$ și $g : E_2 \to \mathbb{R}$ ($E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$) și $h = g \circ f : E_1 \to \mathbb{R}$ funcția compusă. Dacă f este continuă în punctul $x_0 \in E_1$ și g este continuă în punctul $f(x_0) \in E_2$, atunci h este continuă în x_0.

$$E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x_0 \mapsto f(x_0) \mapsto g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$$

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir oarecare din E_1 convergent la x_0 și $y_n = f(x_n)$. Deoarece f este continuă în x_0, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ și, din g continuă în $f(x_0)$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(x_0))$. Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = g(f(x_0)) = h(x_0)$ și cum șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$, convergent la x_0, a fost ales arbitrar, rezultă că funcția h este continuă în x_0.

Consecință.

Dacă $f, g : E \to \mathbb{R}$ sunt continue în $x_0 \in E$, atunci funcțiile $\max\{f, g\}$ și $\min\{f, g\}$ sunt continue în x_0.

Demonstrație. $\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}$. Cum f, g sunt continue în x_0, atunci $f + g$ și $f - g$ sunt continue în x_0. Deoarece

16) Fie $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă în punctul 0 ce îndeplinește condiția $f(x) = f(x^2)$, $\forall x \in [0, 1)$. Arată că f este funcție constantă.

Indicație.

Prin inducție matematică se arată că $f(x) = f(x^{2^n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; cum $x^{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, rezultă $f(x^{2^n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$, de unde $f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$; obținem $f(x) = f(0)$, $\forall x \in [0, 1)$

17) Fie funcțiile $f, g : (0, 1) \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = x^2$, $g(x) = x\sin x$.

a) Studiază continuitatea următoarelor funcții: $f + g$, $f \cdot g$, $2f - 3g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$.

b) Calculează limitele funcțiilor de mai sus la capetele intervalului de definiție.

18) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 1] \\ x^2 + x, & x \in (1, +\infty) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1] \\ -2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

Studiază continuitatea funcțiilor $f + g$, $f \cdot g$. Ce observi ?

19) Dă exemplu de două funcții $f, g : I \to \mathbb{R}$ (I interval de numere reale) discontinue în $x_0 \in I$, astfel încât $f + g$ și $f \cdot g$ să fie continue în x_0.

20) Determină două funcții $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0, dar f și g nu sunt continue în x_0.

21) Trasează graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{x^2, 3x - 2\}$ și verifică dacă funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

22) Trasează graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x^2, -2x^2 + 3, |x|\}$, utilizând graficele funcțiilor $x \to x^2$, $x \to -2x^2 + 3$, $x \to |x|$ și verifică dacă funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

funcția $f-g$ este continuă în x_0, rezultă că și $|f-g|$ este continuă în punctul x_0, deci $\max\{f, g\}$ este continuă în x_0.

Analog, se arată că $\min\{f, g\}=\dfrac{f+g-|f-g|}{2}$ este continuă în x_0.

EXEMPLE

1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, fiind compunere de funcții continue.

2) $f(x)=e^{2x}+\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+1}{x-2}$ este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

3) $f(x)=\sqrt{|x^2-3x+2|}+\max\{x-1, 2x+1\}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

Probleme rezolvate.

1) Studiază continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2x^2+1}, & \text{dacă } x\leqslant 1\\ 2ax+1, & \text{dacă } x>1\end{cases}, \text{ unde } a\in\mathbb{R}.$$

$f_1(x)=\sqrt{a^2x^2+1}$ și $f_2(x)=2ax+1$ sunt continue pe $\mathbb{R}$, deci f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, \infty)$.

Studiem continuitatea în punctul $x_0=1$.

Avem: $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\sqrt{a^2+1}$, $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=2a+1$ și $f(1)=\sqrt{a^2+1}$, deci f este continuă în $x_0=1$ dacă și numai dacă

$$\sqrt{a^2+1}=2a+1\Leftrightarrow\begin{cases}2a+1\geqslant 0\\ a^2+1=(2a+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow a=0.$$

În concluzie, pentru $a=0$ funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar pentru $a\neq 0$ domeniul de continuitate al funcției f este $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2) Studiază continuitatea funcției

$$f(x)=\begin{cases}a(x^3+1)^2, & \text{dacă } x<0\\ 2a-1, & \text{dacă } x=0\\ |2x-1|, & \text{dacă } x>0\end{cases}, a\in\mathbb{R}.$$

Funcțiile $f_1(x)=a(x^3+1)^2$ și $f_2(x)=|2x-1|$ sunt continue, deci f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$. Cum $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=1$ și $f(0)=2a-1$, rezultă că f este continuă în $x_0=0$ dacă și numai dacă $a=1=2a-1$. Deducem că pentru $a=1$ funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar pentru $a\neq 1$, f este continuă pe $\mathbb{R}^*$.

Teorema lui Weierstrass de mărginire.

Dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

1) f este mărginită;

2) f își atinge marginile, adică există $\alpha, \beta\in[a, b]$ astfel încât $f(\alpha)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ și $f(\beta)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

23) Studiază continuitatea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x+x-1, & x\leqslant 1\\ x^{\frac{1}{x-1}}, & x>1\end{cases}$;

c) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ a, & x=1\\ 2-x, & x\geqslant 1\end{cases}$; $a\in\mathbb{R}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases},$$

$a, b, c\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^3+xe^{nx}}{1+2e^{nx}}$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+x^2}{x^{4n}+1}$;

h) $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

i) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x^2+1}, & \text{dacă } x\leqslant 1\\ 4x+1, & \text{dacă } x>1\end{cases}$;

j) $f(x)=\begin{cases}(x^3+1)^2, & \text{dacă } x\leqslant 0\\ |2x-1|, & \text{dacă } x>0\end{cases}$;

k) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[\sin x]$, unde $[\cdot]$ este funcția parte întreagă;

l) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{\sin x\}$, unde $\{\cdot\}$ este funcția parte fracționară.

Demonstrație.

1) Presupunem prin reducere la absurd că f nu este mărginită și, pentru a fixa ideile, să presupunem că f nu este mărginită superior. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci există $x_n \in [a,b]$ astfel încât $f(x_n) > n$. Deci există un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n \in [a, b]$, $\forall\, n \geq 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ fiind mărginit, conform lemei lui Césaro va conține un subșir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent la un punct $x_0 \in [a, b]$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. Pe de altă parte, f fiind continuă în x_0 și $x_{n_k} \to x_0$ deducem că $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, contradicție!

Asemănător se tratează cazul în care f ar fi nemărginită inferior.

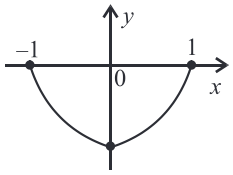
2) Fie $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Vom arăta că există $\alpha \in [a, b]$ cu $f(\alpha) = M$.

Considerăm mulțimea $A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Deoarece $M = \sup A$, rezultă că există un șir $(f(y_n))_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = M$. Șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ fiind mărginit, conform lemei lui Cesaro va conține un subșir $(y_{n_p})_{p\geq 1}$ convergent la $\alpha \in [a, b]$. Atunci $\lim\limits_{p\to\infty} f(y_{n_p}) = M$ și, cum f este continuă în α iar $y_{n_p} \to \alpha$, deducem că $f(\alpha) = M$.

La fel se demonstrează că, dacă $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci există $\beta \in [a, b]$ astfel încât $f(\beta) = m$.

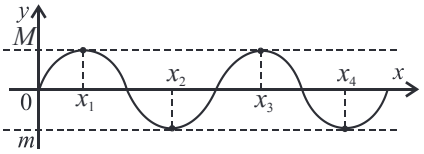
EXEMPLU

1) Funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ este continuă și $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$, iar $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(0) = -1$



2) Funcția $f : (-1; 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ este continuă, este mărginită, dar nu își atinge marginile. Prin urmare, în teorema de mărginire a lui Weierstrass este esențial ca intervalul de definiție al funcției f să fie închis și mărginit.

3) O funcție continuă pe un interval închis din $\mathbb{R}$ își poate atinge fiecare margine în mai multe puncte.



24) Fie $A \subset \mathbb{R}$, A mărginită, $m = \inf A$, $M = \sup A$. Arată că:

a) $V \cap A \neq \varnothing$, $\forall V \in \mathcal{V}(m)$

b) există șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ din A astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m$.

Enunță și demonstrează proprietățile analoage pentru M. Se utilizează aceste rezultate în demonstrația teoremei lui Weierstrass de mărginire?

25) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ își atinge marginile de o infinitate de ori.

26) Dă exemplu de funcție $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continuă, cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$.

27) Determină $\min\limits_{x\in[-1,2]} f(x)$ și $\max\limits_{x\in[-1,2]} f(x)$ pentru funcția $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

28) Fie funcția $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$. Determină $\min\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x)$ și punctele în care aceste valori se ating.

29) Precizează care dintre următoarele funcții $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sunt mărginite:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{2x^2+1}$;

b) $f(x) = \sin x$;

c) $f(x) = x + \sin x$;

d) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

PROBLEME PROPUSE

● **1.** Studiază continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \ln \dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

● **2.** Determină $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}, & x \geq 1 \\ \alpha x + 3, & x < 1 \end{cases}$$

să fie continuă în $x = 1$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ae^x, & \text{dacă } x\leqslant 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{b}}{x}, & \text{dacă } x>0 \end{cases}$.

Află a, $b\in\mathbb{R}$, $b>0$ dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$.

4. Determină punctele de discontinuitate și tipul lor, pentru următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\leqslant 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ \lambda, & x=0\ (\lambda\in\mathbb{R}) \end{cases}$;

c) $f:(0,e^3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[\ln x]$.

5. Studiază continuitatea funcțiilor compuse $f\circ g$ și $g\circ f$, în fiecare din cazurile:

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ și $g(x)=x^2-2x+1$;

b) $f,g:(0,1)\to(0,1)$,

$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0<x<\dfrac{1}{2} \\ x, & \text{dacă } \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x, & \text{dacă } 0<x\leqslant\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } \dfrac{1}{4}<x<1 \end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q} \\ x, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

6. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$, numită „funcția de rotunjire".

a) Trasează graficul funcției și determină punctele ei de discontinuitate.

b) Definim funcția $g(x)=|f(x)-x|$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Demonstrează că $g(x)=|x|$, $\forall\, x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, g este periodică de perioadă 1 și g este continuă pe $\mathbb{R}$.

7. Află mulțimea punctelor de discontinuitate pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]\sin\pi x$.

8. Dacă $x\in\mathbb{R}$, notăm prin (x) distanța dintre x și cel mai apropiat întreg de x.

Se consideră funcția $f(x)=\begin{cases} (x), & \text{dacă } x\neq\dfrac{1}{2} \\ a, & \text{dacă } x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Studiază continuitatea funcției f în funcție de $a\in\mathbb{R}$.

9. Arată că $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x>0 \\ \dfrac{2^x-1}{x}, & x<0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

are o discontinuitate în 0 și precizează-i speța.

10. Studiază continuitatea funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=[\ln x]$;

b) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-[x]$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right], & \text{dacă } x\neq 0 \\ a, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$.

11. Studiază continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3}\left[\dfrac{2}{x}\right], & \text{dacă } x\neq 0 \\ \dfrac{2}{3}, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$.

12. Determină $\beta\in[0,1]$ astfel încât funcția

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}, & \text{dacă } |x|<1 \\ 1+\sqrt{x^2-\beta}\cdot e^{-x}, & \text{dacă } |x|\geqslant 1 \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

13. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții continue, $f(x)=g(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}$. Demonstrează că $f(x)=g(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

14. Se consideră funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Arată că:

a) f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) în nici o vecinătate a originii funcția f nu este monotonă.

15. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $2^{f(x)}\leqslant x<2^{1+f(x)}$, $\forall\, x>0$. Studiază continuitatea lui f.

16. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x)-x|\leqslant x^2$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Demonstrează că f este continuă în $x=0$.

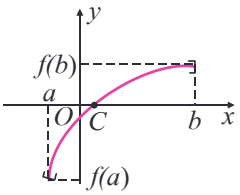
17. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă, cu proprietatea că $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Demonstrează că $\exists\, k\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=kx$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Studiul existenței soluțiilor reale ale unor ecuații și semnul unei funcții continue pe un interval

Teoremă.

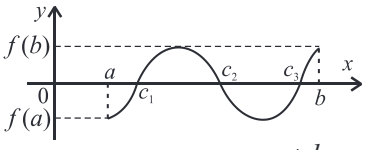
Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcție continuă și $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrare, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = 0$.

Justificarea geometrică a acestei teoreme este următoarea: dacă, spre exemplu, $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$, atunci o extremitate a graficului lui f se află sub axa Ox, iar cealaltă deasupra axei Ox. Deoarece f este continuă graficul ei nu se întrerupe, deci el trebuie să intersecteze axa Ox în cel puțin un punct.



Demonstrație.

Prezentăm o metodă care se bazează pe tehnica „înjumătățirii intervalului". Împărțim intervalul $[a, b]$ în două intervale de lungimi egale, prin punctul $\frac{a+b}{2}$. Dacă la mijlocul intervalului funcția se anulează, teorema este demonstrată. În caz contrar, printre valorile funcției la capetele intervalului și în mijlocul intervalului vor exista două de semne contrare. Notăm cu $[a_1, b_1]$ pe acela dintre cele două intervale la extremitățile căruia funcția are valori de semne contrare (de exemplu, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$). Repetăm înjumătățirea intervalului și raționamentul de mai sus. Procedând astfel, fie vom găsi, după un număr finit de pași, un punct în care f se anulează și, în acest caz, teorema este demonstrată, fie nu găsim nici un astfel de punct și, în acest caz, rezultă un șir descendent și infinit de intervale.



$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, unde $f(a_1) < 0$, $f(a_2) < 0, \ldots$, $f(a_n) < 0, \ldots, f(b_1) > 0, f(b_2) > 0, \ldots, f(b_n) > 0, \ldots$ iar $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$, unde $l = b - a$. Așadar $(a_n)_{n \geqslant 1}, (b_n)_{n \geqslant 1}$ au proprietățile:

(1) $a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$. Aplicând proprietatea lui Cantor, deducem că $\exists\, c \in (a, b)$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = c$.

Funcția f fiind continuă în c, rezultă că $f(c) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \leqslant 0$ și $f(c) = \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) \geqslant 0$. În concluzie, $f(c) = 0$.

Observație.

Rezultatul teoremei e valabil într-un cadru mai general, adică: dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$ e continuă, există $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$, $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ și au semne contrare, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

1) Această teoremă este foarte utilă în studiul unor ecuații de forma $f(x) = 0$, unde f este o funcție continuă pe un anumit interval I. Astfel, dacă există două puncte în I unde f ia valori de semne contrare, atunci ecuația are cel puțin o soluție pe intervalul I.

Cum justificăm existența soluției reale a unei ecuații?

1) Demonstrează că următoarele ecuații au cel puțin o soluție în intervalul I:

a) $x^4 + 5x + 1 = 0$, $I = [-1, 0]$;

b) $e^x + x = 0$; $I = [-1, 0]$;

c) $\operatorname{tg} x + \cos x = 1{,}5$; $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

d) $\ln(1 + x) + \sqrt{x} = 1$; $I = [0, 1]$;

e) $(x - 2)\sin \pi x = 0$; $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$;

f) $x^4 - 3x = 1$; $I = [-1, 0]$;

g) $x^5 = 11$; $I = [-2, 2]$;

h) $x^2 + x^3 = 2$; $I = (-\infty, \infty)$;

i) $2 + \operatorname{tg} x = 0$; $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

j) $\operatorname{arctg} x - x + 1 = 0$; $I = (-\infty, \infty)$;

k) $x^6 + x^4 - 2x^2 = 0$; $I = (-2, 0)$;

l) $\ln x^x - x = 0$; $I = (0, 2e)$.

2) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Arată că există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0) = f(a + b - x_0)$.

Indicație.

Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(a + b - x)$. Observăm că g este continuă pe $[a, b]$. Se studiază semnul expresiei $g(a) \cdot g(b)$.

3) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă mărginită. Atunci ecuația $f(x) = ax + b$ are cel puțin o soluție, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Indicație.

Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - ax - b$ este continuă. În plus, f fiind mărginită, avem $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -a \cdot \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = a \cdot \infty$.

2) Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval, atunci ea păstrează semn constant pe acest interval.

Acest rezultat va fi util în rezolvarea unor inecuații sau în studiul semnului unor funcții continue pe intervale.

Probleme rezolvate.

1) Ecuația $2^{-x} = x$ are cel puțin o soluție în (0, 1).

Soluție.

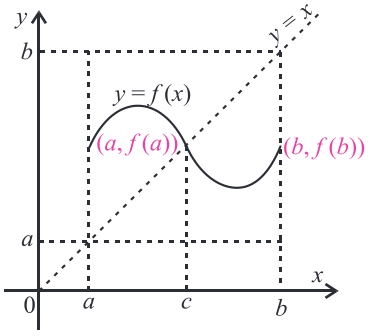
Funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} - x$ este continuă și $f(0) = 1 > 0$, $f(1)=\frac{1}{2}-1<0$, deci $\exists c\in(0,1)$ cu $f(c) = 0$.

2) Orice funcție polinomială de grad impar cu coeficienți reali admite cel puțin o soluție reală.

Soluție.

Într-adevăr, dacă $f(x) = a_n x^n + .. + a_0$, n impar și $a_n \neq 0$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-a_n\cdot\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a_n\cdot\infty$. Deci există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

3) Fie $f:[a, b]\to[a, b]$ o funcție continuă. Demonstrează că $\exists\, c\in[a, b]$ astfel încât $f(c) = c$ (punctul c se numește *punct fix al funcției f*).



Soluție.

Justificarea geometrică a acestui rezultat este ilustrată în figură.

Demonstrăm că ecuația $f(x) - x = 0$ are soluție în $[a, b]$.

Considerăm funcția ajutătoare $g:[a, b]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Funcția g este continuă și, în plus, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, iar $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Rezultă că $\exists\, c\in[a, b]$ astfel încât $g(c) = 0$, adică $f(c) = c$.

4) Rezolvă inecuația: $\dfrac{x^3-9x^2+23x-15}{x-2}\leqslant 0$.

Soluție.

Considerăm funcția continuă $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-9x^2+23x-15}{x-2}$. Rezolvăm ecuația $f(x) = 0$ și obținem soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ și $x_3 = 5$. Pentru aflarea semnului pe intervalele $(-\infty, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 5)$ și $(5, \infty)$ va fi suficient să calculăm valoarea funcției într-un punct al intervalului sau limita la una dintre extremitățile acestuia.

x	$-\infty$		1		2		3		5		∞
$f(x)$	$+\infty$	+	0	−	$-\infty \mid +\infty$	+	0	−	0	+	$+\infty$

Soluția este $x\in[1, 2)\cup[3, 5]$.

De reținut următoarea observație: funcția f nu se anulează pe intervalul (1, 3), totuși își schimbă semnul pe acest interval. Explicația constă în faptul că f nu este definită pe intervalul (1, 3), ci pe reuniunea intervalelor (1, 2) și (2, 3).

4) Un rezervor este umplut la o sursă cu debit variabil între orele 8 și 12. Același rezervor este golit prin scurgere a doua zi, tot între orele 8 și 12. Arată că există o aceeași oră t în ambele zile în care apa este la același nivel.

Indicație.

Fie V volumul rezervorului și $f, g : [8, 12]\to[0, V]$ definite astfel: $f(t)$ este volumul de apă la momentul t în timpul umplerii, iar $g(t)$ este volumul de apă la momentul t în timpul scurgerii.

Funcțiile f și g sunt continue, deci și funcția $h = f - g$ este continuă.

5) Rezolvă următoarele inecuații:

a) $\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x^2-3x+2}>0$; b) $\dfrac{\sqrt{x-1}+x}{x^2-3x+4}<0$;

c) $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}+x}<0$; d) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+2}<1$.

6) Studiază semnul funcției $f:(-1, \infty)\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{x-2}.$$

Indicație.

Rezolvăm ecuația $f(x) = 0$. Obținem:

$$\sqrt{1+x}=2-x \text{ și } \begin{cases}2-x>0\\ x>-1\\ 1+x=(2-x)^2\end{cases},$$

$$\begin{cases}-1<x<2\\ x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}\end{cases}, \text{ de unde } \begin{cases}-1<x<2\\ x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}\end{cases};$$

deci $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Funcția f este continuă și

$\lim\limits_{x\searrow-1} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow2} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\searrow2} f(x)=\infty$ și $f(3)=\dfrac{3}{2}>0$.

Se studiază semnul funcției pe intervalele

$$\left(-1,\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right),\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2},2\right),(2,\infty).$$

Proprietatea lui Darboux

O proprietate globală foarte importantă a funcțiilor continue definite pe intervale este proprietatea lui Darboux (*Gaston Darboux, 1842 – 1917, matematician francez*).

Definiție.
Fie I un interval. Spunem că *o funcție* $f: I \to \mathbb{R}$ *are proprietatea lui Darboux pe intervalul I* dacă pentru orice puncte $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ și orice număr λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, există un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$.

Altfel formulat, funcția f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă, o dată cu valorile distincte luate în două puncte ale intervalului I, $f(x)$ ia toate valorile intermediare atunci când x parcurge intervalul dintre cele două puncte.

Observație.
Funcțiile constante definite pe un interval au proprietatea lui Darboux pe acel interval.

O imagine mai clară a acestei proprietăți este oferită de următoarea ...

Teoremă.
O funcție $f: I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă și numai dacă imaginea oricărui interval prin funcția f este de asemenea interval, adică pentru orice interval $J \subseteq I$, $f(J)$ este interval.

Teorema următoare stabilește legătura dintre funcțiile continue și funcțiile care au proprietatea lui Darboux.

Teoremă.
Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Demonstrație.
Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, $x_1 < x_2$, $x_{1,2} \in I$ și λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Trebuie să demonstrăm că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$.

Considerăm funcția $g: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$; g este continuă iar $g(x_1)$ și $g(x_2)$ au semne contrare, deci există un $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $g(c) = 0$.

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: există funcții care au proprietatea lui Darboux pe un interval, dar care nu sunt continue pe acel interval.

7) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 0 \\ x+a, & x > 0 \end{cases},$$

$a \in \mathbb{R}$ și $I = (-\lambda, \lambda)$, $\lambda > 0$.
a) Determină $f(I)$ în cazul $a = 0$.
b) Determină $f(I)$ în cazul $a = -2$.
c) Determină a astfel încât $f(I)$ să fie interval pentru orice $\lambda > 0$.

8) Demonstează că următoarele funcții nu au proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x+1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \leqslant 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$.

9) Arată că următoarele funcții au proprietatea lui Darboux:

a) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^5, & x \in [-2, 0) \\ x^2, & x \in [0, 2] \end{cases}$;

b) $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}, & x \in (1, 3] \end{cases}$;

c) $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-a, 0) \\ 1-x, & x \in [0, a] \end{cases}$, $a > 0$.

10) Demonstrează că următoarele funcții sunt bijective:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \dfrac{x}{a}$, unde $a > 0$;

b) $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

c) $f: (0, 1) \to (0, \infty)$, $f(x) = \ln \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

d) $f: [0, 3] \to [0, 2]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{1-x}, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{x+1}{2}, & x \in (1, 3] \end{cases}.$$

De exemplu, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$, are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ dar nu este continuă în $x = 0$.

Consecință.

Fie $f:[a,b]\to[m,M]$ o funcție continuă pe $[a, b]$ $\left(m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x),\ M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right)$. Atunci f este surjectivă.

Demonstrație.

Cum f are proprietatea lui Darboux, rezultă că ia toate valorile cuprinse între m și M.

Probleme rezolvate.

1) Există funcții continue $f:[0, 1]\to(0, 1)$ surjective?

Soluție.

Răspunsul este negativ. Într-adevăr, dacă f este continuă pe $[0, 1]$ atunci, conform teoremei de mărginire a lui Weierstrass, f este mărginită și își atinge efectiv marginile m și M. Din faptul că f are proprietatea lui Darboux rezultă că $f(x)$ ia toate valorile cuprinse între m și M atunci când x parcurge intervalul $[0, 1]$, deci $f([0, 1]) = [m, M] \neq (0, 1)$, ceea ce înseamnă că f nu poate fi și surjectivă.

2) Demonstrează că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul deschis I dacă și numai dacă I nu conține nici un număr întreg.

Soluție.

Fie $I = (a, b)$. Dacă $I\cap\mathbb{Z}=\varnothing$, atunci $f(x)=[a]$, $\forall x\in I$ deci f este constantă, prin urmare f are proprietatea lui Darboux pe I. Presupunem că $I\cap\mathbb{Z}\neq\varnothing$. Atunci $f(I)$ este o mulțime de numere întregi care conține cel puțin două elemente și $f(I)\subset\mathbb{Z}$, deci $f(I)$ nu poate fi interval și, prin urmare, f nu are proprietatea lui Darboux.

Teoremă.

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ (I un interval) o funcție continuă și injectivă. Atunci f este strict monotonă.

Demonstrație.

Presupunem că f nu este strict monotonă. Atunci există $x_1, x_2, x_3\in I$ astfel încât $x_1<x_2<x_3$ iar $f(x_1)<f(x_2)>f(x_3)$ sau $f(x_1)>f(x_2)<f(x_3)$.

Să ne situăm în primul caz. Dacă $f(x_1)<f(x_3)$, atunci $f(x_3)$ este cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, deci există $c\in(x_1, x_2)$ astfel încât $f(c)=f(x_3)$. Cum f este injectivă, rezultă că $c = x_3$, imposibil deoarece $x_1<c<x_2<x_3$. Cazul $f(x_1)>f(x_3)$ conduce, de asemenea, la o imposibilitate.

Indicație.

a) f continuă și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ implică $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci f surjectivă. Cum f este strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare, rezultă că f este și injectivă.

b) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$; f continuă și f crescătoare, rezultă f bijectivă.

11) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Determină imaginea funcției f.

Indicație.

f este injectivă, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ și f este continuă, rezultă $\mathrm{Im}f = (-1, 1)$.

Observație.

Concluzia teoremei alăturate are loc și în ipoteze „mai slabe“: funcția continuă este înlocuită cu o funcție având proprietatea lui Darboux.

Teoremă.

Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ (I interval) are proprietatea Darboux și este injectivă, atunci f este strict monotonă.

12) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Arată că, oricare ar fi $x_1, x_2\in[a,b]$ și $\alpha\in[0,1]$, există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

Indicație.

Dacă f este continuă pe $[a, b]$, f este mărginită și își atinge marginile. Dacă $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ și $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\in[m,M]$, $\forall x_1, x_2\in[a,b]$ și $\alpha\in[0,1]$.

Consecință.

a) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și injectivă, $m = \min\{f(a), f(b)\}$, $M = \max\{f(a), f(b)\}$. Atunci Im$f = [m, M]$.

b) Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ o funcție continuă și injectivă, $m = \min\left\{\lim\limits_{x \searrow a} f(x), \lim\limits_{x \nearrow b} f(x)\right\}$, $M = \max\left\{\lim\limits_{x \searrow a} f(x), \lim\limits_{x \nearrow b} f(x)\right\}$. Atunci Im$f = (m, M)$.

Demonstrație.

a) Cum f este continuă și injectivă, rezultă că f este strict monotonă, deci $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall\, x \in [a, b]$. Cum f este continuă pe $[a, b]$, rezultă că f își atinge marginile m și M și, în plus, ia toate valorile cuprinse între m și M. Prin urmare, Im$f = [m, M]$.

b) Din f continuă și injectivă rezultă că f este strict monotonă, deci există $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ și $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ și $m < f(x) < M$, $\forall\, x \in (a, b)$. Cum f este continuă, f ia toate valorile cuprinse între m și M, deci Im$f = (m, M)$.

Problemă rezolvată.

Demonstrează că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$ este bijectivă.

Soluție.

Demonstrăm mai întâi că f este injectivă.

Avem: $f(x_1) = f(x_2)$, $(x_1^3 - x_2^3) + (x_1 - x_2) = 0$,

$(x_1 - x_2)\underbrace{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1)}_{>0} = 0$, $x_1 = x_2$ (sau: f este strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare). Cum f este continuă, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, rezultă că Im$f = \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că f este și surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă, funcția f este bijectivă.

Inversarea funcțiilor continue

Teoremă.

Fie f o funcție continuă pe intervalul I și $J = f(\mathrm{I})$. Funcția $f : I \to J$ este bijectivă dacă și numai dacă f este strict monotonă și, în acest caz, funcția inversă $f^{-1} : J \to I$ este continuă și strict monotonă.

Această teoremă ne asigură că funcțiile trigonometrice inverse, funcția radical și funcția logaritmică sunt funcții continue.

13) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea: $2|x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant 5|x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Este f o funcție strict monotonă?

Indicație.

Se studiază injectivitatea și continuitatea lui f.

14) Studiază injectivitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{3}\sin x$.

Indicație.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_1) = f(x_2)$.

Avem $x_1 + \frac{1}{3}\sin x_1 = x_2 + \frac{1}{3}\sin x_2$,

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{3}|\sin x_1 - \sin x_2| =$$

$$= \frac{2}{3}\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \leqslant \frac{1}{3}|x_1 - x_2|,$$

$-\frac{2}{3}|x_1 - x_2| \leqslant 0$, de unde $x_1 = x_2$.

15) Studiază injectivitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + \cos x$.

16) Determină numărul real $a > 0$ minim, astfel încât funcția $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ să fie injectivă. Studiază apoi continuitatea funcției $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$, unde $\mathrm{I} = [a, +\infty)$, $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.

PROBLEME PROPUSE

1. Studiază dacă următoarele funcții au proprietatea lui Darboux pe domeniul de definiție:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^a-1+\ln x)^2}{x^3-5x+6}, & 0<x<1\\ a+1, & x=1\end{cases}$, $a>0$;

b) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$; $a>0$.

2. Determină relațiile dintre $a\in\mathbb{R}$ și $b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{dacă } -1\leqslant x<0\\ x^2+ax+b, & \text{dacă } 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ să aibă proprietatea lui Darboux pe $[-1, 1]$.

3. Stabilește domeniul maxim de definiție E al funcției $f:E\to\mathbb{R}$ și verifică dacă au proprietatea lui Darboux: a) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^2+1}{x^{2n}+x^2+2}$;

b) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{2n}}$;

c) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}(1+\sin^{2n}x)}{\sqrt{x^{2n}+2^{2n}}}$;

d) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)}$.

4. Stabilește dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux:

a) $f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ -2x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

5. Demonstrează că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q}\\ x, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

6. Rezolvă inecuațiile: a) $\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+3}}\leqslant 3$;

b) $\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{2-x}\geqslant\sqrt[3]{3}$; c) $\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sin x}{\cos x-2}\geqslant 0$.

7. Arată că funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux, dar $\operatorname{Im} f$ este interval.

8. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale. Demonstrează că, dacă șirul $\left(x_n^3+x_n\right)_{n\geqslant 1}$ este convergent, atunci șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este de asemenea convergent.

9. Arată că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă $a\in[-1, 1]$.

10. Se consideră funcția $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ \lambda, & \text{dacă } x=0\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Demonstrează că:

a) f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\lambda\in[-1, 1]$;

b) f nu este continuă în $x_0=0$.

11. Verifică dacă funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=[t]\cdot\left|\cos(2t-1)\dfrac{\pi}{2}\right|$ are proprietatea lui Darboux.

12. Fie $f:[0,1]\to[0,1]\cup[2,3]$ o funcție continuă, astfel încât $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. Arată că:

a) f nu este surjectivă;

b) f nu este strict crescătoare;

c) f nu este injectivă.

13. Demonstrează că, dacă $f:[a,b]\to\mathbb{Q}$ are proprietatea lui Darboux, atunci f este constantă.

14. Fie $f, g:[a,b]\to[a,b]$ continue, f surjectivă. Demonstrează că există cel puțin un punct $x_0\in[a,b]$ astfel încât $f(x_0)=g(x_0)$.

15. Demonstrează că, pentru orice funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă și mărginită, există un punct $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0)=x_0$ (în acest caz x_0 se numește punct fix pentru f).

16. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă cu $f(a) = f(b)$ și fie $c = \frac{a+b}{2}$ mijlocul intervalului $[a, b]$.

Demonstrează că există $x_0 \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ astfel încât $f(a + x_0) = f(c + x_0)$.

17. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Demonstrează că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_k \in I$, $\lambda_k \in (0, 1)$, $k = \overline{1, n}$ cu $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

18. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $(f \circ f)(x) = -x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Demonstrează că f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$, dar este injectivă.

19. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ (I interval) o funcție continuă și injectivă, iar $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de puncte din I.

Demonstrează că șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ are limită dacă și numai dacă șirul $\left(f(x_n)\right)_{n \geqslant 1}$ are limită.

20. Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Demonstrează că, dacă $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$, atunci f nu este injectivă.

Test de evaluare

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 1 \\ \ln x + x - 2, & x \geqslant 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să aibă proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.
b) Demonstrează că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[1; 2]$.

2. Determină valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ are un singur punct de continuitate.

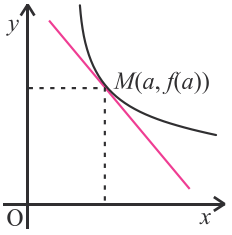
3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(x^3 + x^2 + x + 1) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrează că:
a) funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ este bijectivă;
b) funcția f este continuă;
c) funcția f nu este monotonă;
d) $\mathrm{Im} f = [-1, 1]$.

Derivabilitatea funcțiilor

1. Funcții care admit derivată. Funcții derivabile

Noțiunea de derivată, parte esențială a calculului diferențial, își are originea în studiul unor probleme de geometrie și de mecanică. În antichitate, Eudoxiu (408-355 î.Hr.), Arhimede (287-212 î.Hr.) și Papus (sec. III), au abordat problematica care a condus ulterior la calculul diferențial. Regulile generale ale calculului diferențial au fost elaborate aproape în același timp de către Isaac Newton (1642-1727) și Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

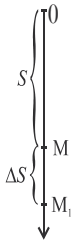


Posibilitatea de a duce o tangentă într-un punct al unui grafic este studiată cu ajutorul noțiunii de derivată. Atunci când o funcție admite derivată într-un punct a, vom înțelege că reprezentarea grafică a funcției f admite o tangentă în punctul de coordonate $(a, f(a))$.

Deoarece multe relații sunt frecvent exprimate prin funcții continue și derivabile, calculul diferențial exprimă matematic stări și procese din științele naturii și din disciplinele tehnologice. De exemplu, dacă $s=f(t)$ descrie dependența distanței parcurse de un punct material în mișcare de timpul t, atunci derivata acestei funcții în punctul t_0 reprezintă viteza instantanee a punctului material la momentul t_0. Ca o generalizare a acestei idei, conceptul de viteză este aplicat și pentru alte situații în care timpul are rol de variabilă independentă. Noțiunile de încălzire sau răcire a unui corp, viteza de reacție a proceselor chimice, rata de dezintegrare a proceselor radioactive și rata de creștere a organismelor biologice pot fi definite și calculate cu ajutorul derivatelor.

Vom prezenta probleme ce conduc la noțiunea de derivată.

I) *Problema calculării vitezei unui punct în mișcare*



Să considerăm căderea liberă în vid a unui punct material greu. Distanța S (măsurată în metri) parcursă de punctul material în intervalul de timp t (măsurat în secunde) se exprimă astfel: $S=\frac{g}{2}\cdot t^2$, unde $g \approx 9{,}81$ m/s^2.

Ne propunem să aflăm viteza v a punctului material aflat în poziția M, la momentul t dat.

Să dăm variabilei t o creștere Δt și să considerăm timpul $t + \Delta t$ când punctul va fi în poziția M_1. Creșterea MM_1 a distanței parcurse de punct în intervalul de timp Δt o notăm prin ΔS.

1) O rachetă se înscrie pe traiectorie după o curbă. Masa și viteza deosebit de mari determină asupra rachetei o forță de inerție tangentă la traiectorie. De ce această traiectorie nu se schimbă brusc, adică de ce traiectoria nu desenează unghiuri și linii frânte?

2) În mișcarea rectilinie și uniformă $S(t) = v \cdot t$. Arată că $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$.

Din $OM_1 = S + \Delta S = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2$ deducem $\Delta S = \frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2)$. Viteza medie v_m de cădere a punctului material în porțiunea MM_1 este dată prin formula $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = g\cdot t + \frac{g}{2}\cdot\Delta t$; v_m depinde de variația Δt și caracterizează cu atât mai bine mișcarea punctului material la momentul t cu cât Δt va fi mai mic. Definim viteza v a punctului în momentul t ca fiind limita către care tinde viteza medie v_m în intervalul Δt, când Δt tinde la zero, adică $v = \lim\limits_{\Delta t\to 0} v_m = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(g\cdot t + \frac{g}{2}\cdot\Delta t\right) = gt$.

II) *Intensitatea unui curent variabil la un moment dat*

Să notăm cu Q cantitatea de electricitate (măsurată în coulombi) scursă în intervalul de timp t (măsurat în secunde) printr-o secțiune transversală a unui circuit $Q = Q(t)$. Să dăm variabilei t o creștere Δt și să considerăm creșterea $\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$. Intensitatea medie a curentului în intervalul de timp Δt va fi $I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Definim intensitatea curentului la un moment t: $I = \lim\limits_{\Delta t\to 0} I_m = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}$.

Problemele prezentate, cât și alte probleme asemănătoare, conduc la studierea dintr-un punct de vedere unitar a limitei raportului $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ când Δx tinde la zero; $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ se numește creșterea funcției corespunzătoare creșterii argumentului cu Δx.

În cele ce urmează, considerăm $D\subset\mathbb{R}, D\neq\varnothing$.

Definiție. Fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in D\cap D'$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există (finită sau infinită), se notează cu $f'(x_0)$ și se numește *derivata funcției f în x_0*. Dacă, în plus, $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ (este finit) atunci spunem că *funcția f este derivabilă în x_0*.

EXEMPLU

Să studiem derivabilitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ în punctul $x = x_0$.

Avem $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax^2-ax_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = 2a\cdot x_0$,

deci f este derivabilă în $x_0\in\mathbb{R}$ și $f'(x_0) = 2\cdot a\cdot x_0$.

Alături de simbolul $f'(x_0)$ dat de J. Lagrange se mai folosesc și simbolurile $\frac{df(x_0)}{dx}$ dat de G. Leibniz sau $\Delta f(x_0)$ dat de A. Cauchy. Noi vom folosi în special notația simplă a lui Lagrange.

În cazul în care există $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (sau $-\infty$), f nu este derivabilă în x_0, dar vom spune că are derivata $+\infty$ (respectiv $-\infty$).

Să studiem derivabilitatea funcțiilor într-un punct.

3) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2$.
a) Calculează $f'(1)$.
b) Este f derivabilă în $x_0 = 1$?

4) Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3$, $n\in\mathbb{N}$. Calculează $f'(1)$. Este f derivabilă în 1?

5) Fie $f(x) = \sqrt{x}$, $x\geqslant 0$.
a) Calculează $f'(0)$.
b) Este f derivabilă în 0?
c) Fie $x_0 > 0$. Calculează $f'(x_0)$. Putem afirma că f este derivabilă în x_0 dacă $x_0 > 0$?

6) Considerăm funcția sinus.
a) Calculează $\sin' 0$, $\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin'(\pi)$.
b) Determină domeniul de derivabilitate al funcției sinus.

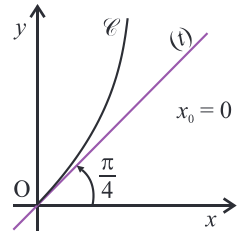
Aceleași cerințe pentru funcția cosinus.

Indicație.

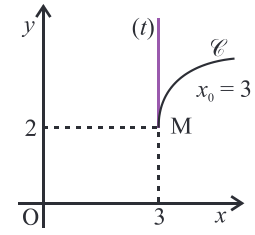
Utilizează $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

7) $\mathscr{C}$ este reprezentarea grafică a funcției f; t este tangenta la curba $\mathscr{C}$ în $M_0(x_0, y_0)$. Determină $f'(x_0)$, ecuația tangentei și panta tangentei în x_0.

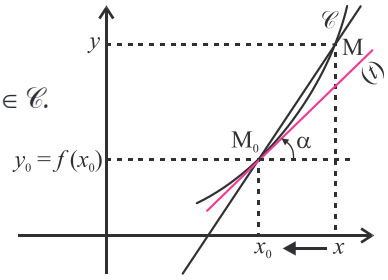
a)



b)



Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct



Considerăm funcția f și curba sa reprezentativă $\mathscr{C}$, $M_0(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$.

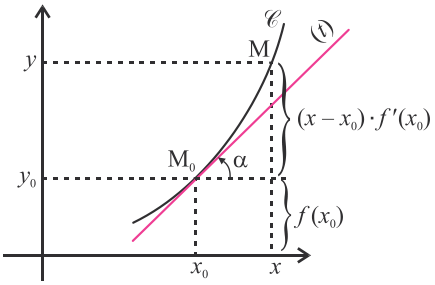
Raportul $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ reprezintă panta secantei M_0M. Dacă x ia valori oricât de apropiate de x_0, atunci punctul M „tinde“ să se confunde cu M_0;

în aceste condiții $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ devine panta tangentei t la curbă în M_0, notată $f'(x_0) = m_t$.

Observații.

♦ Dacă derivata este finită, coeficientul unghiular tgα al acestei tangente este egal cu derivata $f'(x_0)$.

♦ Dacă derivata este infinită, tangenta este verticală.



Cunoaștem panta dreptei tangente m_t și coordonatele unui punct al ei, $M_0(x_0, y_0)$; prin urmare, ecuația tangentei la grafic este: $y - y_0 = m_t(x - x_0)$, adică

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Observații.

♦ Derivabilitatea unei funcții într-un punct reprezintă o proprietate a funcției, iar derivata $f'(x_0)$ reprezintă un număr sau $\pm\infty$.

♦ Derivabilitatea este o noțiune cu caracter punctual; ea are sens numai în punctele de acumulare care aparțin domeniului de definiție. De exemplu, nu are sens problema derivabilității funcției $f(x) = \ln x$ în punctul 0 sau în punctul –1 sau a funcției $f(x) = \text{tg}x$ în punctul $\dfrac{\pi}{2}$.

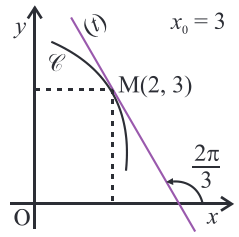
Propoziție.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$; atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$;

2) $\forall (x_n)_n \subset D\setminus\{x_0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$.

c)



Ce interpretare geometrică dăm numărului $f'(x_0)$?

8) Studiază derivabilitatea funcțiilor următoare în $x_0 = 0$:

a) $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x$;

b) $g : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1)$.

Indicație.

Utilizează $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ și $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

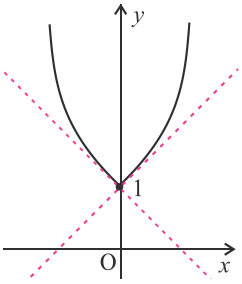
9) Studiază continuitatea și derivabilitatea funcției modul, $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ în punctul $x_0 = 0$.

Indicație.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci este continuă în $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1;\ \lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$$

10) Arată că $f(x) = e^{|x|}$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct. Regăsește rezultatul obținut pe grafic.



Observă că în punctul (0, 1) funcția nu are tangentă, dar are două semitangente.

11) Studiază continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}, \text{ în punctul } x_0 = 0.$$

Ideea demonstrației. Se utilizează definiții echivalente ale limitei funcției $r: D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definiție.
Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $A \subset D \cap D'$. Funcția f este *derivabilă pe mulțimea* A dacă f este derivabilă în orice punct $x \in A$.
Dacă $A = D$, spunem simplu că funcția f este *derivabilă*.

Definiție.
Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție.
Mulțimea $D_{f'} = \{x_0 \in D \cap D' \mid f \text{ e derivabilă în } x_0\}$ se numește *domeniul maxim de derivabilitate* al funcției f.
Funcția $f': D_{f'} \to \mathbb{R}$, care asociază fiecărui $x \in D_{f'}$ numărul real $f'(x)$ $(x \mapsto f'(x))$, se numește *derivata funcției f*.

EXEMPLU

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $f'(x_0) = 2x_0$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$. Domeniul de derivabilitate al funcției f, $D_{f'}$, este tot $\mathbb{R}$. Funcția $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ este derivata lui f.

În cele ce urmează vom nota cu I un interval al dreptei reale.

Teoremă. *(Legătura dintre continuitate și derivabilitate)*
Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci f este continuă în x_0.

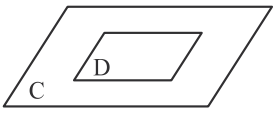
Demonstrație.

Fie $x \in I$, $x \neq x_0$; atunci $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$.

Din $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$ rezultă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică f este continuă în x_0.

Consecință.
Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe I, atunci f este continuă pe I.

În figura alăturată, D reprezintă mulțimea funcțiilor derivabile pe un interval I, iar C reprezintă mulțimea funcțiilor continue pe I ($D \subset C$).



Observație.
Reciproca nu este, în general, adevărată. Este posibil ca o funcție să fie continuă într-un punct $x_0 \in I$, fără să fie derivabilă în x_0.

Indicație.

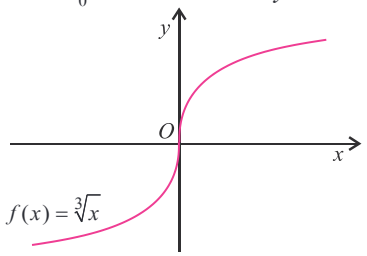
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-2x + 1) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2x + 1) = 1 = f(0)$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{-2x}{x} = -2$, iar

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{2x}{x} = 2$.

12) Arată că funcția $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $x \geqslant -2$ este derivabilă în 0 și nu este derivabilă în -2.

13) Arată că funcția $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$, dar are derivata infinită în $x_0 = 0$. Regăsește pe grafic rezultatul. Observăm că tangenta la grafic în $x_0 = 0$ este axa Oy.



14) Studiază derivabilitatea funcțiilor următoare și completează spațiile punctate.

a) $g: \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, în $x_0 = 0$.

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

în $x_0 = 0$.

Indicație.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, deci

g este ..... $x = 0$ și $g'(0) =$ ..... .

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$, deci

h este ..... în $x = 0$ și $h'(0) =$ ..... .

15) Arată că funcția $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

EXEMPLU

... de funcție continuă într-un punct care nu este derivabilă în acest punct.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Evident, f este continuă în $x_0 = 0$. Din $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1$ și $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$, rezultă că f nu e derivabilă în $x_0 = 0$.

Remarcă.

Există funcții continue pe un interval care nu sunt derivabile în nici un punct din acest interval. Un astfel de exemplu a fost dat prima dată în 1874 de matematicianul german Karl Weierstrass.

16) Studiază derivabilitatea funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1$, în $x_0 = 1$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x\sqrt[3]{x}$, în $x_0 = 0$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, în $x_0 = 1$;

d) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln|x|$, în $x_0 = -1$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Indicație. Se determină punctele în care f e continuă și se studiază derivabilitatea doar în acele puncte.

PROBLEME PROPUSE

1. Determină creșterea funcției $f(x) = x^2$ corespunzătoare schimbării argumentului:

a) de la $x = 1$ la $x_1 = 2$;

b) de la $x = 1$ la $x_1 = 1{,}1$.

2. Calculează Δy pentru funcția $y = \sqrt[3]{x}$ dacă:

a) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}001$; b) $x = 8$, $\Delta x = -9$.

3. Determină Δy și $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ corespunzătoare schimbării argumentului din x în $x + \Delta x$:

a) $y = ax + b$; b) $y = x^2$.

4. Determină rata de creștere Δy a funcției $y = x^2$ în intervalul $[1, 4]$.

5. Determină $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru funcția $y = \frac{1}{x}$ în $x = 2$, dacă: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0{,}1$. Calculează $y'(2)$.

6. Calculează $f'(8)$ dacă $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

7. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot (x-1)^2$, calculează: $f'(0)$, $f'(1)$.

8. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x(x-1)(x-2) \ldots (x-50)$. Calculează $f'(0)$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$. Pentru $x_0 \in \mathbb{R}^*$, calculează $f'(x_0)$.

10. Arată că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[5]{x}$ nu are derivată finită în punctul $x_0 = 0$.

11. Studiază derivabilitatea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$, în $x_0 = -1$ și $x_1 = 1$;

b) $g: (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \ln x - 1$, în $x_0 = e$;

c) $h: \mathbb{R} \to (0, \infty),\ h(x) = 2^{x-3}$, în $x_0 = 3$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}; & x < 0 \\ 0; & x \geqslant 0 \end{cases}$, în $x_0 = 0$.

12. Studiază continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în punctul $x = 0$.

a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = x^2 - x$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leqslant 0 \\ 2x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$; d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

13. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^a \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ să fie derivabilă în origine.

14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă în x_0. Calculează: $\lim\limits_{n \to \infty} n\left[f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) + f\left(x_0 + \frac{2}{n}\right) - 2f(x_0)\right]$.

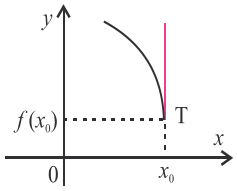
2. Derivate laterale. Derivatele unor funcții elementare

Derivate laterale. Interpretare geometrică

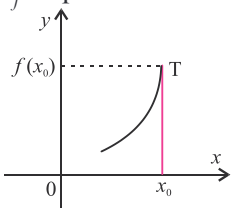
Fie o funcție $f : D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$. Funcția raport $r : D - \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este posibil să nu aibă limită în punctul x_0, dar să aibă limite laterale în x_0.

Definiție. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulțimii $D \cap (-\infty, x_0)$. Spunem că *f este derivabilă* (respectiv *are derivată*) *la stânga în* x_0, dacă există $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_s(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$).

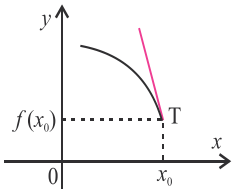
Fie $T(x_0, f(x_0)) \in \mathcal{G}_f$. Apar următoarele situații:



$f'_s(x_0) = -\infty$;
$\mathcal{G}_f$ are semitangentă la stânga în T, de ecuație: $x = x_0$, $y \geqslant f(x_0)$.



$f'_s(x_0) = +\infty$;
$\mathcal{G}_f$ are semitangentă la stânga în T, de ecuație: $x = x_0$, $y \leqslant f(x_0)$.



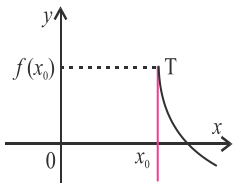
$f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$;
$\mathcal{G}_f$ are semitangentă la stânga în T, de ecuație: $y - f(x_0) = f'_s(x_0)(x - x_0)$ $x \leqslant x_0$.

Exercițiu rezolvat. Calculează derivata la stânga în punctul $x_0 = 0$ pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$.

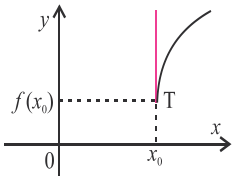
Soluție. $f'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{\sqrt{-x}}{x} = -\lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{\sqrt{-x}}{(\sqrt{-x})^2} = -\lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$.

Definiție. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulțimii $D \cap (x_0, +\infty)$. Spunem că *f* este *derivabilă* (respectiv *are derivată*) *la dreapta în* x_0, dacă există $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$).

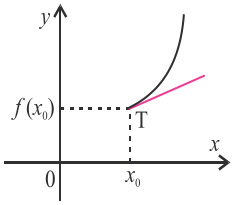
Fie $T(x_0, f(x_0)) \in \mathcal{G}_f$. Apar următoarele situații:



$f'_d(x_0) = -\infty$;
$\mathcal{G}_f$ are semitangentă la dreapta în T, de ecuație: $x = x_0$, $y \leqslant f(x_0)$.



$f'_d(x_0) = +\infty$;
$\mathcal{G}_f$ are semitangentă la dreapta în T, de ecuație: $x = x_0$, $y \geqslant f(x_0)$.



$f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{G}_f$ are semitangentă la dreapta în T, de ecuație: $y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x - x_0)$ $x \geqslant x_0$.

1) Calculează derivata la stânga în punctele specificate pentru următoarele funcții:

a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$, în $x_0 = -1$;

b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 1$, în $x_0 = 1$.

Indicație.

a) $g'_s(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim\limits_{x \nearrow -1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;

b) $h'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \nearrow 1} (x+1)$.

2) Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1] \\ 1 - x^2, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}$, calculează

$f'_s(-1)$, $f'_s(-2)$, $f'_s(0)$.

3) Calculează derivatele la stânga ale funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în punctele x_0 indicate:

a) $f(x) = x^2 + \sqrt{|x|}$ în $x_0 = 0$;

b) $f(x) = x + |x - 2|$ în $x_0 = 2$;

c) $f(x) = x\sqrt{|x+2|}$ în $x_0 = -2$;

d) $f(x) = \begin{cases} x \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, în $x_0 = 0$.

4) Calculează derivatele la dreapta ale funcțiilor în punctele specificate:

a) $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$, în $x_0 = 0$;

b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + 5$, în $x_0 = 2$.

Indicație.

a) $g'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$;

b) $h'_d(2) = \lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{x^3 + 5 - 13}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \searrow 2} (x^2 + 2x + 4)$.

Observații.

♦ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție, atunci nu are sens problema derivatei la stânga în punctul a și nici a derivatei la dreapta în punctul b.

♦ Funcția f are derivată în punctul a dacă și numai dacă are derivată la dreapta în a și în acest caz $f'(a) = f'_d(a)$.

♦ Funcția f are derivată în punctul b dacă și numai dacă are derivată la stânga în b și în acest caz $f'(b) = f'_s(b)$.

Propoziție.

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$. Atunci f are derivată în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0. În acest caz, $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Demonstrație.

Fie funcția raport $r : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\forall\, x \in D - \{x_0\}$. Atunci f are derivată în x_0, adică $\exists \lim\limits_{x \to x_0} r(x)$, deci $\exists \lim\limits_{x \nearrow x_0} r(x) = l_s$, $\exists \lim\limits_{x \searrow x_0} r(x) = l_d$ și $l_s = l_d$; rezultă că $\exists f'_s(x_0)$, $\exists f'_d(x_0)$ și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Reciproca se verifică asemănător.

Exercițiu rezolvat. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ \sin x, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

Determină a și b pentru care funcția f este derivabilă în $x_0 = 0$.

Soluție.

Pentru ca f să fie derivabilă în x_0 este necesar ca f să fie continuă în x_0: $\lim\limits_{x \nearrow 0}(ax + b) = \lim\limits_{x \searrow 0} \sin x = f(0) \Leftrightarrow b = 0$;

$f'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{ax}{x} = a$; $f'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Condiția de derivabilitate impune $a = 1$.

Propoziție.

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$.

1) dacă f este derivabilă la stânga în x_0, atunci f este continuă la stânga în x_0;

2) dacă f este derivabilă la dreapta în x_0, atunci f este continuă la dreapta în x_0.

Demonstrație. 1) Fie $x \in D$, $x < x_0$. Trecând la limită în relația $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ obținem $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (x - x_0) = 0$. Deci f este continuă la stânga în x_0.

Revenim la interpretarea geometrică a derivatelor laterale. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, $x_0 \in D \cap D'$ și presupunem că au sens și există $f'_s(x_0)$ și $f'_d(x_0)$.

5) Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in \mathbb{R} - (-\infty, -1] \\ 1 - x^2, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}$, calculează $f'_d(-1)$, $f'_d(-2)$, $f'_d(0)$.

6) Calculează derivatele laterale la dreapta în punctele specificate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1] \\ 1 - x^2, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}$, în $x_0 = -1$;

b) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x - 1}$, în $x_0 = 1$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, în $x_0 = 0$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$, în $x_0 = 2$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

7) Studiază derivabilitatea funcției în punctul specificat:

a) $f : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 2}$, în $x_0 = -2$;

b) $g : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$, în $x_0 = 1$.

8) Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 2, & x < 0 \\ \ln(x + 1) + b, & x \geqslant 0 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

9) Calculează derivatele laterale ale funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în punctele indicate:

a) $f(x) = x + |x|$, în $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, în $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leqslant 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, în $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{|x| + 1}$, în $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{|x| + 1}$, în $x_0 = 0$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{|x + 1| + 1}$, în $x_0 = -1$;

g) $f(x) = |\cos x - 1|$, în $x_0 = 0$.

Remarcăm următoarele situații:

I. $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$.

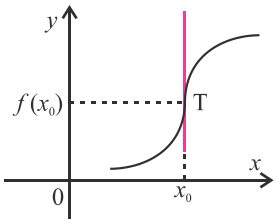
În acest caz funcția f este derivabilă în x_0 și $\mathcal{G}_f$ are tangentă în punctul $T(x_0, f(x_0))$ dreapta de ecuație:

$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0), \forall x \in \mathbb{R}$ (unde $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$).

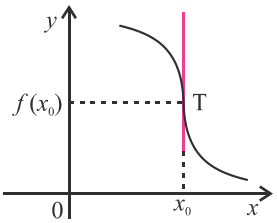
II. $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}$.

În acest caz, f nu este derivabilă în x_0 (dar are derivată în x_0, $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}$) și graficul funcției $\mathcal{G}_f$ are tangentă în punctul T dreapta de ecuație $x = x_0$ (o dreaptă paralelă la Oy).

$f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = +\infty$



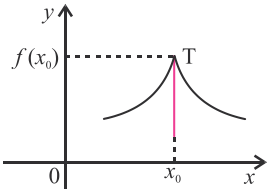
$f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = -\infty$



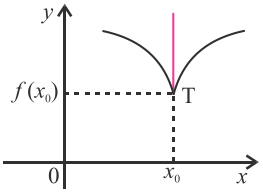
III. $f_s'(x_0), f_d'(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}$ și $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$.

În acest caz, f nu este derivabilă în x_0 și nu are derivată în x_0. Punctul $T(x_0, f(x_0))$ se numește *punct de întoarcere pentru* $\mathcal{G}_f$.

$f_s'(x_0) = +\infty$, $f_d'(x_0) = -\infty$
ecuația semitangentei este
$x = x_0, y \leqslant f(x_0)$



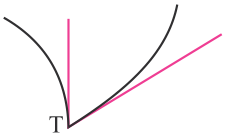
$f_s'(x_0) = -\infty$, $f_d'(x_0) = +\infty$
ecuația semitangentei este
$x = x_0, y \geqslant f(x_0)$



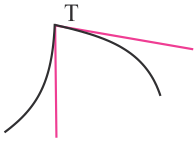
IV. $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ și cel puțin una dintre ele este finită.

În acest caz punctul T se numește *punct unghiular pentru* $\mathcal{G}_f$. Graficul funcției f admite în T două semitangente.

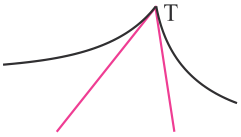
a) $\begin{cases} f_s'(x_0) = -\infty \\ f_d'(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$



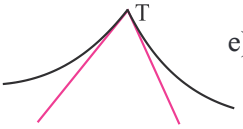
b) $\begin{cases} f_s'(x_0) = +\infty \\ f_d'(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$



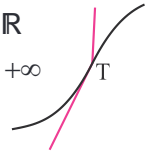
c) $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbb{R} \\ f_d'(x_0) = -\infty \end{cases}$



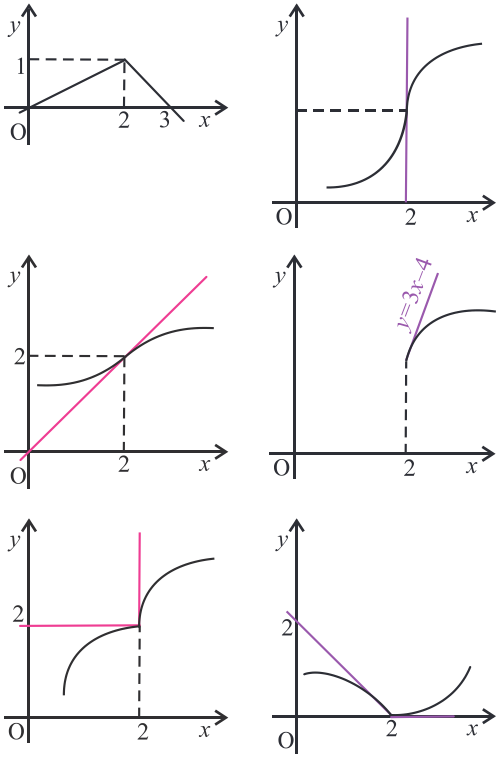
d) $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbb{R} \\ f_d'(x_0) \in \mathbb{R} \\ f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0) \end{cases}$



e) $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbb{R} \\ f_d'(x_0) = +\infty \end{cases}$



10) Observă dacă există derivatele laterale în 2 și precizează dacă f este derivabilă sau are derivată în acest punct.



11) Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & , x \leqslant 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

12) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

a) $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leqslant 0 \\ x^2 + bx + 1, & x > 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0 \\ x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}$.

Găsește $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este derivabilă în punctul $x = 0$.

13) Scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, în punctul M(1, 1).

14) Scrie ecuația tangentei la graficul lui $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ în M(1, 1).

Exerciții rezolvate.

1) Determină ecuațiile tangentelor la graficul funcției $f(x) = x - x^2$ în punctele de abscisă:

a) $x = 0$; b) $x = 1$;

și măsurile unghiurilor formate de semidreapta (Ox cu aceste tangente.

Soluție.

a) $f'(0)=1;\ \varphi=\frac{\pi}{4};\ y=x$; b) $f'(1)=-1;\ \varphi=\frac{3\pi}{4};\ y=-x+1$.

2) Determină $b, c \in \mathbb{R}$ știind că parabola $y = x^2 + bx + c$ are ca tangentă dreapta de ecuație $y = x$ în punctul (1, 1).

Soluție.

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-x^2-bx-c}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+b\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+b+\Delta x)=2x+b;$$

$y'(1)=1$ și $y(1) = 1$. Rezultă $2 + b = 1$ și $1 + b + c = 1$, de unde deducem $b = -1$, $c = 1$.

Derivatele unor funcții elementare

Vom calcula derivatele câtorva funcții elementare. Dacă $f: D \to \mathbb{R}$, vom nota $D_{f'}$ domeniul ei de derivabilitate.

1) *Funcția constantă* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x)=0$.

Demonstrație.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0=f'(x_0)$. Cum x_0 a fost ales arbitrar, rezultă $f'(x)=0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Observație.

Prin notația $\boxed{c'=0}$ vom înțelege că derivata funcției constante este zero (nu derivata numărului c).

2) *Funcția identitate* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ este derivabilă și $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x)=1$.

Demonstrație.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1=f'(x_0)$. Rezultă $f'(x)=1,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Observație.

Prin notația $\boxed{x'=1}$ vom înțelege derivata funcției identice și nu trebuie să se înțeleagă derivata argumentului.

15) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Scrie ecuația tangentei la grafic în punctul $M_0(x_0, f(x_0)) \in \mathcal{G}_f$:

a) $f(x) = x^3$, în $x_0 = 0$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1$, în $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \sin x$, în $x_0 = 0$;

d) $f(x)=x+\sin x$, în $x_0=0$.

16) Stabilește dacă $x_0 = 0$ este punct unghiular sau punct de întoarcere pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{|x|}$;

b) $f(x)=x+|x|$.

17) Scrie ecuația tangentei la graficul lui $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[4]{x^2}$, în M(0, 0).

18) Scrie ecuațiile semitangentelor la graficul lui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$, în M(0, 0).

19) Scrie ecuațiile semitangentelor la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\in(-\infty, 0] \\ \frac{1}{x+1}, & x>0\end{cases}, \text{ în } M(0, 1).$$

20) Scrie ecuațiile tangentelor sau semitangentelor la graficele funcțiilor în punctele de abscise specificate:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 2, x_0 = 1$;

b) $f: [3, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x-3},\ x_0=3$.

21) Scrie ecuația tangentei la curba $y=\frac{1}{2}x^2$, tangentă ce este perpendiculară pe dreapta $y = x + 1$.

Indicații.

Panta tangentei la curba dată în punctul $(x_0, y(x_0))$ este $y'(x_0)$.

Două drepte oblice sunt perpendiculare dacă și numai dacă produsul pantelor este -1.

3) *Funcția putere* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x)=n\cdot x^{n-1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in\mathbb{R}$ arbitrar, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\ldots+x\cdot x_0^{n-2}+x_0^{n-1}\right)=n\cdot x_0^{n-1}=f'(x_0).$$

4) *Funcția putere* $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{R}$ este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x)=r\cdot x^{r-1}}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in(0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^r-x_0^r}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x_0^r\left(\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^r-1\right)}{x_0\left(\dfrac{x}{x_0}-1\right)}=x_0^{r-1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^r-1}{\dfrac{x}{x_0}-1}.$$

Notăm $\dfrac{x}{x_0}=1+t$ și observăm că $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x}{x_0}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to 0}(1+t)=1$.

Deci $f'(x_0)=x_0^{r-1}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^r-1}{t}=x_0^{r-1}\cdot r$.

Observație.

Dacă $r\in\mathbb{Z}$, $r<0$, funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^r$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ și $f'(x)=r\cdot x^{r-1}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$.

5) *Funcția radical* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2n]{x}$, $n\in\mathbb{N}^*$, este derivabilă și $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{2n\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

Pentru $n=1$, $\boxed{(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$, $\forall x>0$.

Demonstrație. Se consideră în formula 4), $r=\dfrac{1}{2n}$.

Observație.

$\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sqrt[2n]{x}}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}=+\infty$, deci $\exists f'(0)=+\infty$.

6) *Funcția radical* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$, $n\in\mathbb{N}^*$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, $f':\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Reținem: $\boxed{(\sqrt[3]{x})'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Demonstrație.

Pentru $x>0$ se consideră $r=\dfrac{1}{2n+1}$ în formula 4). Pentru $x<0$ se va demonstra în paragraful următor.

Să calculăm derivatele unor funcții elementare.

22) Derivează funcțiile următoare:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7$;

b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=7$;

c) $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $f(x)=7$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\pi$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1001}$;

j) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$;

Indicație. $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'=(x^{-3})'$.

k) $f:\mathbb{R}^*\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\{x,x^2\}$;

l) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min\{x^3,0\}$.

23) Calculează derivata f' pentru următoarele funcții definite pe domeniile lor maxime de definiție și specifică $D_{f'}$ (domeniul de derivabilitate).

a) $f(x)=10$;

b) $f(x)=x^2$;

c) $f(x)=x^3$;

d) $f(x)=\sqrt[6]{x}$;

e) $f(x)=\sqrt[5]{x}$.

Verifică afirmațiile:

a) $D_f=\mathbb{R}$; $D_{f'}=\mathbb{R}$, $f'(x)=0$;

b) $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}$, $f'(x)=2x$;

c) $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2$;

d) $D_{f'}=(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$;

e) $D_f=\mathbb{R}$; $D_{f'}=\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

24) Calculează f' pentru funcțiile:

a) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$;

b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[4]{x}$;

c) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[8]{x}$.

Observație.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[2n+1]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}=+\infty,\ \text{deci}\ \exists f'(0)=+\infty.$$

7) *Funcția exponențială* $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$ cu $a>0$ și $a\neq 1$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $\boxed{(a^x)'=a^x\ln a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^{x_0}\cdot(a^{x-x_0}-1)}{x-x_0}=$

$$=a^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0}=a^{x_0}\cdot\ln a=f'(x_0).$$

Consecință. $(e^x)'=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

8) *Funcția logaritmică* $\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, cu $a>0$, $a\neq 1$ este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $\boxed{(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in(0,+\infty)$; atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\log_a x-\log_a x_0}{x-x_0}=$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\cdot\log_a\frac{x}{x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x_0\cdot\ln a}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{x_0}-1\right)}{\frac{x}{x_0}-1}=\frac{1}{x_0\ln a}=f'(x_0)$$

Consecință. $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$, $\forall x>0$.

9) *Funcția sinus*

$\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $\boxed{\sin'(x)=\cos x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos x_0$$

10) *Funcția cosinus*

$\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $\boxed{\cos'(x)=-\sin x,}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=$

$$=-\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\sin\frac{x+x_0}{2}=-\sin x_0$$

25) Calculează f' pentru funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$;

b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[9]{x}$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[7]{x}$.

26) Calculează derivata f' și specifică $D_{f'}$ (domeniul de derivabilitate) pentru:

a) $f(x)=\pi$;

b) $f(x)=x^5$;

c) $f(x)=x^{-7}$;

d) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$;

e) $f(x)=\sqrt{|x|}$;

f) $f(x)=|x|^3$.

27) Calculează f' pentru funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\pi^x$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

28) Calculează f' pentru funcțiile:

a) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2 x$;

b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg x$;

c) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.

29) Calculează derivatele funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln 2$.

30) Calculează derivatele funcțiilor în punctele specificate:

a) $f(x)=\sin x$, în $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

b) $f(x)=\cos x$, în $x_0=0$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determină derivatele laterale ale funcțiilor următoare, în punctele specificate:

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$, în $x_0 = -2$;

b) $f(x)=|x|$, în $x_0 = 0$;

c) $f(x)=\begin{cases}2x, x<0\\3x, x\geqslant 0\end{cases}$ în 0;

d) $f(x)=\begin{cases}2x-1; x<0\\x^2; \quad x\geqslant 0\end{cases}$, în $x_0 = 0$.

2. Determină $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f(x)=\begin{cases}\sin x+n, x\leqslant 0\\mx, \quad x>0\end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0 = 0$.

3. Arată că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\0, \quad x=0\end{cases}$ este derivabilă în origine.

4. Arată că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ nu este derivabilă în $x_0\in\mathbb{R}^*$, dar este derivabilă în 0.

5. Pentru funcțiile următoare schițează graficul, calculează derivatele laterale în punctele indicate și precizează tipul punctului (punct unghiular sau punct de întoarcere).

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-1|$, $x_0\in\{-1, 1\}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{x}; x\leqslant 0\\\sqrt{x}; \quad x>0\end{cases}$, $x_0 = 0$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\max\left\{e^x, \left(\frac{1}{e}\right)^x\right\}$, $x_0 = 0$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\min\left\{-x, \sqrt[3]{x}\right\}$, $x_0 = 0$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2, x\in(-\infty,0]\\\sqrt{x}, x\in(0,\infty)\end{cases}$, $x_0=0$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|\cdot(1+|x+1|)$, $x_0 = -1$.

6. Calculează în două moduri (cu definiția și cu formule) derivatele funcțiilor în punctele date:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; b) $f(x) = x^4$, $x_0 = 2$;

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0 = 3$; d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$;

e) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$; f) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$;

g) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; h) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

i) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$; j) $f(x) = \sin x$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

k) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

7. Scrie ecuațiile tangentelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = 5$, $x_0 = -2$;

b) $f(x) = 5$, $x_1 = 2$;

c) $f(x) = x$, $x_0 = 3$;

d) $f(x) = x$, $x_1 = -3$;

e) $f(x) = 2^x$, $x_0 = -1$;

f) $f(x) = 2^x$, $x_1 = 0$;

g) $f(x) = 2^x$, $x_2 = 1$;

h) $f(x) = \sin x$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$;

i) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

j) $f(x) = \cos x$, în $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

k) $f(x) = \cos x$, în $x_1 = \pi$.

8. Cercetează derivabilitatea următoarelor funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și află funcțiile derivate corespunzătoare:

a) $f(x)=\max\{x, x^2, x^3\}$;

b) $f(x)=\min\left\{1+x, \frac{1}{x}, 2x^2-x\right\}$;

c) $f(x)=\max\{|x-1|, |2x|\}$;

d) $f(x)=\begin{cases}x^3-x^2, x\in\mathbb{Q}\\x-1, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă în $x_0\in\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = |x - x_0|\cdot f(x)$. Arată că g este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f(x_0) = 0$. În acest caz, $g'(x_0)=0$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$. Arată că g este derivabilă în $x_0\in\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $f(x_0)\neq 0$ sau $f(x_0)=f'(x_0)=0$.

3. Operații cu funcții derivabile. Derivate de ordinul al doilea

Operații cu funcții derivabile

Operațiile algebrice cu funcții derivabile și compunerea funcțiilor derivabile conduc tot la funcții derivabile. Vom completa derivatele funcțiilor elementare din paragraful anterior.

Teoremă.
Fie funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$, derivabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$. Funcția $f + g$ este derivabilă în x_0 și $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Demonstrație. Să notăm $h = f + g$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) + g'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Consecințe.

♦ Dacă f și g sunt derivabile pe D, atunci $f + g$ este derivabilă pe D și vom scrie $\boxed{(f+g)' = f' + g'}$.

♦ Suma $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ a n funcții derivabile pe D este derivabilă pe D și $\boxed{(f_1 + f_2 + .. + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'}$.

EXEMPLE

1) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x + \sin x$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 2x + e^x + \cos x$.

2) Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \sqrt{x}$ este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Teoremă.
Fie o funcție $f : D \to \mathbb{R}$ derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ și $c \in \mathbb{R}$. Funcția $c \cdot f$ este derivabilă în x_0 și $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Demonstrație. Să notăm $h = c f$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0).$$

Consecințe.

♦ Dacă funcția f este derivabilă pe D și $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă pe D și $\boxed{(c \cdot f)' = c \cdot f'}$.

♦ Pentru $c = -1$ obținem $\boxed{(-f)' = -f'}$.

♦ Dacă f și g sunt funcții derivabile, atunci $f - g$ este funcție derivabilă și $\boxed{(f - g)' = f' - g'}$.

(Într-adevăr $f - g = f + (-g)$ și $(f - g)' = f' + (-g)' = f' - g'$)

EXEMPLE

1) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este derivabilă și $f'(x) = 2ax + b$.

2) $(3\sin x + 4\cos x + \ln x)' = 3\cos x - 4\sin x + \dfrac{1}{x}$.

Să calculăm derivatele unor funcții obținute prin operații algebrice cu funcții derivabile.

1) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru funcțiile:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \cos x$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$;
c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{x}$;
d) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[10]{x} + \cos x$;
e) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + e^x$.

2) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru funcțiile:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin x$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$;
c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[6]{x} + 3\sin x - \cos x$;
d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\ln x + x + \sqrt[5]{x}$.

3) Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$. Precizează domeniul maxim de definiție D_f, domeniul maxim de derivabilitate $D_{f'}$ și calculează f' pentru fiecare dintre funcțiile următoare:
a) $f(x) = \ln x + \sin x$;
b) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$;
c) $f(x) = \cos x + \sin x + e^x$;
d) $f(x) = x^2 + 5x + 3$;
e) $f(x) = \sin x + \ln x$;
f) $f(x) = \pi x^3 + \sin \dfrac{\pi}{6}$;
g) $f(x) = \pi^2 \cdot x^3 + \cos x$.

4) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru funcțiile:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot x^3$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$;
c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$;
d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$;
e) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x} \cdot \sin x$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \cos x$;
g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^7 \cdot \sin x \cdot e^x$.

Teoremă.

Fie funcțiile f, g: D $\to \mathbb{R}$ derivabile în $x_0 \in$ D $\cap$ D′.

Funcția $f \cdot g$: D $\to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și

$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Demonstrație.

Notăm $h = f \cdot g$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \in \mathbb{R}$ (am folosit continuitatea funcției g în x_0, g fiind prin ipoteză derivabilă).

Consecință.

Dacă f și g sunt funcții derivabile pe D, atunci funcția $f \cdot g$ este derivabilă pe D și $\boxed{(f \cdot g)' = f'g + fg'.}$ Prin inducție matematică se arată că produsul $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ a n funcții derivabile pe D este derivabil pe D și $\boxed{(f_1 f_2 \ldots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \ldots f_n,}$

adică $(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 f_3' \ldots f_n + \ldots$
$+ f_1 f_2 \ldots f_n'$.

EXEMPLU

Funcția g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot e^x$ este derivabilă și $g'(x) = 2x \cdot \sin x \cdot e^x + x^2 \cdot \cos x \cdot e^x + x^2 \sin x \cdot e^x$.

Teoremă.

Fie funcțiile f și g : D $\to \mathbb{R}$ derivabile în $x_0 \in$ D $\cap$ D′ și $g \neq 0$. Funcția $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Demonstrație. Fie $x \in$ D.

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) \cdot g(x_0) - g(x) \cdot f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} =$$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) - g(x) \cdot f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \to$$

$$\xrightarrow{x \to x_0} \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5) Calculează f' pentru funcțiile:

a) $f(x) = x^2 e^x + \sqrt{x}$;

b) $f(x) = \cos x \cdot \sin x + x^2 + \ln 2$;

c) $f(x) = \cos^2 x - x^2 + \pi$;

d) $f(x) = x \sin x + 3a^x + 7$;

e) $f(x) = x^2 \cos x - x^3 e^x + 7 \ln \pi$;

f) $f(x) = x^2 e^x \cos x + x \ln x + \lg e$;

g) $f(x) = (\ln 3) x^3 \cdot e^x \cdot \sin x \cdot \log_3 x$.

6) Dacă f, g : I $\to \mathbb{R}$ sunt derivabile și g este funcție constantă ($g = c$), ce devine formula $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$? Dar $\left(\dfrac{g}{f}\right)' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2}$ $(c \neq 0)$.

7) Calculează f' specificând domeniul maxim de derivabilitate, pentru funcțiile:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{2}$;

c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$;

d) $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x^x$;

e) $f(x) = \cos^2 x$;

f) $f(x) = (\sqrt{x} + 3) \cdot e^x$;

g) $f(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{4x}$;

h) $f(x) = \sin 2x$.

8) Calculează f', specificând domeniul maxim de derivabilitate pentru funcțiile:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-3}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$;

f) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

Consecință.

1) Dacă f și g sunt derivabile pe D și $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$,

atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe D și $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$

2) Dacă g este derivabilă pe D și $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, atunci

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$$

Exerciții rezolvate.

1) Funcția $\text{tg}: \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ este derivabilă și $\text{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Demonstrație. $(\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Observăm că $(\text{tg}x)' = 1 + \text{tg}^2 x$.

2) Funcția $\text{ctg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, este derivabilă și $\text{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Demonstrație. $(\text{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$

$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Observăm că $(\text{ctg}x)' = -1 - \text{ctg}^2 x$.

$$\boxed{(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \qquad \boxed{(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Teoremă. ***Derivabilitatea funcției compuse***

Fie funcțiile $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$ și punctele $x_0 \in D \cap D'$, $y_0 = f(x_0) \in E \cap E'$. Dacă f este derivabilă în x_0 și g este derivabilă în y_0, atunci funcția $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Demonstrație.

Din g derivabilă în y_0 rezultă că există

$\lim\limits_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) \in \mathbb{R}$. Definim funcția $\alpha: E \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0), & y \neq y_0 \\ 0, & y = y_0 \end{cases}. \text{ Atunci}$$

g) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

h) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$;

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$:

j) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$;

k) $f(x) = \frac{e^x}{x \ln x}$;

l) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

m) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

n) $f(x) = \frac{(x^2 + x + 1)\ln x}{x}$.

9) Calculează f' pentru funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 5x$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, , $f(x) = \sin x^3$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)^{71}$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$;

f) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}^2 x$;

g) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ctg}^9 x$;

h) $f: \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}x^2$;

i) $f: \left(0, \sqrt[3]{\pi}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ctg}x^3$;

j) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\sin x)$;

k) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\cos x)$;

l) $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$;

m) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$;

n) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x}$;

o) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

$g(y)-g(y_0)=g'(y_0)\cdot(y-y_0)+\alpha(y)\cdot(y-y_0),\ \forall y\in E-\{y_0\}$
și cum $\lim\limits_{y\to y_0}\alpha(y)=0=\alpha(y_0)$, rezultă că α este continuă și nulă în y_0, deci relația se verifică și pentru $y=y_0$:
$g(y)-g(y_0)=g'(y_0)\cdot(y-y_0)+\alpha(y)\cdot(y-y_0),\ \forall y\in E.$

Fie $x\in D$, $x\neq x_0$; atunci pentru $y=f(x)$ avem:

$$g(f(x))-g(f(x_0))=g'(f(x_0))\cdot(f(x)-f(x_0))+$$

$$+\alpha\big(f(x)\big)\big(f(x)-f(x_0)\big) \text{ sau } \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=g'(f(x_0))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\alpha(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ (1).$$

Cum f este derivabilă în x_0 rezultă că f este continuă în x_0, iar din α continuă în $y_0=f(x_0)$, rezultă că $\alpha\circ f$ este continuă în x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\big(f(x)\big)=0$. Trecând la limită în relația (1) obținem:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0)+0\cdot f'(x_0)=$$

$=g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0)$, de unde rezultă concluzia teoremei.

Consecință.

Dacă $f:D\to E$ și $g:E\to\mathbb{R}$ sunt derivabile, atunci funcția compusă $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ este derivabilă și

$$\boxed{(g\circ f)'(x)=g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x),\ \forall x\in D.}$$

Exerciții rezolvate.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ este derivabilă și $f'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

Soluție.

Fie $u,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=x^2+1$ și $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

Obținem $f=g\circ u$, g, u derivabile și $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $u'(x)=2x$.

Atunci $f'(x)=g'(u(x))\cdot u'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\cdot 2x=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

2) Fie I, J, K intervale ale dreptei reale și $f:I\to J$, $g:J\to K$, $h:K\to\mathbb{R}$ funcții derivabile; atunci funcția $F=h\circ g\circ f$ este derivabilă (pe I) și $F'(x)=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Soluție.

$F'(x)=((h\circ g)\circ f)'(x)=(h\circ g)'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)=$
$=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x).$

3) Funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\sin^3\sqrt[5]{x}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$. Notăm $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=x^3$. Observăm că

$F=h\circ g\circ f$; $F'(x)=3\sin^2\sqrt[5]{x}\cdot\cos\sqrt[5]{x}\cdot\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

10) Pune în evidență greșeala din rezolvarea exercițiului următor.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6$. Demonstrează că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și determină derivata funcției.

Soluție.

Metoda 1. Scriem $f(x)=(x^3)^2$ și notăm $u(x)=x^3$, iar $g(u)=u^2$; atunci $f'(x)=g'(u)=2u=2x^3$.

Metoda 2. Observăm că $f=g\circ u$ și $g'(u(x))\cdot u'(x)=2u(x)\cdot u'(x)=$
$=2x^3\cdot 3x^2=6x^5=f'(x)$.

11) Fie funcțiile $f:E\to\mathbb{R}$ (E fiind domeniul maxim pe care f este derivabilă). Precizează E și calculează f' pentru funcțiile următoare:

a) $f(x)=\sin x^2$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\ln\sqrt{x}$;

c) $f(x)=\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

d) $f(x)=\sin(\ln x)$;

e) $f(x)=\sin^3(3x)+\ln 2x$;

f) $f(x)=\cos 2x$;

g) $f(x)=\cos\sqrt{x}+\sin(\ln x)$;

h) $f(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$;

i) $f(x)=\sqrt{x^2+\ln x}$;

j) $f(x)=\sqrt[5]{\sin 2}$;

k) $f(x)=\sqrt{\ln x}$;

l) $f(x)=3^x+x^3+\ln\pi$.

12) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

b) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

c) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

În practică, notăm $u=\sqrt[5]{x}$ și

$$F'(x)=(\sin^3 u)'=3\sin^2 u\cdot\cos u\cdot u'=3\sin^2\sqrt[5]{x}\cdot\cos\sqrt[5]{x}\cdot\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

Teoremă. ***Derivabilitatea funcției inverse***

Fie I, J $\subset\mathbb{R}$ două intervale și $f:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ o funcție strict monotonă cu $f(\mathrm{I})=\mathrm{J}$. Dacă f este derivabilă în $x_0\in\mathrm{I}$ și $f'(x_0)\neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}:\mathrm{J}\to\mathrm{I}$ este derivabilă în $y_0=f(x_0)$ și $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Demonstrație.

Din f strict monotonă rezultă că f este injectivă. Cum $f(\mathrm{I})=\mathrm{J}$, rezultă că f este surjectivă. Am obținut f bijectivă, deci inversabilă. Inversa $f^{-1}:\mathrm{J}\to\mathrm{I}$ este strict monotonă, de aceeași monotonie cu f. Aplicând teorema de continuitate a funcției inverse rezultă că f și f^{-1} sunt continue.

Fie $y_n\in\mathrm{J}$, $y_n\neq y_0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$; f fiind bijectivă, rezultă că există $x_n\in\mathrm{I}$ cu $f(x_n)=y_n\Leftrightarrow x_n=f^{-1}(y_n)$, $\forall\, n\geqslant 1$. Dacă $\exists\, n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n=x_0$, atunci $f(x_n)=y_n=f(x_0)=y_0$, contradicție. Deci $x_n\neq x_0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Cum $y_n\xrightarrow{n}y_0$ și f^{-1} este funcție continuă, rezultă $f^{-1}(y_n)\xrightarrow{n}f^{-1}(y_0)$, adică $x_n\xrightarrow{n}x_0$.

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0}=\frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)}=\frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}}\xrightarrow{n}\frac{1}{f'(x_0)}\in\mathbb{R}.$$

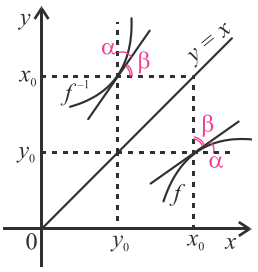
Deci f^{-1} este derivabilă în y_0 și $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Remarcă. $(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Consecință.

Dacă $f:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ este strict monotonă și derivabilă, I interval, atunci $f(\mathrm{I})=\mathrm{J}$ este interval; dacă, în plus, $f'(x)\neq 0$, $\forall\, x\in\mathrm{I}$, atunci $f^{-1}:\mathrm{J}\to\mathrm{I}$ este derivabilă și

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(y)},\ \forall y\in\mathrm{J}.$$



Interpretare geometrică

Graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare.

$f(x_0)=y_0\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(y_0)$, adică $(x_0,y_0)\in G_f\Leftrightarrow(y_0,x_0)\in G_{f^{-1}}$;

f derivabilă în x_0 cu $f'(x_0)\neq 0$ înseamnă că graficul funcției f admite în punctul (x_0,y_0) tangentă de pantă $\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0)$.

13) Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=2^x$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_2 x$;

a) Trasează în același reper cartezian graficele funcțiilor f și g.

b) Calculează $f'(2)$ și $g'(4)$.

c) Arată că $g=f^{-1}$.

d) Verifică egalitatea $(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(2)}$.

14) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$. Arată că:

a) f este strict crescătoare;

b) $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$;

c) Determină f^{-1}.

d) Verifică $(f^{-1})'(5)=\dfrac{1}{2}$.

Indicație. f este strict crescătoare, deci f injectivă. Surjectivitatea lui f o putem demonstra în două moduri:

I. fie $y\in\mathbb{R}$, $x=\dfrac{y-3}{2}\in\mathbb{R}$ și $f(x)=y$; atunci $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

II. f este continuă, rezultă că f are proprietatea Darboux; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, deci $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

În concluzie, f este bijectivă și $f^{-1}(y)=\dfrac{y-3}{2}$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$.

15) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x+1$. Arată că:

a) f este strict crescătoare;

b) f este bijectivă;

c) f^{-1} este derivabilă;

d) $(f^{-1})(y)>0$, $\forall y\in\mathbb{R}$;

e) $(f^{-1})(1)=\dfrac{1}{2}$.

Rezolvare. a) Deoarece $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=$

$$=\frac{x_1^3+2x_1+1-x_2^3-2x_2-1}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+2)}{x_1-x_2}=$$

$$=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+2>0,\ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\neq x_2$$

f^{-1} este derivabilă în y_0 cu $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}\neq 0$, înseamnă că graficul funcției f^{-1} admite în punctul (y_0, x_0) tangentă de pantă $\text{tg}\beta=\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Deci $\text{tg}\beta=\dfrac{1}{\text{tg}\alpha}$, adică $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercițiu rezolvat.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3-6x+3$. Arată că:

a) f este strict descrescătoare;

b) $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$;

c) $(f^{-1})'(-4)=-\dfrac{1}{9}$.

Soluție.

a) $g(x)=-x^3$ și $h(x)=-6x+3$ sunt strict descrescătoare (se demonstrează cu definiția). Atunci $f=g+h$ este strict descrescătoare, deci f injectivă;

b) f continuă (ca funcție elementară), rezultă că f are proprietatea Darboux; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, deci $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Altfel, fie $y\in\mathbb{R}$. Ecuația $f(x)=y_0$ are cel puțin o soluție deoarece orice polinom de grad impar $f-y_0$ are cel puțin o soluție reală.

c) f bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă. Calculul lui f^{-1} este complicat (se recurge la rezolvarea ecuației de gradul al III-lea – formulele lui Cardano). $f'(x)=-3x^2-6$; $y_0=-4$, $x_0=1$; $f'(1)=-9\neq 0$. Aplicând teorema precedentă obținem $(f^{-1})'(-4)=\dfrac{1}{f'(1)}=-\dfrac{1}{9}$.

rezultă că funcția f este strict crescătoare (sau: f este sumă de funcții strict crescătoare, deci este funcție strict crescătoare).

b) Din $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ și f continuă rezultă $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Cum, din a), f este și injectivă, funcția f este bijectivă.

c) Din a) și b) funcția f este inversabilă. (1) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)=3x^2+2$, deci $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (2) Din (1) și (2) rezultă

$\exists\,(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, $\forall y\in\mathbb{R}$.

d) $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{3(f^{-1}(y))^2+2}>0$, $\forall y\in\mathbb{R}$;

e) $f^{-1}(1)=y\Leftrightarrow f(f^{-1}(y))=f(y)$, de unde $1=y^3+2y+1$, deci $y=0$;

$(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{3(f^{-1}(1))^2+2}=\dfrac{1}{2}$.

16) Arată că următoarele funcții sunt inversabile și calculează $(f^{-1})'$ în x_0:

a) $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=2^x+3^x$, $x_0\in\{2, 13\}$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$, $x_0\in\{1, e+1\}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$, $x_0\in\left\{1,\dfrac{1-e}{e}\right\}$.

Derivarea inverselor funcțiilor trigonometrice

♦ Funcția $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ este derivabilă pe intervalul deschis $(-1, 1)$ și

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Soluție.

$g:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $g(x)=\sin x$ este derivabilă și $g'(x)=\cos x$; g este strict crescătoare și surjectivă; $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $g'(x)\neq 0$. Fie $\sin x=y$, $\arcsin=g^{-1}$; $(g^{-1})'(y)=f'(y)=\dfrac{1}{g'(x)}=\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, deoarece $\cos x>0$, $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

♦ Funcția $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ este derivabilă pe intervalul $(-1,\ 1)$ și

$$\boxed{(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}},\ \forall\, x\in(-1,1).$$

Soluție.

$g:[0,\ \pi]\to[-1,\ 1]$, $g(x)=\cos x$ este derivabilă și $g'(x)=-\sin x$; g este strict descrescătoare și surjectivă; $\forall\, x\in(0,\ \pi)$, $g'(x)\neq 0$. Notăm $y=\cos x$; $\arccos=g^{-1}$; $(g^{-1})'(y)=f'(y)=\dfrac{1}{g'(x)}=-\dfrac{1}{\sin x}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, deoarece $\sin x>0,\ \forall x\in(0,\pi)$.

♦ Funcția $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$\boxed{(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{x^2+1}},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Soluție.

$g:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{tg}x$ este derivabilă și $g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}>0$. Deci g este strict crescătoare și $\operatorname{Im}g=\mathbb{R}$.

Notăm $\operatorname{tg}x=y$; $f=g^{-1}$; $(g^{-1})'(y)=f'(y)=\dfrac{1}{g'(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{1}{1+y^2}$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$.

♦ Funcția $\operatorname{arcctg}:\ \mathbb{R}\to(0,\ \pi)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{x^2+1}},\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Soluție.

$g:(0,\ \pi)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{ctg}x$ este derivabilă și $g'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\neq 0$, $\forall\, x\in(0,\ \pi)$; g este strict descrescătoare și $\operatorname{Im}g=\mathbb{R}$. Notăm $\operatorname{ctg}x=y$; $f=g^{-1}$; $(g^{-1})'(y)=f'(y)=\dfrac{1}{g'(x)}=-\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=-\dfrac{1}{1+y^2}$, $\forall y\in\mathbb{R}$.

Exercițiu rezolvat.

Dacă $f:D\to(0,\ \infty)$ este derivabilă, este uneori convenabil să logaritmăm și apoi să derivăm. Astfel, pentru $y=f(x)$, avem $\ln y=\ln f(x)$ și $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

De exemplu, considerăm funcția $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{\sin x}\cdot\sqrt[5]{\cos x}}{2^x\cdot\operatorname{tg}x}$. Se cere f'.

Soluție.

$f(x)>0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Logaritmăm: $\ln f(x)=\dfrac{1}{3}\ln(\sin x)+\dfrac{1}{5}\ln(\cos x)-x\ln 2-\ln(\operatorname{tg}x)$.

Derivăm: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}-\ln 2-\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}x}$, deci $f'(x)=f(x)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\cdot\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}x-\ln 2-\dfrac{1}{\sin x\cos x}\right)$.

Ca o sinteză a formulelor obținute, vom prezenta următorul ***tabel al derivatelor funcțiilor elementare***.

f	D_f	f'	$D_{f'}$	Observații
c (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$f'_d(0) = +\infty$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	$a = e \Rightarrow (e^x)' = e^x$
$\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$(0,\infty)$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(0,\infty)$	
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{tg}\,x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	
$\mathrm{ctg}\,x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$f'_d(-1) = +\infty$, $f'_s(1) = +\infty$
$\mathrm{arctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$f'_d(-1) = -\infty$, $f'_s(1) = -\infty$
$\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', n \in \mathbb{N}^*$; $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \alpha \in \mathbb{R}^*$; $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', u > 0$;

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0, a \neq 0$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$; $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$; $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

$(\mathrm{tg}\,u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u', \cos u \neq 0$; $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u', \sin u \neq 0$; $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u \in (-1, 1)$;

$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u \in (-1, 1)$; $(\mathrm{arctg}\,u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Derivate de ordinul al doilea

În cele ce urmează, considerăm $D \subset \mathbb{R}$.

Definiție.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$. *Funcția f* este *derivabilă de două ori* în x_0 (respectiv *are derivată de ordinul al doilea* în x_0) dacă:

1) f este derivabilă pe o vecinătate V a lui x_0.

2) funcția derivată $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 (respectiv are derivată în x_0), adică există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$).

În acest caz, limita se notează cu $f''(x_0)$ (sau $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ sau $D^2 f(x_0)$) și se numește *derivata a doua* (sau *derivata de ordinul al doilea*) *a funcției f în punctul* x_0.

Observație.

$f'' = (f')'$, $f'' : D_{f''} \to \mathbb{R}$, unde $D_{f''}$ este domeniul de derivabilitate al funcției $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$.

EXEMPLU

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^3 + 2x$,
derivata de ordinul 1 este $f'(x) = 15x^2 + 2$,
derivata de ordinul al 2-lea este $f''(x) = 30x$.

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$,
derivata de ordinul 1 este $g'(x) = \cos x$,
derivata de ordinul al 2-lea este $g''(x) = -\sin x$.

În mod asemănător, se definește prin recurență derivata de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ a funcției $f : D \to \mathbb{R}$ și se va nota $f^{(n)}$.

$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Convenție.

Derivata de ordinul 0 a funcției f coincide cu f, adică $f^{(0)} = f$.

17) Calculează derivata de ordinul al doilea pentru următoarele funcții și stabilește $D_{f''}$.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$;

d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$;

e) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

g) $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$ și $a \neq 1$;

h) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

i) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$;

j) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$;

k) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$;

l) $f : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$;

m) $f : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right]$, $f(x) = \arcsin x$;

n) $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$;

o) $f : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

p) $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculează derivatele următoarelor funcții, specificând mulțimile maxime de definiție ale funcțiilor f și f':

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$; b) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;

c) $f(x) = x \cdot \sin x$; d) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$; e) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

f) $f(x) = e^x \cdot \cos x$; g) $f(x) = \dfrac{\ln a}{x}$, unde $a > 0$;

h) $f(x) = x^5 \ln x$; i) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; j) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

k) $f(x) = \dfrac{\sin x - x \cdot \cos x}{\cos x + x \cdot \sin x}$; l) $f(x) = x \cdot 2^x$;

m) $f(x) = 3^x + x \cdot 6^x + 2^x$; n) $f(x) = x^2 + y^2$;

o) $f(y) = x^2 + y^2$; p) $f(z) = x^2 + y^2$;

q) $f(x) = x \cdot \mathrm{ctg} x$; r) $f(t) = 2t \cdot \sin t - (t^2 - 2) \cdot \cos t$;

s) $f(x) = \mathrm{tg} x \cdot \mathrm{ctg} x$; t) $f(x) = \ln x \cdot \log_a x - \ln a \cdot \log_a x$.

2. Calculează derivatele funcției f (specificând domeniile maxime de definiție ale funcțiilor f și f'):

a) $f(x) = (2x + 3)^{70}$; b) $f(x) = (ax^2 + bx + c)^{31}$;

c) $f(x) = (x^3 - x)^7$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$;

e) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; f) $f(x) = \sin 3x$;

g) $f(x) = \sin^3 x$; h) $f(x) = \cos 5x$;

i) $f(x) = \cos^7 x$; j) $f(x) = \mathrm{tg}^3 2x$;

k) $f(x) = \mathrm{ctg}^{10} 3x$; l) $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$;

m) $f(x) = \cos\sqrt{x}$; n) $f(x) = \sin(\sin x)$;

o) $f(x) = \sqrt{x \cdot e^x + x}$; p) $f(x) = e^{x^2}$.

3. Calculează derivatele următoarelor funcții, pe domeniile maxime de derivabilitate:

a) $y = e^{ax} \cdot \cos bx$; b) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$;

c) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; d) $y = \ln \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

e) $y = \ln\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$; f) $y = \mathrm{tg} x + \mathrm{tg}^3 x + \dfrac{3}{5}\mathrm{tg}^5 x + \dfrac{1}{7}\mathrm{tg}^7 x$.

4. Calculează derivatele următoarelor funcții în punctele indicate.

a) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 \in \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$;

b) $f(x) = \arccos x$, $x_0 \in \left\{-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$;

c) $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$, $x_0 \in \left\{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$;

d) $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$, $x_0 \in \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1, \sqrt{3}\right\}$.

5. Dacă $I \subset \mathbb{R}$ și $u, v : I \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile și $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția u^v este derivabilă și $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

6. Calculează derivatele funcțiilor: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ și $g : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

7. Dedu formula sumei $S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ din egalitatea:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

8. a) Demonstrează formulele:

$$\sin x + \sin(x + h) + \sin(x + 2h) + \ldots + \sin(x + (n-1)h) = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{(n-1)h}{2}\right) \text{ și}$$

$$\cos x + \cos(x + h) + \cos(x + 2h) + \ldots + \cos(x + (n-1)h) = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{(n-1)h}{2}\right);$$

b) Cu identitatea

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{n+1}{2}x,$$

calculează $S = \sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx$.

9. Demonstrează că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ este derivabilă. Calculează f'.

10. Arată că funcția $f : (0, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}^3\dfrac{\pi x}{6}$ este derivabilă. Calculează $f'(2)$.

11. Calculează:

a) $f(0) + x \cdot f'(0)$ pentru funcția $f(x) = e^{-x}$;

b) $f(3) + (x - 3) \cdot f'(3)$ pentru funcția $f(x) = \sqrt{x + 1}$;

c) $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ pentru funcțiile $f(x) = \mathrm{tg} x$ și $g(x) = \ln(1 - x)$.

12. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f(x)$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Arată că f este derivabilă în x_0.

13. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă și periodică cu perioada T, atunci f' are perioada T. Reciproca nu este adevărată.

14. a) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare (respectiv crescătoare) și derivabilă, atunci $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) \geqslant 0$), $\forall\, x \in I$.

b) Dacă $g : I \to \mathbb{R}$ este strict descrescătoare (respectiv descrescătoare) și derivabilă, atunci $g'(x) < 0$ (respectiv $g'(x) \leqslant 0$), $\forall\, x \in I$.

15. Derivează funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

16. Studiază continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{x, x^2\}$.

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Arată că:
a) dacă f este pară, atunci f' este impară;
b) dacă f este impară, atunci f' este pară.

18. Fie $f : \mathbb{R} \to (1, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{4^x} + \dfrac{1}{2^x} + 1$.
a) Arată că f este bijectivă.
b) Calculează $(f^{-1})'(3)$.

19. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Arată că:
a) f este strict crescătoare; b) f este bijectivă;
c) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{2}$; d) $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{5}$; e) $(f^{-1})'(y) > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

20. Arată că :

a) $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ verifică $x \cdot y' = y \cdot (y \cdot \ln x - 1)$;

b) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ verifică $x \cdot y' = (1 - x^2) \cdot y$;

c) $y = x \cdot e^{-x}$ verifică $x \cdot y' = (1 - x) \cdot y$.

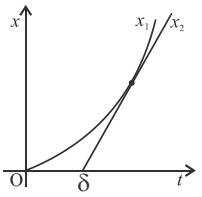
21. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, distincte două câte două. Arată că:

a) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x - x_n}$,
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;

b) $f''(x) \cdot f(x) < \left(f'(x)\right)^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Pentru mișcarea rectilinie pe axa Ox, cunoașterea ecuației de mișcare $x(t)$ oferă posibilitatea determinării ecuațiilor vitezei $v(t) = x'(t)$ și accelerației $a(t) = v'(t) = x''(t)$, cu toate consecințele din interpretarea geometrică a derivatei.

22. Un mobil pleacă dintr-un punct cu o viteză inițială $v_{01} = 5$m/s și accelerația $a_1 = 2$m/s^2. După un interval de timp δ, din același punct pleacă un alt mobil într-o mișcare uniformă, cu viteza $v_{02} = 20$m/s.
a) Pentru ce δ mobilele se întâlnesc doar o dată?
b) Interpretează geometric faptul că, la momentul întâlnirii, mobilele au aceeași viteză. (Ecuația mișcării uniform accelerate: $x = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$. Ecuația mișcării uniforme: $x = vt$).



23. Dintr-un punct pleacă două mobile cu ecuațiile de mișcare $x_1(t) = 5t^2 + 2t$, $x_2(t) = t^3 + 2t^2 + 4t$, unde x este măsurat în metri și t în secunde. Determină:
a) momentele de întâlnire;
b) ecuațiile vitezelor și accelerațiilor celor două mobile;
c) vitezele și accelerațiile mobilelor în momentele de întâlnire;
d) momentele în care vitezele și respectiv accelerațiile mobilelor sunt egale.

24. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculează f'' pentru funcțiile:
a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; c) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.

25. Pentru $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin 2x$, calculează g''.

26. Pentru $h : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{tg} x$, calculează h' și h''.

27. Pentru $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 1)$, calculează f''.

28. Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$, calculează f''.

29. Calculează derivatele de ordinul al 2-lea pentru funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare:
a) $f(x) = x^3 + 3x + 1$; b) $f(x) = 3^x + x^2$.

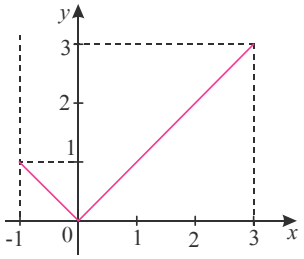
30. Calculează derivata de ordin n, $n \in \mathbb{N}$ a funcției, pe domeniul ei maxim de definiție:
a) $f(x) = x^4$; b) $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}^*$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$, $a \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = \ln(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$;
e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x - 1}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$.

4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile pe un interval

♦ ***Teorema lui Fermat***

(Pierre de Fermat, 1601 – 1665, matematician francez, precursor al calculului diferențial al geometriei analitice, al teoriei numerelor și al calculului probabilităților).

Fie funcția $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$; $\text{Im} f = [0, 3]$; $y_0 = 0$ este minimul funcției obținut pentru $x_0 = 0$, iar $y_1 = 3$ este maximul funcției obținut pentru $x_1 = 3$.



Definiție.

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție. Punctul $x_0 \in D$ se numește *punct de minim absolut* (*global*) al funcției f dacă: $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in D$.

Punctul $x_0 \in D$ se numește *punct de maxim absolut* (sau *global*) al funcției f dacă: $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall\, x \in D$.

EXEMPLU

1) Funcția $f : (-2, 4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este mărginită, $x = 0$ este punct de minim global, $f(0) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in (-2, 4)$, dar nu are puncte de maxim global.

2) Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$ admite o infinitate de puncte de minim global $\left(x_k = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$ și o infinitate de puncte de maxim global $\left(x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Definiție.

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$.

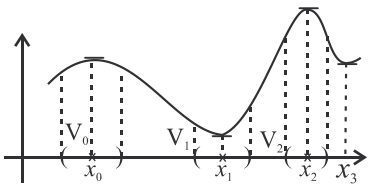
Punctul x_0 se numește *punct de maxim relativ* (sau *local*) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall\, x \in V \cap D$; $f(x_0)$ se numește maxim relativ al funcției.

Punctul x_0 se numește *punct de minim relativ* (sau *local*) al funcției f, dacă există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in V \cap D$; $f(x_0)$ se numește *minim relativ al funcției*.

Punctul $x_0 \in D$ este *punct de extrem relativ* (sau *local*) al lui f dacă este punct de minim sau de maxim relativ (sau local).

EXEMPLU

Fie funcția ce are graficul trasat în figura alăturată; x_0 și x_2 sunt puncte de maxim local, iar x_1 și x_3 sunt puncte de minim local.



1) Arată că funcția:

a) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ are punct de minim global, dar nu are punct de maxim;

b) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ are punct de maxim global, dar nu are punct de minim absolut.

2) Ce puncte de minim sau maxim global au următoarele funcții definite pe domeniul maxim?

a) $f(x) = \text{tg}\, x$;

b) $f(x) = x^4 - 1$;

c) $f(x) = \cos x$;

d) $f(x) = 1 - \cos x$;

e) $f(x) = x + \cos x$;

f) $f(x) = 3x^2 - x^4 - 2$.

3) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 2 & , x = 0 \\ x + a & , x > 0 \end{cases}.$$

Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x = 0$ este punct de maxim local al lui f.

4) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$. Arată că $x = 0$ este punct de minim local (și global). Observă că $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța I, deci f nu e derivabilă în $x = 0$.

5) Determină extremele funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 2x$;

b) $f(x) = \min\{x, 1 - x\}$;

c) $f(x) = \max\{-x, -x^2\}$;

d) $f(x) = |x^2 - 1|$;

e) $f(x) = \cos x$;

f) $f(x) = a \sin x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ constant.

Observație.

♦ Un punct de maxim relativ nu este în mod necesar un punct de maxim absolut (în care funcția are cea mai mare valoare pe domeniul D); un punct de maxim absolut este și punct de maxim relativ.

♦ Un punct de minim relativ nu este în mod necesar un punct de minim absolut (în care funcția are cea mai mică valoare pe domeniul D); un punct de minim absolut este în același timp și un punct de minim relativ.

♦ Este posibil ca un minim (relativ) al funcției să fie mai mare decât un maxim (relativ) al funcției.

Următoarea teoremă arată legătura între punctele de extrem ale unei funcții derivabile și zerourile derivatei întâi.

Teorema lui Fermat.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă într-un punct de extrem local x_0 din interiorul intervalului I ($x_0 \in I$ și x_0 nu este capăt al intervalului); atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație.

Presupunem că x_0 este punct de minim local.

Rezultă că există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ pentru care $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall\ x \in I \cap V$.

Fie $x \in I \cap V, x < x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$, deci

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 .$$

Fie $x' \in I \cap V, x' > x_0$, $\dfrac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} \geqslant 0$, deci

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} \geqslant 0 .$$ Rezultă $f'(x_0) = 0$.

Interpretare geometrică

Teorema lui Fermat arată că, dacă $f : I \to \mathbb{R}$ e derivabila și x_0 e un punct de extrem relativ din interiorul intervalului I, atunci tangenta la graficul funcției f dusă în punctul de abscisă x_0 are direcția axei Ox.

EXEMPLU

Funcția $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ admite punctul $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ punct de maxim local; f fiind derivabilă, aplicând teorema lui Fermat rezultă $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, adică $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Observații.

♦ Reciproca teoremei nu este în general adevărată.

Exemplu.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ are $f'(0) = 0$, dar 0 nu e punct de extrem pentru f (f este crescătoare).

6) a) Arată că, dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $a^x + b^x + c^x \geqslant 3$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, atunci $a \cdot b \cdot c = 1$.

Indicație.

Definim funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b^x + c^x - 3$; $x_0 = 0$ este punct de minim absolut, deci este evident și un punct de extrem local din interiorul intervalului $\mathbb{R}$, iar f este derivabilă. Aplicăm teorema lui Fermat și rezultă $f'(0) = 0$; $\ln a + \ln b + \ln c = 0$; $abc = 1$.

b) Determină $a \in \mathbb{R}$ dacă $15^x + 2^x \geqslant 3^x + a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Arată că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$ și $a^x + b^x \geqslant c^x + d^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a \cdot b = c \cdot d$.

d) Arată că, dacă $a > 0, a \neq 1$ și $a^x \geqslant x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a = e$.

7) Determină punctele critice pentru funcțiile $f : D_{f'} \to \mathbb{R}$ următoare ($D_{f'}$ este domeniu de derivabilitate al funcției f).

a) $f(x) = x^3 - 27x$; b) $f(x) = x^2 - x$;

c) $f(x) = 2x^2 - \ln x$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

e) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$; f) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$;

g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; h) $f(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$;

i) $f(x) = x + \sin x$; j) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x}$;

k) $f(x) = x - \arcsin x$; l) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$.

Indicații.

a) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3(x^2 - 9)$;

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$;

c) $D_f = D_{f'} = (0, \infty)$; $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = -\dfrac{1}{2} \notin D_{f'}$ sau $x = \dfrac{1}{2} \in D_f$;

d) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

8) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care se anulează în punctele $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Arată că f' se anulează cel puțin în $n - 1$ puncte.

♦ Dacă x_0 nu e punct interior lui I, teorema lui Fermat nu are loc.

Exemplu. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ admite $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$ puncte de extrem, dar $f'(0) = f'(1) = 1$.

Definiție.

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I, atunci punctele $\alpha \in I$ pentru care $f'(\alpha) = 0$ se numesc *puncte critice ale lui f pe* I.

Observație. Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local se găsesc printre punctele critice.

♦ Teorema lui Rolle

(Michel Rolle, 1652 – 1719, matematician francez).

Teorema lui Rolle.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

1) f este continuă pe $[a, b]$.
2) f este derivabilă pe (a, b)
3) $f(a) = f(b)$.

Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrație.

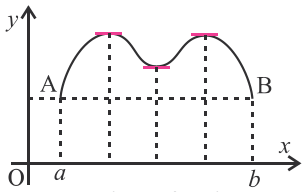
Conform teoremei lui Weierstrass, f fiind continuă pe intervalul $[a, b]$ rezultă că f este mărginită și își atinge marginile. Fie $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leqslant M$ și $\exists x_m, x_M \in [a, b]$, $m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$.

Dacă $m = M$ atunci $f(x) = m$, $\forall x \in [a, b]$, deci $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ și teorema este evident demonstrată în acest caz.

Dacă $m < M$, pentru $x_m = a$ (analog dacă $x_m = b$) rezultă $f(a) = m < M = f(x_M)$, deci $x_M \in (a, b)$ și conform teoremei lui Fermat rezultă $f'(x_M) = 0$, deci luăm $c = x_M$. Pentru $x_m \in (a, b)$, aplicăm teorema lui Fermat și $f'(x_m) = 0$, deci luăm $c = x_m$.

Interpretare geometrică

Fie $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$; cum $f(a) = f(b)$ rezultă $AB \parallel Ox$. Dacă graficul funcției f admite tangentă în orice punct din (a, b) și coarda $[AB]$ este orizontală, atunci există cel puțin un punct al graficului în care tangenta are direcția axei Ox.



Exerciții rezolvate.

1) Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x + 1$. f fiind elementară, rezultă: a) f continuă pe $[0, 1]$; b) f derivabilă pe $(0, 1)$; c) $f(0) = f(1) = 1$.

Din teorema lui Rolle, există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Într-adevăr, $f'(c) = 0$, $3c^2 - 1 = 0$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1)$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin (0,1)$

Indicație.

Aplică teorema lui Rolle restricției funcției f la intervalele $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, ..., $[a_{n-1}, a_n]$.

9) Aplică teorema lui Rolle funcției $f : [3, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - x)(5 - x)$.

10) Studiază aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile:

a) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$

b) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$

c) $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, x \in [-1, 0) \\ 1-x, x \in (0, 1] \end{cases}$

Indicație.

a) Studiază derivabilitatea funcției f în $x = 1$.

c) Studiază derivabilitatea funcției f în $x = 0$.

11) Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 4, & x \in [-1, 0] \\ 3x^2 + bx + 4, & x \in [0, 1] \end{cases}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Determină valorile parametrilor a și b pentru care f verifică ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$.

Indicație.

i) $f(-1) = f(1)$ și f este derivabilă pe $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

ii) $f'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{x^2 + ax}{x} = a$

$f'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{3x^2 + bx}{x} = b.$

Funcția f este derivabilă în $x = 0$ dacă și numai dacă $a = b$. Din i) și ii), f verifică ipotezele teoremei lui Rolle dacă $a = b$.

12) Arată că ecuația

$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + ... + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$

are cel puțin o soluție în intervalul $(-1, 1)$ dacă are loc relația:

$$\frac{a_0}{2n+1} + \frac{a_2}{2n-1} + \frac{a_4}{2n-3} + ... + \frac{a_{2n}}{1} = 0.$$

2) Fie $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, $a_4 \neq 0$ cu proprietatea: $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\frac{a_4}{5}=0$. Arată că ecuația: $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ are cel puțin o soluție reală.

Soluție.

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{a_4}{5}x^5+\frac{a_3}{4}x^4+\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_0}{1}\cdot x$

f este derivabilă, deci și continuă, pe $[0, 1]$; $f(0) = 0 = f(1)$. Conform teoremei lui Rolle rezultă existența unui punct intermediar $c \in (0, 1)$ pentru care $f'(c)=0$, condiție echivalentă cu $a_4c^4 + a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0 = 0$.

Consecințe ale teoremei lui Rolle

Consecința 1.

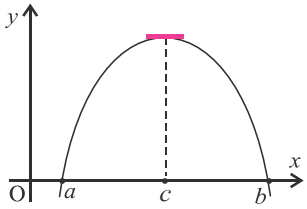
Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ continuă, f derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b) = 0$; atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c)=0$ (între 2 zerouri ale funcției se află cel puțin un zerou al derivatei).

Consecința 2.

Între 2 zerouri consecutive ale derivatei se află cel mult un zerou al funcției.

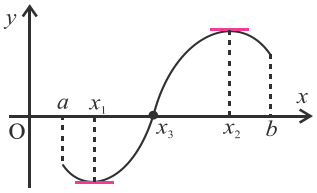
Fie $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, $x_1<x_2$ zerouri consecutive ale lui f'. Presupunem că $\exists x_3, x_4$ zerouri ale funcției f $(x_1 < x_3 < x_4 < x_2)$. Conform consecinței 1, din $f(x_3) = f(x_4) = 0$ rezultă că există $x_5 \in (x_3, x_4)$ astfel încât $f'(x_5)=0$, contradicție deoarece $x_1 < x_5 < x_2$ și x_1, x_2 sunt zerouri consecutive ale lui f'.

Sunt posibile situațiile prezentate în figurile următoare:



$f(a)=f(b)=0$

$\exists c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$



$f'(x_1)=f'(x_2)=0$

$f(x_3)=0,\ x_3\in(x_1,x_2)$

♦ Teorema lui Lagrange

(Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813, matematician francez).

Teorema lui Lagrange.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ ce verifică proprietățile:

1) f continuă pe $[a, b]$; 2) f derivabilă pe (a, b).

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Demonstrație.

Definim funcția $h:[a, b]\to\mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - k\cdot x$, unde $k \in \mathbb{R}$. Determinăm constanta k astfel încât funcția h să verifice ipotezele teoremei lui Rolle.

Indicație.

Aplică teorema lui Rolle funcției $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{a_0}{2n+1}x^{2n+1}+\frac{a_1}{2n}x^{2n}+\ldots+\frac{a_{2n-1}}{2}x^2+a_{2n}x$.

13) Arată că, dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, atunci pentru orice interval $[a, b]$ există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât: $f'(c)=\frac{(a+b-2c)}{(c-a)(c-b)}f(c)$.

Indicație.

Se aplică teorema lui Rolle pentru funcția $g:[a, b]\to\mathbb{R}$.

$g(x) = (x - a)(x - b)\cdot f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

14) Arată că următoarele funcții verifică numai una din condițiile teoremei lui Rolle, iar concluzia teoremei nu se verifică.

a) $f:[0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,2)\\ 0, & x=2\end{cases}$

este discontinuă în $x = 2$,

$f'(x)=1,\ \forall x\in(0,2)$;

b) $g:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=|x|$ nu este derivabilă în 0, $g'(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-1,0)\\ 1, & x\in(0,1)\end{cases}$;

c) $h:[0, 2]\to\mathbb{R}$, $h(x) = x$,

$h(0)\neq h(2)$, $h'(x)=1$, $\forall x\in(0,2)$.

15) Concluzia teoremei lui Lagrange se poate scrie:

„$\exists c\in(a,b)$ astfel încât $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$”

sau „$\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$”.

16) Studiază aplicabilitatea teoremei lui Lagrange și aplic-o, unde este posibil, în cazul funcțiilor următoare:

a) $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $0<b<1$;

b) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1]\\ 2x-1, & x\in(1,2]\end{cases}$.

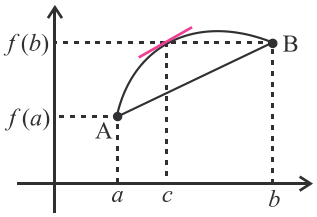
17) Determină punctul intermediar $c \in (0, 1)$ prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$.

h este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). În plus, din $h(a) = h(b)$ rezultă $f(a) - k \cdot a = f(b) - k \cdot b$, adică $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Conform teoremei lui Rolle $\exists\, c \in (a, b)$ astfel încât $h'(c) = 0$, echivalent cu $f'(c) - k = 0$, deci $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interpretare geometrică

Dacă graficul lui f admite tangentă în fiecare punct (cu excepția eventual a extremităților) există cel puțin un punct pe grafic în care tangenta are direcția coardei [AB] ce unește extremitățile graficului.



Observație.

Teorema lui Lagrange generalizează teorema lui Rolle (într-adevăr, dacă în plus $f(a) = f(b)$, atunci $f'(c) = 0$). Această teorema se numește și *prima teoremă a creșterilor finite* sau *prima teoremă de medie*.

Exerciții rezolvate.

1) Determină punctul intermediar c obținut prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + nx + p$ ($m \in \mathbb{R}^*$, $n, p \in \mathbb{R}$).

Soluție.

f este continuă pe $[\alpha, \beta]$, f este derivabilă pe (α, β), deci există $c \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Obținem $2mc + n = m(\alpha + \beta) + n$, deci $c = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ (adică c este mijlocul segmentului de pe axa Ox ce are abscisele α respectiv β).

Acest rezultat ne arată modul în care se poate construi cu rigla și compasul tangenta într-un punct al parabolei.

2) a) Dacă $0 < a < b$, demonstrează că: $\dfrac{b - a}{b} < \ln b - \ln a < \dfrac{b - a}{a}$.

b) Fie $x > 0$; arată că: $\dfrac{1}{x + 1} < \ln(x + 1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.

c) Arată că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$.

Soluție.

a) Definim funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$; f este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Conform teoremei lui Lagrange, $\exists\, c \in (a, b)$ pentru care $\dfrac{1}{c} = \dfrac{\ln b - \ln a}{b - a}$. Din $a < c < b$ rezultă $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$, deci $\dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b - a} < \dfrac{1}{a}$.

b) Pentru $a = x$ și $b = x + 1$ se obține afirmația.

18) Fie funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Arată că există $c \in (1, 2)$ astfel încât $1 + \ln 2 = f'(c)$. Determină efectiv valoarea lui c.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange

19) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Arată că f este constantă dacă și numai dacă $f' = 0$.

20) Arată $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Indicație. Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}$ este derivabilă și $f' = 0$, rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$, $f(1) = 0$.

21) Determină intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$.

22) Studiază derivabilitatea funcțiilor cu ajutorul consecinței 4 a teoremei Lagrange:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$;

b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\ln x - 2|$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x + 1} e^{|x|}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 + 1}{2}, & x \in (-\infty, -1) \\ x, & x \in [-1, 1] \\ \dfrac{x^2 + 1}{2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$;

e) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}}$.

Indicații.

b) i) f este o funcție continuă în $x = e^2$.

ii) $f(x) = -\ln x + 2$, $\forall x \in [0, e^2]$, deci f este derivabilă pe $[0, e^2]$ și $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$; de aici $f'_s(e^2) = -\dfrac{1}{e^2}$ ①.

iii) $f(x) = \ln x - 2$, $\forall x \in [e^2, +\infty]$, deci f este derivabilă pe $(e^2, +\infty)$ și $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) În inegalitatea $\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$ dăm lui k valori de la 1 la n și, însumând, obținem: $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval.

Consecința 1.

Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă și $f'(x)=0$, $\forall\, x \in I$, atunci f este constantă pe I.

Demonstrație.

Fie $x_0 \in I$. Notăm $f(x_0)=k$. Pentru $x \in I$, $x \neq x_0$ aplicăm teorema lui Lagrange funcției f, deci există c între x și x_0 astfel încât $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0) \Rightarrow f(x)=f(x_0)=k$, deoarece $f'(c)=0$. Rezultă $f(x)=k$, $\forall\, x \in I$.

Observație. Dacă I nu este interval, concluzia poate fi falsă.

Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$, f derivabilă, $f'(x)=0$, dar f nu este constantă pe $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ nu este interval).

Consecința 2.

Dacă $f, g: I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul I și $f'=g'$, atunci $g-f$ este constantă pe I.

Demonstrație.

Fie $h: I \to \mathbb{R}$, $h=g-f$; h este derivabilă pe intervalul I și $h'=g'-f'=0$, deci conform consecinței 1 rezultă $h=k$, adică $g-f=k$ constant.

Observație. Condiția ca I să fie interval este esențială.

Fie $f, g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\begin{cases}\sin x-1, & x<0\\ \sin x+1, & x>0\end{cases}$, $f'=g'$, dar $g(x)-f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ nu este funcție constantă.

Consecința 3. *Monotonia funcțiilor*

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I.

a) Dacă $f'>0$ atunci f este strict crescătoare.

b) Dacă $f'<0$ atunci f este strict descrescătoare.

c) Dacă f este strict crescătoare (crescătoare), atunci $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in I$.

d) Dacă f este strict descrescătoare (descrescătoare), atunci $f'(x) \leqslant 0, \forall x \in I$.

Demonstrație.

a) Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1<x_2$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$, rezultă că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$.

iv) $\lim\limits_{x\searrow e^2} f'(x)=\frac{1}{e^2}$.

Din i, iii, iv rezultă $f'_d(e^2)=\frac{1}{e^2}$ ②.

Din ①, ② rezultă că f nu are derivată în punctul $x=e^2$ ($x=e^2$ este punct unghiular).

În conluzie, f este derivabilă pe $(0, +\infty) \setminus \{e^2\}$.

e) $f(x)=\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=$

$=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=$

$=\begin{cases}5-2\sqrt{x-1}, & x\in[1,5]\\ 1, & x\in(5,10)\\ 2\sqrt{x-1}-5, & x\in[10,+\infty)\end{cases}$.

Pe traseul indicat la b) se arată că $x=5$ și $x=10$ sunt punctele unghiulare.

23) Determină $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile f următoare să fie derivabile pe întreg domeniul de definiție:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+n, & x\leqslant 2\\ mx+n, & x>2\end{cases}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2mx^3+n, & x\leqslant 1\\ 2x^2+3m, & x>1\end{cases}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}+n, & x\leqslant 2\\ mx+n, & x>2\end{cases}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{m}{2+x^4}+n, & x\leqslant 1\\ 2x^2+3m, & x>1\end{cases}$.

24) Determină $m, n \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\ln^3 x, & x\in(0,e]\\ mx+n, & x\in(e,+\infty)\end{cases}$

este derivabilă.

Soluție.

f este derivabilă pe mulțimea $(0, e) \cup (e, +\infty)$; $\lim\limits_{x\searrow e}(mx+n)=me+n$; $\lim\limits_{x\nearrow e} f(x)=1$. Pentru $me+n=1$ avem $\lim\limits_{x\to e} f(x)=f(e)$, adică f este continuă în $x=e$.

$\lim\limits_{x\nearrow e} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow e}\frac{3\ln^2 x}{x}=\frac{3}{e}=f'_s(e)$,

iar $\lim\limits_{x\searrow e} f'(x)=\lim\limits_{x\searrow e} m=m=f'_d(e)$.

Dacă $f' > 0$ atunci $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (f este strict crescătoare).

Analog se demonstrează punctele b), c), d).

Observație. Condiția ca I să fie interval este esențială.

Deși funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este derivabilă și are derivata negativă ($f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$), f nu este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}^*$ ($f(-1) = -1 < 1 = f(1)$), însă f este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$.

Consecința 4. *Derivata unei funcții într-un punct*

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in I$. Dacă f este continuă pe I, derivabilă pe $I - \{x_0\}$ și există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există derivata lui f în x_0 și $f'(x_0) = l$.

Demonstrație.

Fie $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$, $\forall\ n \geqslant 1$ și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Aplicând teorema lui Lagrange pe fiecare interval de extremități x_n și x_0, rezultă că există $c_n \in (x_0, x_n)$ sau $c_n \in (x_n, x_0)$ astfel încât

$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(c_n) \xrightarrow{n} l$, deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = x_0$

$\left(|c_n - x_0| \leqslant |x_n - x_0| \xrightarrow{n} 0\right)$. Deci există $f'(x_0) = l$.

Dacă $l \in \mathbb{R}$, atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = l$.

Observații.

♦ Condiția ca f să fie continuă în $x_0 \in I$ este esențială.

Funcția $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ nu este continuă în $x = 0$, este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ și $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$. Evident că f nu e derivabilă în $x = 0$ (0 fiind punct de discontinuitate de speța I).

♦ Consecința 4 exprimă condiții suficiente, nu și necesare, pentru ca o funcție $f: I \to \mathbb{R}$ să fie derivabilă în $x_0 \in I$.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; f este continuă pe $\mathbb{R}^*$;

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, f este continuă în 0; $f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

Nu există $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, deci consecința 4 nu se poate aplica. Totuși $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$, deci prin definiție $f'(0) = 0$ și f este derivabilă în $x = 0$, dar f' nu este continuă (în 0).

♦ Adesea, în aplicații, consecința 4 se utilizează când x_0 este capăt de interval. În acest caz, $l = f'_s(x_0)$ respectiv $l = f'_d(x_0)$.

Pentru $m = \frac{3}{e}$ și $n = -2$, f este derivabilă și în $x = e$, deci derivabilă pe $(0, +\infty)$.

(La același rezultat am fi ajuns dacă studiam derivabilitatea lui f în $x = e$ cu ajutorul definiției.)

25) Fie funcția $f: [1, +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1-a}$, $a > 1$. Arată că:

a) $\frac{1}{(k+1)^a} < \frac{1}{(a-1)}\left[f(k) - f(k+1)\right] < \frac{1}{k^a}$, $k \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} < \frac{1}{(a-1)}[f(1) - f(n+1)]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Soluție.

a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, restricția lui f la intervalul $[k, k+1]$ este derivabilă. Conform teoremei lui Lagrange, există $c_k \in (k, k+1)$ cu $f(k+1) - f(k) = f'(c_k)$. Avem, $\forall x \geqslant 1$, $f'(x) = (1-a)x^{-a}$ și $f''(x) = a(a-1)x^{-a-1} > 0$. Rezultă că funcția f' este strict crescătoare.

Din $k < c_k < k+1$ rezultă $f'(k) < f'(c_k) < f'(k+1)$; din aceasta, prin înmulțire cu $\frac{1}{a-1} > 0$ obținem inegalitatea $\frac{1}{(k+1)^a} < \frac{1}{(a-1)}\left[f(k) - f(k+1)\right] < \frac{1}{k^a}$.

b) Din prima parte a inegalității de la punctul a) rezultă

$$\frac{1}{2^a} < \frac{1}{(a-1)}\left[f(1) - f(2)\right],$$

$$\frac{1}{3^a} < \frac{1}{(a-1)}\left[f(2) - f(3)\right]$$

.....

$$\frac{1}{n^a} < \frac{1}{(a-1)}\left[f(n) - f(n+1)\right].$$

Din acest șir de inegalități, însumând, obținem: $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} < \frac{1}{(a-1)}[f(1) - f(n+1)]$.

Observație.

Șirul $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$, $a > 1$ este convergent.

PROBLEME PROPUSE

1. Stabilește căror funcții li se poate aplica teorema lui Rolle și determină punctele intermediare c din concluzia teoremei.

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x-x^4$;

b) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|\sin x|$;

c) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|\sin^3 x|$;

d) $f:[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{tg}x$;

e) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$;

f) $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ \mathrm{ctg}x, & x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$.

2. Dacă numerele reale $a_0, a_1, \ldots, a_n$ verifică $\frac{a_0}{1}+\frac{2\cdot a_1}{2}+\frac{2^2\cdot a_2}{3}+\ldots+\frac{2^n\cdot a_n}{n+1}=0$, arată că funcția $f:[1,e^2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0+a_1\cdot\ln x+\ldots+a_n\cdot\ln^n x$ se anulează în intervalul $(1, e^2)$.

3. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b). Arată că, pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$, între două zerouri ale lui f se află cel puțin un zero al funcției $\lambda\cdot f+f'$.

4. Determină c_n din teorema lui Lagrange aplicată funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ și apoi $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

5. Arată că funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ este constantă.

6. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f:[0,x]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{t+1}$, vom determina $\theta=\theta_x$ și $0<\theta_x<1$ astfel încât $f(x)-f(0)=x\cdot f'(\theta_x\cdot x)$. Calculează $\lim\limits_{x\searrow 0}\theta_x$.

7. Aplicând teorema lui Lagrange unor funcții convenabil alese pe intervalul $[a,b]$, dedu inegalitățile:

a) $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\mathrm{tg}b-\mathrm{tg}a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$, $\left(0\leqslant a<b<\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\frac{b-a}{\sin^2 a}<\mathrm{ctg}a-\mathrm{ctg}b<\frac{b-a}{\sin^2 b}$, $\left(0<a<b\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\mathrm{arctg}b-\mathrm{arctg}a<b-a$, $(a,b\in\mathbb{R}, a<b)$;

d) $s\cdot a^{s-1}\cdot(b-a)<b^s-a^s<s\cdot b^{s-1}\cdot(b-a)$, $(0<a<b, s\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty))$.

8. a) Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, verifică inegalitățile: $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$.

b) Arată că șirul $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ este monoton și mărginit.

c) Fie $c=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, determină $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

9. a) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$; atunci

$\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)<\frac{1}{n\cdot\ln n}$.

b) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{1}{k\cdot\ln k}$.

10. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) Calculează $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Verifică aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pe un interval $[c,d]\subset\mathbb{R}$.

c) Arată că $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}f'(x_k)=-f(1)=-\frac{1}{2}$, unde x_k este punctul intermediar obținut prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției f pe intervalul $[k+1, k+2]$.

11. Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\ln x)$. Arată că:

a) $\frac{1}{(k+1)(1+\ln(k+1))}\leqslant f(k+1)-f(k)\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{k(1+\ln k)}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$.

b) $\frac{1}{2(1+\ln 2)}+\frac{1}{3(1+\ln 3)}+\ldots+\frac{1}{n(1+\ln n)}>$

$>f(n+1)-f(2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

12. Determină $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\leqslant 0\\ a\sin x+b\cos x, & x>0\end{cases}$ să fie derivabilă.

(*Admitere, Universitatea Bacău,* 1995)

13. Determină $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)-mx$ să fie crescătoare.

14. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}-\mathrm{arctg}x$.

a) Calculează $f'(x)$.

b) Arată că: $\frac{x}{x^2+1}<\mathrm{arctg}x$, $\forall x>0$.

(*Universitatea Baia Mare,* 1995)

15. Demonstrează identitățile:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$;

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

16. Fie intervalul $I \subset \mathbb{R}$ și $f: I \to \mathbb{R}$ funcție derivabilă. Dacă f este crescătoare, atunci $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$.

17. Arată că funcțiile $f, g: \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ definite prin: $f(x) = \arcsin(\operatorname{tg} x)$ și $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$ diferă printr-o constantă. Determină constanta.

18. Demonstrează că $x + \frac{1}{x} \geqslant 2, \forall x > 0$.

19. Determină intervalele de monotonie ale funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 4x - 1$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-2)^2$; c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+4)^3$;

d) $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{x}{x-2}$;

e) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

20. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2|x-1| - |x+a|$, $a \in \mathbb{R}$. Determină parametrul real a pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

21. Arată că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe $[a, b]$ astfel încât $af(b) = bf(a)$, atunci există $c \in (a, b)$ așa încât $f(a) - f(c) + f(b) = (a - c + b) \cdot f'(c)$.

22. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă și mărginită pe (a, b). Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{a - 2c + b}{(c-a)(c-b)} = f'(c)$.

23. Arată că există $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu una din proprietățile:

a) f este continuă, dar nu este derivabilă în $a = 1$;

b) f este continuă, are derivată dar nu este derivabilă în $a = 0$;

c) f are derivată dar este discontinuă în $a = 0$.

24. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ și $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geqslant n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$.

25. Dacă $a_i, b_i \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încât $b_1 \cdot a_1^x + b_2 \cdot a_2^x + \ldots + b_n \cdot a_n^x \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{b_n} = 1$.

26. Determină $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ pentru care $a^x \geqslant x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (*W. Sierpinski*)

27. Găsește $a > 0$ pentru care are loc inegalitatea $2^x + a^x \geqslant 3^x + 4^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

28. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea $(1 + x)^n \geqslant 1 + ax$, $\forall x > -1$ și $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

29. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea: $x^a + a \geqslant 1 + \frac{a}{x}$, $\forall x > 0$.

30. Arată că funcțiile date verifică ecuațiile indicate:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x$ verifică $y'' - 2y' + y = e^x$;

b) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$ verifică $1 + (y')^2 = 2y \cdot y''$;

c) $y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x}$ verifică $y'' + 3y' + 2y = 0$, unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrare.

31. Fie șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $u_n = \frac{1 + x^n}{1 + x + \ldots + x^{n+p-1}}$, $x \geqslant 0$ și $p \in \mathbb{N}$. Dacă $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$, C este domeniul de continuitate și D domeniul de derivabilitate, care dintre variantele a), b), c), d) e) este corectă?

a) $C = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$; b) $C = [0, +\infty)$, $D = [0, +\infty) \setminus \{1\}$;

c) $C = [0, +\infty)$, $D = (0, +\infty)$;

d) $C = [0, +\infty)$, $D = [1, +\infty)$; e) $C = (0, \infty)$; $D = (1, \infty)$.

32. Arată că, dacă $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0$ $(a_k \in \mathbb{R}, 0 \leqslant k \leqslant n)$, atunci ecuația: $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ admite cel puțin o soluție reală.

33. Dacă $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, există $x_0 \in (0, 2\pi)$ astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n} [a_k \cdot \sin(k \cdot x_0) + b_k \cdot \cos(k \cdot x_0)] = 0$.

34. Dă un exemplu de funcție $f: [1, 10] \to \mathbb{R}$ ce verifică ipoteza teoremei lui Lagrange pentru care punctul intermediar $c \in (1, 10)$ nu este unic.

35. Consideră funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}$; $g(x) = e^{x+1}$ și $h(x) = (g \circ f)(x)$. Determină constanta c din teorema lui Lagrange aplicată funcției h pe intervalul $[1, 2]$.

36. Fie $0 < a < b$ și $f(x) = \ln x$; conform teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.î. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Arată că $c \in \left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

37. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$.

38. a) Studiază monotonia funcției $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

b) Demonstrează inegalitatea $n^{n+1} > (n + 1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

5. Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor

În cazurile exceptate de teoremele referitoare la operații cu limite de funcții se studiază direct existența limitei cu ajutorul derivatelor, utilizând „regulile lui l'Hospital"
(Guillaume de l'Hospital, 1661 – 1704, matematician francez).

Aceste reguli se aplică în cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Celelalte cazuri se reduc la acestea.

Regula l'Hospital

Fie $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ un interval, $x_0 \in I$ și $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funcții cu proprietățile:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$);

2) f și g sunt derivabile pe $I - \{x_0\}$ și $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

3) există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ și există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

♦ ***Cazul exceptat $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$***

Exercițiu rezolvat. Să calculăm: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ $(n, m \in \mathbb{N}^*)$.

Soluție.

Fie $f(x) = x^n - 1$, $g(x) = x^m - 1$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$; f și g sunt derivabile, $g'(x) = m \cdot x^{m-1} \neq 0$;

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{n \cdot x^{n-1}}{m \cdot x^{m-1}} = \frac{n}{m}$, deci $l = \frac{n}{m}$.

Observație.

Dacă limita raportului $\frac{f'}{g'}$ nu se calculează mai ușor decât limita raportului $\frac{f}{g}$, nu este indicată folosirea teoremei lui l'Hospital.

De exemplu, fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$ și $g(x) = e^x + e^{-x}$.
Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$; $g'(x) = e^x + e^{-x}$ și

$g(x) = e^x - e^{-x} \neq 0$; pentru $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ și $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

♦ ***Reducerea cazului exceptat „$0 \cdot \infty$" la unul din cazurile „$\frac{0}{0}$" sau „$\frac{\infty}{\infty}$":***

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

1) Calculează $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$.

Soluție.

Considerăm $f(x) = x$ și $g(x) = e^x$.
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$; f și g sunt derivabile;
$g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$,
deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

2) După modelul exercițiului precedent, calculează:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^7 - 1}{x^{29} - 1}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$.

3) Calculează $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x} \cdot \ln x$.

4) Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x(1 - \cos x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^3 \ln x$; h) $\lim\limits_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x(e^x + 1)}\right)$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

l) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \left(x + e^x\right)^{\frac{1}{x}}$; m) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$;

n) $\lim\limits_{x\to 2} (5 - 2x)^{tg\frac{\pi x}{4}}$; o) $\lim\limits_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$;

Exercițiu rezolvat. Să calculăm $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x$.

Soluție. Suntem în cazul $0\cdot(-\infty)$; cum $x\ln x=\dfrac{\ln x}{x^{-1}}$,

definim $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\searrow 0}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x)=+\infty$; f, g sunt derivabile, $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\neq 0$.

$\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\searrow 0}(-x)=0$, deci $\lim\limits_{x\searrow 0} x\cdot\ln x=0$.

♦ ***Reducerea cazului exceptat***

„∞ – ∞“ la cazul „$\dfrac{0}{0}$“

$$\boxed{f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}}$$

Exercițiu rezolvat. Să calculăm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Soluție.

$\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}$; derivând succesiv obținem

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 2x}{6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\cdot\sin 2x}$ și, împărțind prin x, obținem limita $\dfrac{1}{3}$. Aplicând teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3}$.

♦ ***Reducerea cazurilor exceptate***

„1∞, ∞0, 00“

$$\boxed{f^g=e^{\ln f^g}=e^{g\cdot\ln f}}$$

Observație.

Este bine să evităm scrierea: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

această egalitate având loc doar când ultima limită există. Dacă nu există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, teorema lui l'Hospital nu este aplicabilă.

p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$; r) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^x$.

5) Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

6) Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x^2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg} x)^x$.

7) Calculează: a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e-x))^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

8) Calculează $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Indicație.

Suntem în cazul $\left(\dfrac{0}{0}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ nu există, deci nu este aplicabilă teorema lui l'Hospital. Limita se calculează astfel:

$l=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\alpha-1-\alpha(x-1)}{(x-1)^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sin x)^2}{(1-\cos x)^3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\ln\cos x}{x^2}$; g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{xe^x+\sin x}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\pi-\sin x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-\cos x}{(e^x-1)^2}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\ln(1+ax)+\ln(1+bx)}$, $a, b\in\mathbb{R}^*$;

m) $\lim\limits_{x\searrow -1}\dfrac{\sqrt{\arccos x}-\sqrt{\pi}}{\sqrt{x+1}}$;

n) $\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$, $n\in\mathbb{N}^*$; p) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{-\ln(\sin x)}}{\cos x}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x\operatorname{tg} x}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}}{\sin^2 x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x$;

c) $\lim\limits_{x\searrow 1}(x-1)\ln\dfrac{1}{x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$; f) $\lim\limits_{x\searrow 0}\sin x\ln(\operatorname{tg}x)$;

g) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)e^{\operatorname{tg}x}$; h) $\lim\limits_{x\searrow 1}\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(x-1)$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$; j) $\lim\limits_{x\to\infty} x^9\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)$, $a>0$;

k) $\lim\limits_{x\searrow e}(x-e)^{\alpha}(e^x-x^e)$, $\alpha<0$.

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x^3-x-1)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-\ln(x^2+1))$; d) $\lim\limits_{x\searrow 0}(\ln 2x+\operatorname{ctg} x)$;

e) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\pi-2x})$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

g) $\lim\limits_{x\searrow 1}\left(\ln(x-1)+\ln\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)$.

4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln ex)^{\frac{1}{x-1}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{\pi}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\searrow e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin ax+b^x)^{\frac{1}{x}}$, $a,\ b>0$, $b\neq 1$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x+\ldots+n^x}{n-1}\right)^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5. a) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x(\sin x)^{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x))^x$; d) $\lim\limits_{x\searrow 0}(\sqrt{1+x}-1)^x$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$; f) $\lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;

g) $\lim\limits_{x\searrow 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0}(\operatorname{ctg}x)^x$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^n}\right)^{\frac{1}{x^n}}$, $n\in\mathbb{N}^*$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+\sin x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, determină următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\sqrt{1+2x}\ldots\sqrt{1+nx}-1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(e+x)\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+nx)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\ldots\cdot\cos^2 nx}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\ldots\operatorname{tg}nx-n!x^n}{x^{n+2}}$.

8. Arată că, pentru următoarele limite, nu e aplicabilă regula lui l'Hospital, apoi calculează limitele respective:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(2+\sin x)}{x+1}$.

9. Calculează următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$;

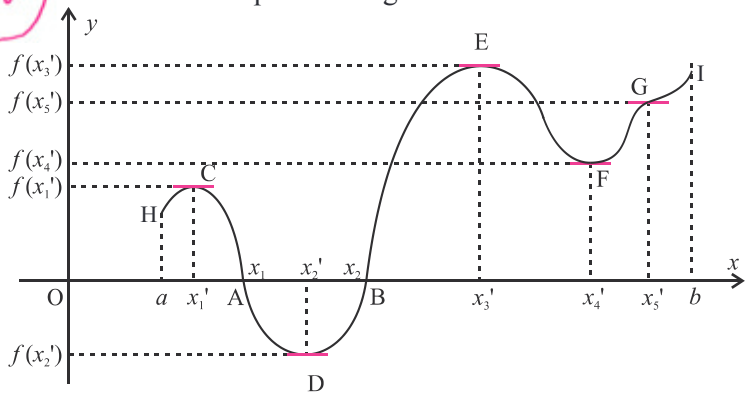
c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$.

6. Rolul derivatei de ordinul întâi în studiul funcțiilor

Derivata întâi a unei funcții ne dă informații despre monotonia funcției și despre eventualele puncte de extrem ale acesteia.

EXEMPLU

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care are următoarea reprezentare grafică.



Grafic, observăm că:

• x_1, x_2, soluțiile ecuației $f(x) = 0$, sunt zerourile funcției f și punctele $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ reprezintă intersecțiile graficului funcției cu axa Ox;

• x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', soluțiile ecuației $f'(x) = 0$, sunt zerourile derivatei f' (numite și *puncte critice ale lui* f) și pot fi puncte de extrem local pentru funcția f:

- $C(x_1', f(x_1'))$, $E(x_3', f(x_3'))$, $I(b, f(b))$ sunt puncte de maxim local;
- $D(x_2', f(x_2'))$, $F(x_4', f(x_4'))$, $H(a, f(a))$ sunt puncte de minim local;
- $G(x_5', f(x_5'))$ nu este punct de extrem pentru funcția f (vom vedea mai departe că G este punct de inflexiune).

– pe intervalele $[a, x_1']$, $[x_2', x_3']$, $[x_4', b]$ funcția f este strict crescătoare;

– pe intervalele $[x_1', x_2']$, $[x_3', x_4']$ funcția f este strict descrescătoare.

Intervale de monotonie ale unei funcții

O consecință a teoremei lui Lagrange ne asigură că o funcție derivabilă este strict monotonă pe intervalele pe care derivata sa păstrează semn constant.

SĂ NE AMINTIM

Consecință a teoremei lui Lagrange

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I.

a) Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I.

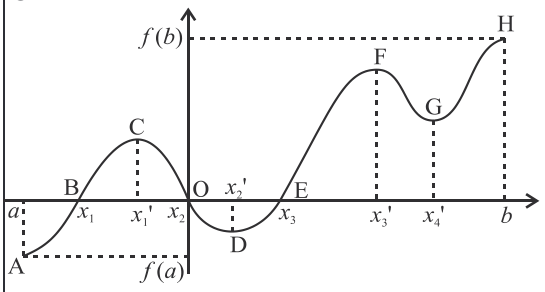
b) Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.

c) Dacă f este strict crescătoare (crescătoare), atunci $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in I$.

d) Dacă f este strict descrescătoare (descrescătoare), atunci $f'(x) \leqslant 0, \forall x \in I$.

Să interpretăm grafice!

1) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care are următoarea reprezentare grafică:



i) Ce soluții are ecuația $f(x) = 0$?

ii) Care sunt punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axa Ox?

iii) Ce soluții are ecuația $f'(x) = 0$?

iv) Care sunt punctele critice ale lui f?

v) Ce puncte din plan sunt puncte de extrem local pentru funcția f?

vi) Sunt punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ puncte de extrem local pentru funcția f?

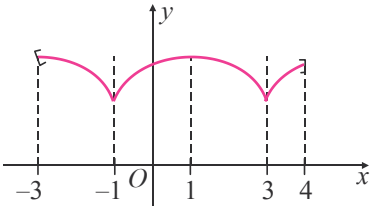
vii) Care sunt intervalele de monotonie?

2) Imaginează o reprezentare grafică a unei funcții $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ astfel încât graficul să intersecteze axa Ox în punctele (0, 0), (2, 0), (4, 0) și următoarele puncte să fie de extrem local: (–2, 2), (1, 4), (3, –1).

Există mai multe funcții ale căror reprezentări grafice verifică condițiile de mai sus?

Imaginează și trasează încă o astfel de reprezentare grafică.

3) Funcția $f : [-3, 4] \to \mathbb{R}$ are următoarea reprezentare grafică.



Care sunt punctele de extrem local ale funcției f? În care dintre aceste puncte graficul admite tangentă orizontală?

Un rezultat important relativ la determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții este...

Propoziție.
Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, are proprietățile:
a) f este continuă pe I;
b) f este derivabilă pe $I \setminus A$, unde A este o mulțime finită și $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \setminus A$.
Atunci funcția f este strict crescătoare pe I.

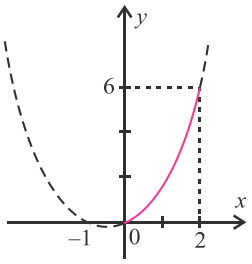
Demonstrație.
Este suficient să analizăm cazul $A = \{a\}$, $a \in I$.
Dacă $a = \min\{x \mid x \in I\}$ sau $a = \max\{x \mid x \in I\}$, rămâne valabilă demonstrația consecinței teoremei lui Lagrange.
Dacă a este un punct din interiorul intervalului I, atunci funcția f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, a] \cap I$ și $[a, +\infty) \cap I$ *i)*
Oricare ar fi $x_1 \in (-\infty, a) \cap I$ și $x_2 \in (a, +\infty) \cap I$, rezultă $f(x_1) < f(a)$ și $f(a) < f(x_2)$, ceea ce implică $f(x_1) < f(x_2)$ *ii)*
Din *i)* și *ii)* funcția f este strict crescătoate pe I.

Observație.
Dacă ipoteza „$f'(x) > 0$, $\forall x \in I \setminus A$" este înlocuită cu „$f'(x) < 0$, $\forall x \in I \setminus A$", atunci funcția f este strict descrescătoare pe I.

EXEMPLE

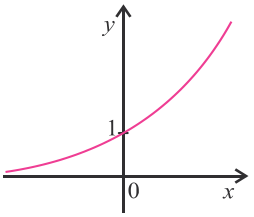
1) Fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict crescătoare pe $[0, 2]$.

Soluție.
Funcția f este derivabilă pe $[0, 2]$ și $f'(x) = 2x + 1$. Pentru $x \in [0, 2]$, $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0, 2]$.



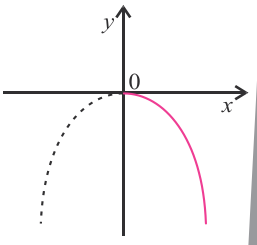
2) Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x$. Arată că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Soluție.
Funcția exponențială este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.



3) Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

Soluție.
Funcția f este derivabilă pe $[0, \infty)$ și $f'(x) = -2x$. Pentru $x \in (0, \infty)$, $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.



Să demonstrăm monotonia funcțiilor derivabile folosind derivata întâi.

4) i) Studiază, cu ajutorul derivatelor, monotonia funcțiilor:
a) $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 6$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 6$;
c) $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ (*parabola cubică*);
e) $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;
f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (*hiperbola echilateră*).

ii) Studiază monotonia funcțiilor de mai sus, fără să folosești derivatele.

5) Fie $f : [-4, -1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict descrescătoare pe $[-4, -1]$.
Reprezintă grafic funcția f și regăsește grafic proprietatea demonstrată.

6) Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^{-x}$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

7) Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Studiază, folosind derivate, monotonia funcției (găsind intervalele de monotonie ale funcției).

8) Fie $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$.
Reprezintă grafic funcția f și regăsește grafic proprietatea demonstrată.

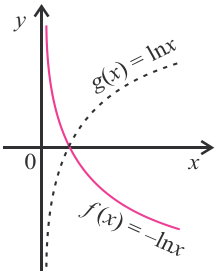
9) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{1}{x}$. Arată că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$

10) Formulează enunțul propoziției pentru varianta „f funcție strict descrescătoare" și demonstrează acest rezultat.

11) Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 2e^x$. Arată că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

12) Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

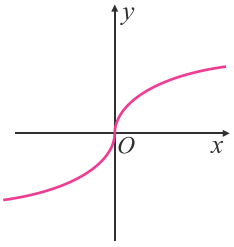
4) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\ln x$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.



Soluție.

Funcția f este derivabilă pe $(0,\infty)$ și $f'(x)=-\frac{1}{x}$. Cum $x>0$, avem $f'(x)<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

5) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.



Soluție.

a) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

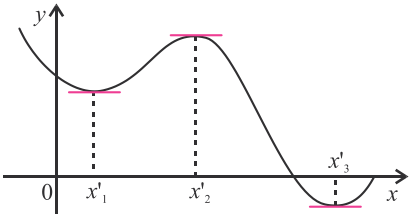
b) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ și $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Din a) și b) rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Puncte de extrem ale unei funcții

... interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă reprezentarea grafică a unei funcții derivabile pe un interval admite tangentă într-un punct de extrem, ce nu coincide cu extremitățile graficului, atunci tangenta în acest punct este orizontală.



Teorema lui Fermat pune în evidență faptul că derivata unei funcții se anulează în orice punct de extrem local din interiorul intervalului I. Deci, punctele de extrem local ale unei funcții derivabile definite pe un interval deschis se găsesc printre zerourile derivatei, adică printre punctele critice.

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție și x_0 un punct din interiorul intervalului I.

a) dacă, pe I, funcția este strict crescătoare la stânga lui x_0 și strict descrescătoare la dreapta lui x_0, atunci x_0 este *punct de maxim local al funcției* (↗ M ↘);

b) dacă, pe I, funcția este strict descrescătoare la stânga lui x_0 și strict crescătoare la dreapta lui x_0, atunci x_0 este *punct de minim local al funcției* (↘ m ↗).

Dacă funcția f este derivabilă pe I și x_0 un punct din interiorul intervalului I, reformulăm aceste proprietăți folosind semnul derivatei:

a) dacă $f'(x)>0$, $\forall x\in I$, $x<x_0$ și $f'(x)<0$, $\forall x\in I$, $x>x_0$, atunci x_0 este *punct de maxim local* al funcției f;

x		x_0	
f'	+	0	–
f	↗	M	↘

13) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[5]{x^3+2x-3}$. Arată că funcția f este strict crescătoare.

14) Arată că $f(x)=\frac{1}{x^3}$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$, strict descrescătoare pe $(0,\infty)$, dar nu este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}^*$.

15) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2\ln x$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

16) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-\sqrt[3]{x}$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

17) Studiază monotonia următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\operatorname{arctg}x$;

b) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$;

c) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2-1)$.

Să interpretăm grafic!

18) Folosind semnul derivatei, stabilește intervalele de monotonie ale funcțiilor și specifică eventualele puncte de extrem:

a) $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+6$;

b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+1$.

Pentru fiecare funcție în parte, ilustrează grafic rezultatul obținut.

19) Construiește o funcție $f:[0,6]\to\mathbb{R}$ derivabilă, strict descrescătoare pe $[0,6]$ și găsește punctele de extrem ale funcției.

20) Stabilește intervalele de monotonie ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

Indicație.

Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x-1$. Ecuația $f'=0$ are soluția $x_1'=0$. Derivata păstrează un semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$ și $(0,\infty)$.

b) dacă $f'(x) < 0, \forall x \in I, x < x_0$ și $f'(x) > 0, \forall x \in I, x > x_0$, atunci x_0 este *punct de minim local* al funcției f.

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$

Observații.

♦ Dacă derivata are același semn la stânga și la dreapta lui x_0, atunci x_0 nu este punct de extrem al funcției.

♦ Proprietățile a) și b) rămân adevărate și în cazul în care f este derivabilă pe $I - \{x_0\}$ și este continuă în x_0. Pot fi puncte de extrem local și punctele în care funcția nu este derivabilă.

♦ Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă și f' are semn constant, atunci a și b sunt puncte de extrem ale funcției astfel:

x	a		b
f'		$+$	
f	m	$\nearrow$	M

sau

x	a		b
f'		$-$	
f	M	$\searrow$	m

Concluzie.

Pentru a determina intervalele de monotonie și punctele de extrem ale unei funcții derivabile, procedăm astfel:

• calculăm f' pe domeniul maxim de derivabilitate $D_{f'} \subset I$;

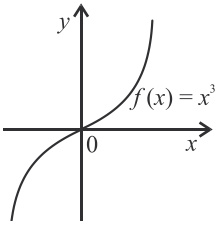
• rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$; soluțiile acestei ecuații sunt eventualele puncte de maxim sau de minim ale funcției f;

• stabilim intervalele pe care f' are semn constant, acestea fiind intervalele de monotonie ale lui f (dacă $f' > 0$ pe I, atunci f este strict crescătoare pe I și dacă $f' < 0$ pe I, atunci f este strict descrescătoare pe I).

Să exemplificăm cele trei observații precedente prin ...

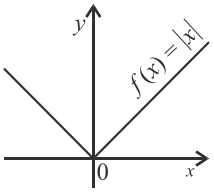
1) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ are derivata $f'(x) = 3x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$



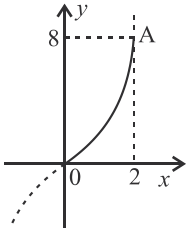
Observăm că la stânga și la dreapta lui $x_0 = 0$ derivata este pozitivă, deci $x_0 = 0$ nu este punct de extrem al lui f, ceea ce se vede și în reprezentarea grafică a lui f (parabola cubică).

2) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), f(x) = |x|$ este continuă în $x_0 = 0$, dar nu este derivabilă în 0; totuși $x_0 = 0$ este punct de minim al funcției f.



3) $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ are derivata pozitivă pe tot intervalul [0, 2].

x	[0		2]
f'		$+$	
f	$f(0)$ m	$\nearrow$	$f(2)$ M



21) Stabilește intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^2$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^3$;

d) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), f(x) = |x + 1|$;

e) $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = e^x$;

f) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$;

g) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -\ln x$;

h) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \ln x - x$;

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$;

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^4 + 8x^3$;

k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

l) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{x - 8}{x^3 + 1}$;

m) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;

n) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x + \dfrac{2}{2x - 5}\right|$;

o) $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$;

p) $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 4}$;

q) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x+1)(x+2)$;

r) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1)$;

s) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$;

t) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 e^x$;

u) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{3x} \cdot \cos 3x$.

Observăm că punctul O(0, $f(0)$) este punct de minim și A(2,8) este punct de maxim.

Probleme rezolvate.

Stabilește intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru următoarele funcții:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

Soluție.

Funcția f este derivabilă și $f'(x) = 2ax + b$.

Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$, adică $2ax + b = 0$; obținem soluția $x = -\frac{b}{2a}$. Calculăm $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$.

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ (m)	$\nearrow$

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ (M)	$\searrow$

Observăm că punctul $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ este un punct de extrem al graficului funcției f și anume: punct de minim pentru $a > 0$ sau punct de maxim pentru $a < 0$. Am regăsit astfel rezultatele obținute în clasa a IX-a, când s-a studiat funcția de gradul al doilea.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$

Soluție.

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$. Calculăm $f(-1) = 2$ și $f(1) = -2$.

x		-1		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	2 M	$\searrow$	-2 m	$\nearrow$

Derivata păstrează un semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Pentru determinarea semnului derivatei putem folosi semnul funcției de gradul 2 (derivata fiind funcție de gradul 2), sau putem utiliza proprietatea lui Darboux a funcției f'. Pentru aceasta, calculăm valoarea sa în câte un punct al fiecărui interval (de exemplu, $f'(-2) = 9 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$, $f'(2) = 9 > 0$). Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1, \infty)$ și este strict descrescătoare pe $[-1, 1]$.

22) Stabilește intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - Sx + P$, unde S și P sunt numere reale;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + Sx - P$, unde S și P sunt numere reale;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 3x$;

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x + x$;

g) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$;

h) $f: [0, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

i) $f: [3, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x + 3$;

j) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x + 3$;

k) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

l) $f: [2, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

m) $f: (2, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

n) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$;

o) $f: [-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + x$;

p) $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

q) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 e^{-x}$;

r) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$.

23) Determină cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției $f(x) = 6x - x^3$ pe intervalul $[-2, 3]$.

24) Prețul unei ore de mers cu autoturismul se poate exprima cu ajutorul formulei empirice $p = a + bv^3$, unde $a = 500$ lei și $b = 0{,}35 \cdot 10^{-3} \frac{\text{lei} \cdot \text{h}^3}{\text{km}^3}$. Care este viteza cea mai economică a mașinii?

Indicație.

Dacia parcurge 1km în timpul $t = \frac{1\ \text{km}}{v\ \text{km/h}} = \frac{1}{v}$ (h). Prețul pentru 1 km este $p = \frac{a + bv^3}{v} = \frac{a}{v} + bv^2$ (lei). Prețul minim se obține din $p' = 0$, deci $v^3 = \frac{a}{2b}$.

Demonstrarea unor inegalități cu ajutorul derivatelor

EXEMPLU

1) Arătăm că $\boxed{\ln(x+1) \leqslant x,\ \forall\, x > -1}$.

Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - x$. Din tabel observăm că maximul funcției este 0; rezultă că $f(x) \leqslant 0$, $\forall x > -1$, adică $\ln(x+1) - x \leqslant 0$, $\forall x > -1$.

x	-1		0		∞
f'	|	$+$	0	$-$	
f	|	$\nearrow$	0 M	$\searrow$	

2) Arătăm că $\boxed{(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x,\ \forall\, x \geqslant -1, \forall\, \alpha > 1}$.

Fie $\alpha > 1$ și funcția $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$. Funcția f este derivabilă pe $[-1, \infty)$ și $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția unică $x = 0$. Observăm că $\alpha - 1 > 0$. Dacă $x > 0$, atunci $(1+x)^{\alpha-1} > 1$ și deci $f'(x) > 0$. Dacă $x \in (-1, 0)$, atunci $(1+x)^{\alpha-1} < 1$ și deci $f'(x) < 0$.

1 este minimul funcției pe $[-1, \infty)$, rezultă că funcția are toate valorile mai mari decât 1, adică $(1+x)^\alpha - \alpha x \geqslant 1$, $\forall x \geqslant -1$.

x	-1		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f	α	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Această inegalitate generalizează inegalitatea lui Bernoulli pentru exponenți α reali, $\alpha > 1$.

3) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Folosind intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcției date, stabilește inegalitatea $e^x \geqslant x^e$, $\forall\, x \in (0, \infty)$.

Soluție.

Funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$ și $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Ecuația $f'(x) = 0$, adică $1 - \ln x = 0$, are soluția $x = e$. Punctul $(e, 1/e)$ este punct de maxim al funcției, deci $f(x) \leqslant f(e)$, $\forall\, x \in (0, \infty)$. Această inegalitate este echivalentă cu $\dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{1}{e}$, adică $e \cdot \ln x \leqslant x$, deci $x^e \leqslant e^x$, $\forall\, x \in (0, \infty)$.

x	0		e		∞
f'	|	$+$	0	$-$	
f	|	$\nearrow$	$1/e$ M	$\searrow$	

Să demonstrăm inegalități asociind acestora funcții derivabile!

25) Demonstrează:

a) $x \leqslant e^{x+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $\ln(1+x^2) < x$, $\forall\, x > 0$;

c) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

d) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, $\forall\, x > 0$;

e) $\dfrac{a^x}{x} \geqslant e \ln a$, $\forall\, x > 0$, $a > 1$;

f) $\operatorname{arctg} x > \dfrac{x}{x^2+1}$, $\forall\, x > 0$;

g) $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall\, x \in [0, 1]$.

26) a) Dacă $\alpha \in (0, 1)$ și $x > -1$, avem $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$ (*generalizarea inegalității lui Bernoulli pentru* $\alpha = \dfrac{1}{n}$).

b) Fie $p, q > 0$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Dedu inegalitatea $a \cdot b \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

c) Dedu *inegalitatea lui Hölder*: pentru $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $p, q > 0$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ avem:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i \cdot b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

Pentru $p = q = 2$ se obține *inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz*.

PROBLEME PROPUSE

● **1.** Studiază monotonia funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: a) $f(x) = 3x + 5$; b) $f(x) = -5x + 9$; c) $f(x) = x^4$; d) $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat; e) $f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat; f) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$; g) $f(x) = -x^2 + 2x$; h) $f(x) = x^3 + 3x$; i) $f(x) = x^3 - 3x$.

● **2.** Stabilește intervalele de monotonie și eventualele puncte de extrem ale funcțiilor următoare, definite pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f(x) = x^2 - 6x$; b) $f(x) = x^3 - x$;

c) $f(x) = x^3(8 - x)$; d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; e) $f(x) = \dfrac{2-5x}{3x+4}$.

● **3.** Determină intervalele de monotonie ale funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$;

b) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

● **4.** Studiază monotonia funcțiilor:

a) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;

b) $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

c) $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$;

d) $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$;

e) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5. Studiază monotonia funcțiilor $f: D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție:

a) $f(x)=e^x-2x$; b) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$;

c) $f(x)=x+\sin x$; d) $f(x)=x+\operatorname{tg}x$;

e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{1+x^2}$; f) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$;

g) $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; h) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+4}$;

i) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$; j) $f(x)=x\ln(-x)$;

k) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$; l) $f(x)=\sin x-\cos x$;

m) $f(x)=\dfrac{4\sin x}{4-\cos^2 x}$; n) $f(x)=x^3e^x$.

6. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{7-x}$.

a) Determină intervalele de monotonie ale funcției f.

b) Utilizând monotonia lui f, stabilește care dintre numerele $A=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$ sau $B=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$ este mai mare.

7. Fie funcția $f(x)=ax(x-b)(x-c)$, $a, b, c\in\mathbb{R}$. Determină b și c astfel încât funcția f să admită pentru $x=\dfrac{4}{3}$ un minim și pentru $x=6$ un maxim. Determină apoi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât maximul lui f să fie egal cu 6.

8. Fie funcția $f(x)=\dfrac{x^2+2ax+b}{x^2+2cx+d}$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$. Determină a, b, c, d astfel încât funcția să aibă pentru $x=-1$ un maxim egal cu 2 și pentru $x=1$ un minim egal cu 4.

9. Fie $f(x)=\dfrac{x^2+2(a-b)x+b^2-2ab+1}{x^2+1-b^2}$, $a, b\in\mathbb{R}$.

a) Arată că, dacă $a\neq b$, funcția are două puncte de extrem și anume, un punct de minim și un punct de maxim.

b) Fie m minimul și M maximul lui f; determină relația dintre a și b astfel încât să avem $m+M=0$.

10. Stabilește inegalitatea:
$e^x>1+\ln(1+x)$, $\forall x>-1$, $x\neq 0$.
(*Institutul de Arhitectură*, București, 1995)

11. a) Demonstrează inegalitatea:
$e^x\geqslant x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

b) Arată inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a n numere pozitive. (*Inegalitatea G. Polya*)

12. a) Studiază monotonia funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

b) Demonstrează inegalitatea: $n^{n+1}>(n+1)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

13. Arată că, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, are loc inegalitatea: $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$. (*Inegalitatea Jordan*)

14. Demonstrează inegalitățile:

a) $\dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$, $\forall x\in(-1,0)\cup 0,+\infty)$;

b) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$, $\forall x>0$.

15. Fie $A\subset\mathbb{R}$ și ε, a_1, $a_2>0$ astfel încât $a_1^x+a_2^x\geqslant 2$, $\forall x\in A$. Arată că, dacă:

a) $A=[0,\varepsilon)$, atunci $a_1\cdot a_2\geqslant 1$;

b) $A=(-\varepsilon,0]$, atunci $a_1\cdot a_2\leqslant 1$;

c) $A=(-\varepsilon,\varepsilon)$, atunci $a_1\cdot a_2=1$.

d) Generalizează enunțul pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$.

16. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

a) Calculează $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

b) Determină f' și f'' pe $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

c) Studiază monotonia lui f.

d) Compară numerele: $x_1=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{16}$ și $x_2=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{25}$.

17. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\left(\dfrac{3}{7}\right)^x+\left(\dfrac{4}{7}\right)^x-1$ și $g(x)=f(x)-1+x$.

a) Determină $g'(x)$ și $g''(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Stabilește semnul funcției g'' și precizează monotonia funcției g'.

c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcția g, demonstrează că există $c\in(0,1)$ astfel încât $g'(c)=0$. Arată că punctul c este unic.

d) Arată că funcția g este strict descrescătoare pe $(0,c)$ și strict crescătoare pe $(c,1)$, unde c este definit la c).

e) Arată că, pentru orice $x\in[0,1]$, $g(x)\leqslant 0$.

18. Determină numerele reale a și b astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln(1+|x^2+ax+b|)$ să aibă puncte de extrem în $x=1$, $x=3$ și $x=5$.

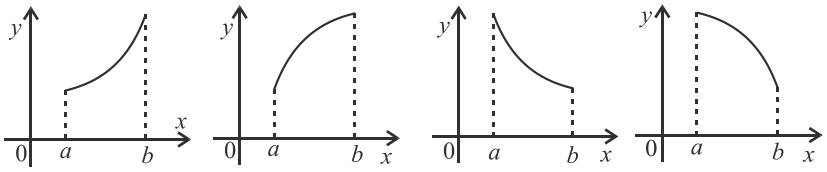
19. Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x+m}$, $m\in\mathbb{R}$, D fiind domeniul maxim de definiție al funcției f. Pentru ce valoare a lui m, abscisa punctului de minim este jumătate din abscisa punctului de maxim ?
(*Admitere 2000, Universitatea Transilvania Brașov*)

7. Rolul derivatei de ordinul al doilea în studiul funcțiilor

Funcțiile convexe au proprietatea remarcabilă de a admite în fiecare punct derivate laterale. Derivata de ordinul al doilea a unei funcții oferă informații despre convexitatea și concavitatea funcției și despre eventualele puncte de inflexiune ale acesteia.

Am văzut că semnul derivatei de ordinul întâi ne indică dacă o funcție este crescătoare sau descrescătoare pe un interval. Priviți următoarele reprezentări grafice ale unor funcții pe intervalul $[a, b]$:

♦ funcții strict crescătoare ♦ funcții strict descrescătoare



(1) (2) (3) (4)

Funcțiile reprezentate în (1) și (3) sunt convexe pe $[a, b]$, iar cele reprezentate în (2) și (4) sunt concave pe $[a, b]$. Vom defini, în continuare, aceste noțiuni.

Intervale de convexitate și concavitate ale unei funcții

Definiție.

Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval.

Funcția f se numește *convexă* pe I dacă, $\forall\, x_1, x_2 \in I$ și $\forall\, \lambda \in [0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2).$$

Funcția f se numește *concavă* pe I dacă, $\forall\, x_1, x_2 \in I$ și $\forall\, \lambda \in [0, 1]$,

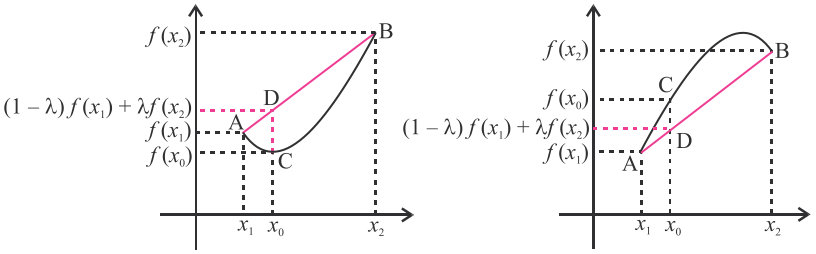
$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2)$$

Observație.

Funcția f este concavă dacă și numai dacă funcția $-f$ este convexă.

Interpretarea geometrică a definiției

Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$. Fixăm $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Orice punct $x_0 \in (x_1, x_2)$ se scrie sub forma $x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, cu $\lambda \in (0, 1)$.



Punctul $C(x_0, f(x_0))$ se află pe graficul lui f, iar punctul $D(x_0, (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2))$ se află pe coarda care unește punctele $A(x_1, f(x_1))$ și $B(x_2, f(x_2))$.

Dacă *funcția f este convexă pe* I, atunci punctul C este situat sub punctul D (adică $y_C \leqslant y_D$, sau $f(x_0) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$),

1) Reprezintă grafic următoarele funcții:

a) $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$;

b) $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$;

c) $f : [-5, -2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$;

d) $f : [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$.

Care dintre aceste funcții sunt crescătoare, descrescătoare, concave sau convexe (conform imaginilor alăturate)?

2) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Arată că $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (1-\lambda)\cdot a + \lambda \cdot b, \lambda \in [0, 1]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \lambda_1 a + \lambda_2 b, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$.

3) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_1, x_2, ..., x_n \in I$, de unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Atunci, pentru $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \geqslant 0$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, avem $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \in I$.

Să interpretăm definițiile funcțiilor convexe / concave.

4) Rescrie definiția funcției convexe și interpretarea ei geometrică pentru $\lambda = \frac{1}{2}$.

5) Rescrie definiția funcției concave și interpretarea ei geometrică pentru $\lambda = \frac{1}{2}$.

6) Verifică (folosind definițiile) și interpretează grafic reprezentările funcțiilor a), b), c), d), de la exercițiul 1.

7) Arată că $\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_0 & f(x_0) & 1 \end{vmatrix} = 0$,

unde $x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $\lambda \in [0, 1]$.

8) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă, atunci $\forall\, x_1, x_2 \in I$, $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, are loc inegalitatea:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

adică $f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$; porțiunea din graficul funcției cuprinsă între punctele A și B este situată sub segmentul (AB);

Dacă *funcția f este concavă pe* I, punctul C este situat deasupra punctului D (adică $y_C \geqslant y_D$, sau $f(x_0) \geqslant (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$), adică $f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \geqslant (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$, deci porțiunea din graficul funcției cuprinsă între punctele A și B este situată deasupra segmentului (AB).

Intervalele pe care o funcție este convexă (concavă) se numesc intervale de convexitate (concavitate) ale funcției.

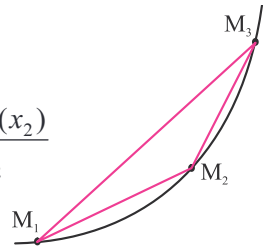
Observații.

♦ Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este convexă dacă și numai dacă $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I$ cu $x_1 < x_2 < x_3$, punctul $M_2(x_2, f(x_2))$ se află sub sau pe segmentul determinat de $M_1(x_1, f(x_1))$ și $M_3(x_3, f(x_3))$.

♦ Dacă f este convexă pe I, atunci despre pantele dreptelor M_1M_2, M_1M_3 și M_2M_3 putem afirma:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(1) (2)



Reciproc, dacă pentru orice puncte $x_1 < x_2 < x_3$ din intervalul I una dintre inegalitățile (1) sau (2) este adevărată, atunci funcția este convexă pe I.

Lemă.

Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este convexă, atunci pentru orice $x_0 \in I$ funcția (raport) $r: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ este crescătoare.

Demonstrație.

Fie $x, y \in I \setminus \{x_0\}$ cu $x < y$. Apar următoarele cazuri:

(I) $x_0 < x < y$; (II) $x < x_0 < y$; (III): $x < y < x_0$.

În cazul (I) considerăm inegalitatea (1) pentru $x_0 = x_1$, $x = x_2$, $y = x_3$ și obținem $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \Leftrightarrow r(x) \leqslant r(y)$.

Analog obținem inegalitatea $r(x) \leqslant r(y)$ și în cazurile (II) și (III).

Teoremă.

Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este convexă, atunci în orice punct interior intervalului I funcția admite derivate laterale finite.

Demonstrație.

Fie x_0 punct interior lui I; atunci există $x_n, y_n \in I$, $\forall n \geqslant 1$, cu $(x_n)_{n\geqslant 1}$ șir strict crescător convergent la x_0 și $(y_n)_{n\geqslant 1}$ șir strict descrescător convergent la x_0. Aplicând lema precedentă, rezultă $r(x_n) \leqslant r(y_1)$, $\forall\, n \geqslant 1$, $r(x_1) \leqslant r(y_n)$, $\forall\, n \geqslant 1$, $(r(x_n))_n$ șir crescător, iar $(r(y_n))_n$ șir descrescător. Conform teoremei lui Weierstrass,

9) Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție convexă, atunci $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \geqslant 0$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ are loc inegalitatea: $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant$
$\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$
(*inegalitatea Jensen*).

Dacă f este concavă, atunci are loc inegalitatea de sens contrar. Scrie această inegalitate.

10) Arată că:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ este convexă și concavă; ce concluzie putem trage?

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ este convexă pentru $a > 0$ și concavă pentru $a < 0$.

11) Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$ două funcții convexe. Arată că:

a) $f + g$ este convexă (*Bacalaureat 1999*);

b) $\alpha \cdot f$ este convexă pentru $\alpha > 0$.

12) Utilizând teorema unghiului exterior, demonstrează geometric echivalența inegalităților (1) și (2).

13) Arată că funcția

$$f: [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \\ 1, & x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

este convexă, dar este discontinuă în $x = 0$ și $x = 1$ (la capetele intervalului).

14) Considerăm funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Ce poți spune despre monotonia funcției f'? Studiază și cazul $a < 0$. Ce concluzie obții?

15) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ este de două ori derivabilă. Calculează $f''(x)$. Studiază semnul lui f''. Ce observi? (Vezi și exercițiul 14).

Consideră și cazul $a < 0$.

16) Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă și $a > 0$. Arată că:

a) dacă f și g convexe, atunci $f + g$ convexă;

b) dacă f și g concave, atunci $f + g$ concavă;

c) dacă f convexă, atunci af convexă;

d) dacă f concavă, atunci af concavă.

rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} r(x_n) = f_s'(x_0) \in \mathbb{R}$ și $\exists \lim\limits_{n\to\infty} r(y_n) = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$ (o funcție crescătoare are limite laterale finite în orice punct de acumulare al domeniului de definiție)

Consecință.

Dacă $f: (\alpha, \beta) \subset \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ este convexă, atunci f este continuă.

Demonstrație.

Fie a, b puncte interioare din (α, β). Aplicând teorema precedentă, obținem $f_s'(a) \leqslant f_d'(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f_s'(b) \leqslant f_d'(b)$.

Înmulțind cu $(b - a)$ inegalitățile precedente și trecând la limită după $b \to a$, obținem concluzia.

Teoremă.

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci f este convexă dacă și numai dacă f' este crescătoare.

Demonstrație.

Dacă f este convexă, fie $a, b \in I$, $a < b$. Din teorema precedentă avem $f_s'(a) \leqslant f_d'(a) \leqslant f_s'(b) \leqslant f_d'(b)$ și, cum f este derivabilă, derivatele laterale sunt egale, deci $f'(a) \leqslant f'(b)$, adică f' este crescătoare.

Reciproc, fie $x_1, x_2, x_3 \in I$ cu $x_1 < x_2 < x_3$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[x_1, x_2]$, respectiv $[x_2, x_3]$, rezultă că există $c_1 \in (x_1, x_2)$, $c_2 \in (x_2, x_3)$ astfel încât $f'(c_1) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ și $f'(c_2) = \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Din f' crescătoare și $c_1 < c_2$ rezultă $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, adică inegalitatea (1). Deci f este convexă.

Consecință. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe I.

a) f este convexă dacă și numai dacă $f'' \geqslant 0$;

b) f este concavă dacă și numai dacă $f'' \leqslant 0$.

Puncte de inflexiune ale unei funcții

Fie o funcție $f: (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a, b)$.

Definiție.

Spunem că x_0 este *punct de inflexiune* al funcției f dacă:

1) f continuă în x_0;

2) f are derivată în x_0 (finită sau infinită);

3) f este convexă pe (a, x_0) și concavă pe (x_0, b), sau f este concavă pe (a, x_0) și convexă pe (x_0, b).

Observație.

Dacă x_0 este un punct de inflexiune al funcției, atunci $M_0(x_0, f(x_0))$ se numește *punct de inflexiune al graficului funcției*.

17) Studiază convexitatea (concavitatea) următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2$;

e) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$;

f) $f: [0, \pi] \to [0, 1], f(x) = \sin x$.

18) Reprezintă grafic următoarele funcții și spune despre fiecare dacă este convexă sau concavă:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 1$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$.

Să stabilim intervalele de convexitate, concavitate și eventualele puncte de extrem pentru funcțiile de două ori derivabile.

19) Determină, dacă există, punctele de inflexiune ale fiecărei funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - x^3$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$;

g) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + \ln x$;

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^x$.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe I, $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$, astfel încât există un unic x_0 din interiorul lui I pentru care $f''(x_0) = 0$, iar pentru $x \in I$, $x < x_0$, $f''(x) > 0$ (respectiv $f''(x) < 0$) și pentru $x \in I$, $x > x_0$, $f''(x) < 0$ (respectiv $f''(x) > 0$).

Obținem cazurile:

x		x_0	
f'	+	+	+
f''	+	0	–
G_f		M	

x		x_0	
f'	+	+	+
f''	–	0	+
G_f		M	

x		x_0	
f'	–	–	–
f''	+	0	–
G_f		M	

x		x_0	
f'	–	–	–
f''	–	0	+
G_f		M	

Punctul $M(x_0, f(x_0)) \in \mathcal{G}_f$ este punct de inflexiune al graficului. Cum $f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$, ecuația tangentei în M este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ și tangenta traversează graficul $\mathcal{G}_f$.

Dacă f nu este derivabilă în x_0, dar are derivată în x_0 infinită și $f''(x) > 0$ (respectiv $f''(x) < 0$), $\forall\, x \in I$, $x < x_0$, iar $f''(x) < 0$ (respectiv $f''(x) > 0$), $\forall\, x \in I$, $x > x_0$, obținem încă două cazuri:

x		x_0		
f'	+	$+\infty$ |	$+\infty$	+
f''	+	|		–
G_f		M		

x		x_0		
f'	–	$-\infty$ |	$-\infty$	–
f''	–	|		+
G_f		M		

În aceste două cazuri, $M(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune al graficului lui f și tangenta în M la grafic este verticală, având ecuația $x = x_0$.

Concluzie.

Pentru a determina intervalele de convexitate/concavitate și punctele de inflexiune ale unei funcții derivabilă de două ori, procedăm astfel:

- calculăm f'';
- rezolvăm ecuația $f''(x) = 0$; soluțiile acestei ecuații sunt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f;
- stabilim intervalele pe care f'' are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate/concavitate ale lui f (dacă $f'' > 0$ pe I, atunci f este convexă pe I; dacă $f'' < 0$ pe I, atunci f este concavă pe I).

20) Funcția f satisface următoarele condiții într-o vecinătate V a punctului $x_0 = 1$.

a) $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$,

f este concavă pe V;

b) $f(1) = 2$, $f'(1) = \frac{1}{2}$,

f este strict crescătoare pe V,

$f''(x) < 0$, $\forall\, x \in V \cap (-\infty, 1)$;

c) $f(1) = 2$,

$f'_s(1) = f'_d(1) = -\infty$.

Imaginează și trasează curba reprezentativă a funcției f pe V.

21) Pentru funcțiile următoare, $x = 0$ este punct de inflexiune. Determină ecuația tangentei la graficul fiecărei funcții în punctul de abscisă $x = 0$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

22) Stabilește intervalele de convexitate/concavitate și eventualele puncte de inflexiune pentru fiecare din următoarele funcții:

a) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$;

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x$;

e) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$;

f) $f : \mathbb{R} \to [0, 2\pi]$, $f(x) = \sin x$;

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$;

h) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot e^x$.

EXEMPLU

Stabilește intervalele de convexitate/concavitate ale funcțiilor următoare și punctele de inflexiune ale acestora:

a) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x$.

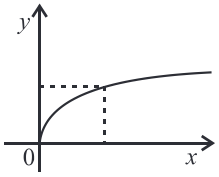
Soluție.

a) f este derivabilă pe $(0,\infty)$ și $f'_d(0)=+\infty$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; f' este derivabilă pe $(0,\infty)$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

Ecuația $f''(x)=0$ nu are soluții, dar $f''(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$. Deci f este concavă pe $(0,\infty)$ și nu are puncte de inflexiune.

x	$[0$		∞
f''	|	$-$	
f	0	⌒	

Observăm că reprezentarea grafică a funcției radical $f(x)=\sqrt{x}$ corespunde rezultatului obținut mai sus.



b) $f'(x)=3x^2-3$, $f''(x)=6x$; soluția ecuației $f''(x)=0$ este $x''=0$.

Pentru $x<0$, $f''(x)<0$ și pentru $x>0$, $f''(x)>0$. Deci f este concavă pe $(-\infty,0)$ și convexă pe $(0,\infty)$, având O(0, 0) ca punct de inflexiune. Observăm că graficul lui f este simetric față de O (f este impară).

x	$-\infty$	0	∞
f''	$-$	0	$+$
f	⌒	0	⌣

23) Stabilește intervalele de convexitate/concavitate și, dacă există, punctele de inflexiune ale următoarelor funcții definite pe domeniul maxim de definiție:

a) $f(x)=x^2+4x+1$;

b) $f(x)=-3x^2-x+2$;

c) $f(x)=x^3+9x^2-x+1$;

d) $f(x)=x^4-16$;

e) $f(x)=2x^5-3x+1$;

f) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

g) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

h) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$;

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

j) $f(x)=e^{-x^2}$;

k) $f(x)=x^2\ln x$;

l) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x-\cos x$;

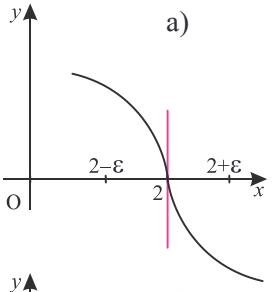
m) $f(x)=\ln(4x^2+1)$;

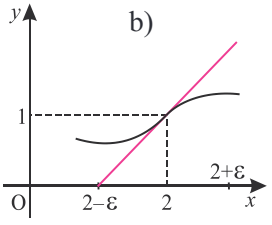
n) $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

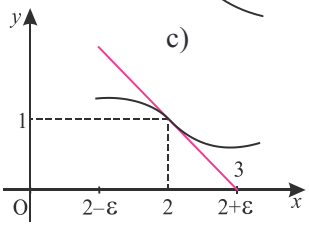
PROBLEME PROPUSE

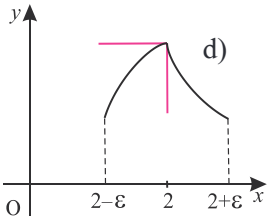
1. Completează tabelul de variație în fiecare dintre situațiile următoare:

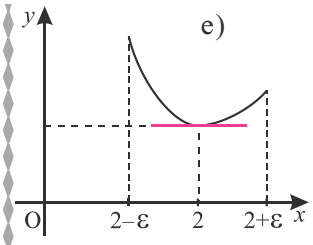
x	$2-\varepsilon$	2	$2+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ fixat
$f'(x)$	//////	?	//////
$f(x)$	//////	?	//////
$f''(x)$	//////	?	//////

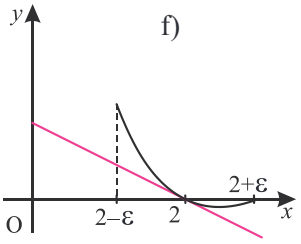












2. Utilizând concavitatea funcției $f(x)=\sqrt{x}$, arată că: $\forall\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\geqslant 0$ cu $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$ și $\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n\geqslant 0$, atunci $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}$.

3. a) Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$ este concavă?

b) Pentru oricare $a, b, c, x, y, z>0$ cu $a+b+c=1$ are loc egalitatea $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\geqslant\dfrac{1}{ax+by+cz}$.

4. a) Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ este concavă?

b) Pentru oricare $a, b, c, x, y, z>0$ cu $a+b+c=1$ are loc egalitatea $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\geqslant\dfrac{1}{ax+by+cz}$.

5. Dacă A, B, C sunt măsurile unghiurilor unui triunghi ABC, demonstrează că

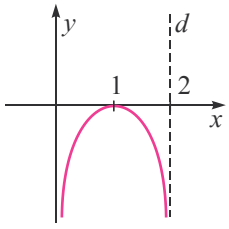
$\ln A+\ln B+\ln C\geqslant 3\ln\dfrac{\pi}{3}$.

Teste de evaluare

Testul 1

Considerăm funcția $f:(0,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(ax^2+bx)$, unde $a\in\mathbb{R}$ și $b\in\mathbb{R}$, având reprezentarea grafică alăturată:

Dreapta d are ecuația $x=2$.



1. Arată că: $f'(x)=\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx}$, $\forall x\in(0,2)$.

2. Presupunând că reprezentarea grafică a funcției f trece prin punctul $A(1,0)$ și admite în acest punct tangentă orizontală, determină a și b.

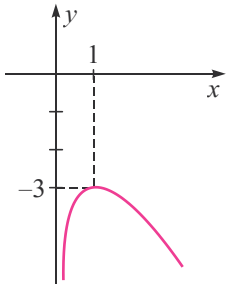
3. Fie funcțiile $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x^2+2x$ și $f:(0,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln g(x)$.

a) Determină $\lim\limits_{x\to0}g(x)$, apoi $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ și $\lim\limits_{x\to2}g(x)$, apoi $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

b) Calculează $g'(x)$ și arată că $f'(x)=\dfrac{-2x+2}{g(x)}$.

c) Studiază semnul funcției $f'(x)$ și completează tabelul semnului funcției f.

Testul 2



1. Considerăm funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x^2-2+2\ln x$, având reprezentarea grafică alăturată: Prin lectură grafică:

a) determină intervalele de monotonie ale funcție g;

b) determină semnul funcției g pe $(0,\infty)$.

2. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=-x+5-2\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Determină $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ și $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

b) Calculează derivata funcției f. Verifică dacă $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

c) Dedu semnul lui f', apoi determină intervalele de monotonie ale funcției f.

Testul 3

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\operatorname{arctg}x$.

a) Calculează $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculează $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Calculează $f''(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

d) Stabilește intervalele de monotonie ale funcției f.

e) Stabilește intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f.

f) Arată că funcția f este inversabilă.

g) Calculează $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, & x<1\\ e^{-x^2}, & x\geqslant1\end{cases}$.

a) Determină numerele reale α și β, astfel încât funcția f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru α și β determinate la punctul a), arată că $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

3. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $\lambda_n=e-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ (e este „numărul lui Euler”). Se consideră funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda_n(1-x)^{n+1}+e^x\left[1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(1-x)^k}{k!}\right]$.

a) Arată că $f(0)=f(1)$.

b) Arată că $f'(x)=\dfrac{(1-x)^n}{n!}\left[e^x-(n+1)!\lambda_n\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Aplică teorema lui Rolle restricției funcției f la intervalul $[0,1]$ și arată că există $\theta\in(0,1)$ astfel încât $\lambda_n=\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}$.

d) Arată că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)=e$.

Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Reprezentarea grafică a funcțiilor

A reprezenta grafic o funcție $f : D \to \mathbb{R}$ înseamnă a trasa (a desena) într-un reper cartezian graficul lui f, $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

Reprezentarea grafică a unei funcții este utilă în ilustrarea unor proprietăți locale și globale ale acesteia și, implicit, în aplicațiile din care provine sau în care este utilizată funcția respectivă.

Vom prezenta un mod de lucru sistematic în reprezentarea grafică a unei funcții. Recomandăm parcurgerea următoarelor *etape de determinare* succesivă *a unor elemente caracteristice*, importante ale funcției.

I. *Domeniul de definiție al funcției* (conține toate informațiile legate de domeniul de definiție al funcției, notat cu D).

♦ *Stabilirea domeniului de definiție* (acesta fie este dat în mod explicit prin definirea funcției respective, fie este subînțeles ca fiind domeniul maxim de definiție și se determină).

♦ *Găsirea* (*dacă există*) *a intersecțiilor graficului cu axele de coordonate*

– intersecțiile cu axa Ox ($y = 0$) sunt puncte de forma $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, ..., unde $x_1, x_2, \ldots$ sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$ (dacă există!);

– intersecția cu axa Oy ($x = 0$) este punctul de forma $(0, f(0))$ (dacă punctul 0 aparține domeniului de definiție!)

♦ *Calcularea valorilor funcției (dacă este cazul, a limitelor funcției) la capetele domeniului de definiție și determinarea asimptotelor funcției* (*dacă există*): ne interesează comportarea funcției la capetele domeniului de definiție, obținând astfel informații despre eventualele asimptote verticale sau orizontale ale funcției; dacă funcția nu admite asimptote orizontale la $+\infty$ sau la $-\infty$, verificăm dacă funcția admite asimptotă oblică la $+\infty$, respectiv la $-\infty$.

SĂ NE AMINTIM

• Dacă x_0 este un punct de acumulare pentru D, $x_0 \notin D$ și dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty$ sau $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty$, atunci dreapta $x = x_0$ este *asimptotă verticală* a funcției f la stânga sau la dreapta lui x_0. Deci ne punem problema existenței asimptotelor verticale dacă D, domeniul de definiție, are puncte de acumulare

Să reprezentăm grafic!

1) Determină: a) domeniul de definiție;
b) punctele de intersecție (dacă există) ale graficului funcției f cu axele de coordonate;
c) valorile funcției la capetele domeniului de definiție;
d) determină asimptotele funcției (dacă există), pentru fiecare din funcțiile:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 1$;
3) $f(x) = x^4 + 1$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;
5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$; 6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$;
7) $f(x) = x^3$; 8) $f(x) = x^4$;
9) $f(x) = \sqrt{x}$; 10) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
11) $f(x) = 2^x$; 12) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;
13) $f(x) = e^x$; 14) $f(x) = \ln x$;
15) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; 16) $f(x) = \log_2 x$;
17) $f(x) = \sin x$; 18) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
19) $f(x) = \arcsin x$; 20) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2) Pentru fiecare dintre aceste funcții:
a) determină f' și găsește eventualele puncte de extrem;
b) determină f'' și găsește eventualele puncte de inflexiune;
c) completează tabelul de variație;
d) trasează graficul fiecărei funcții în parte.

3) Figura următoare reprezintă graficul unei funcții, $\mathcal{G}_f$ și graficul derivatei funcției, $\mathcal{G}_{f'}$, în același reper xOy. Identifică $\mathcal{G}_f$ și $\mathcal{G}_{f'}$.

care nu aparțin lui D (pentru funcții care au numitor se cercetează punctele în care se anulează numitorul).

• Dacă D conține intervale nemărginite și $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ (l finit), atunci dreapta $y = l$ este *asimptotă orizontală* a funcției f.

• Dacă D conține intervale nemărginite și $\exists\, m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (m finit), $\exists n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right)$ (n finit), atunci dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică* a funcției f la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

♦ *Studierea continuității funcției pe D și determinarea mulțimii pe care funcția f este derivabilă.*

II. *Derivata de ordinul întâi* (dă informații despre *monotonia* funcției și despre *punctele de extrem* ale acesteia)

♦ Calculăm f'.

♦ Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ (soluțiile acestei ecuații, notate x_1', x_2', ..., sunt eventualele *puncte de extrem* ale funcției).

♦ Stabilim semnul derivatei întâi, adică intervalele pe care f' are semn constant; acestea sunt *intervalele de monotonie* ale lui f (dacă $f' > 0$ pe I, atunci f este strict crescătoare pe I; dacă $f' < 0$ pe I, atunci f este strict descrescătoare pe I).

III. *Derivata de ordinul al doilea* (dă informații despre *convexitatea/concavitatea* funcției și despre *punctele de inflexiune* ale acesteia)

♦ Calculăm f''.

♦ Rezolvăm ecuația $f''(x) = 0$ (soluțiile acestei ecuații, notate x_1'', x_2'', ..., sunt eventualele *puncte de inflexiune* ale funcției).

♦ Stabilim semnul derivatei a doua, adică intervalele pe care f'' are semn constant; acestea fiind *intervalele de convexitate / concavitate* ale lui f (dacă $f'' > 0$ pe I, atunci f este convexă pe I; dacă $f'' < 0$ pe I, atunci f este concavă pe I).

IV. *Tabelul de variație* (sistematizează rezultatele obținute în etapele anterioare).

♦ Pe prima linie se trec, în ordine crescătoare, valorile remarcabile ale lui x (domeniul de definiție, abscisele intersecțiilor graficului cu axele, zerourile derivatei întâi, zerourile derivatei a doua).

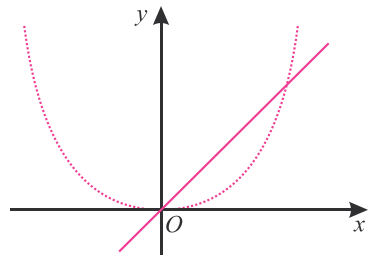
♦ Pe a doua linie se trec informațiile referitoare la derivata întâi, obținute în etapa a II-a.

♦ Pe a treia linie se trec valorile lui f corespunzătoare valorilor lui x din prima linie și săgețile corespunzătoare monotoniei lui f.

♦ Pe ultima linie se trec informațiile referitoare la derivata a doua obținute în etapa a III-a și simbolurile pentru convexitatea sau concavitatea funcției (dacă s-a determinat și derivata a doua).

V. *Trasarea graficului*

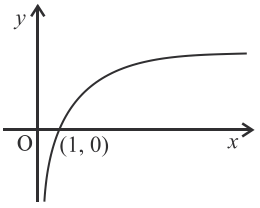
Într-un reper cartezian xOy reprezentăm asimptotele funcției (dacă există) și punctele remarcabile $(x, f(x))$ din tabelul de variație. Unim printr-o linie curbă punctele obținute, ținând seama de asimptotele, monotonia, convexitatea sau concavitatea funcției f.



4) Verifică dacă obții tabelul de variație și reprezentarea grafică a următoarelor funcții:

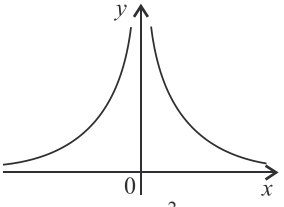
a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = \ln x$

x	0		1		∞
f'		$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f''		$-$		$-$	



b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	|	$-$	
f	0	$\nearrow$	∞ | ∞	$\searrow$	0
f''		$+$	|	$+$	



Observăm că funcția f este pară (graficul este simetric față de Oy).

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{|x-1|}$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	|	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$
f''		$+$		$+$		$+$	|	$+$		$+$	

Observații.

♦ Tabelul nu trebuie să conțină elemente contradictorii. Eventualele neconcordanțe din tabel provin din greșeli de calcul.

♦ Dacă determinarea derivatei a doua este laborioasă, se poate renunța la studierea acesteia, convexitatea/concavitatea funcției rezultând prin corelarea celorlalte informații.

♦ Este util să observăm anumite proprietăți ale funcției studiate:

• Dacă $f \geqslant 0$ (respectiv $f \leqslant 0$), atunci graficul lui f este situat deasupra axei Ox (respectiv sub axa Ox).

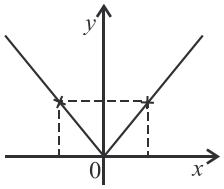
• Dacă D este o mulțime simetrică și f este o funcție *pară* ($f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in D$), atunci graficul lui f este simetric față de axa Oy. Dacă D este o mulțime simetrică și f este o funcție *impară* ($f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in D$), atunci graficul lui f este simetric față de origine. Pentru o funcție pară sau impară se poate studia funcția pe $D \cap [0, \infty)$ și trasarea reprezentării grafice se face prin simetrie (față de Oy sau față de O) pe D.

• Dacă f este o funcție *periodică*, atunci studiul se face pe un interval de lungime egală cu perioada principală a funcției, graficul funcției fiind trasat pe D prin translație.

EXEMPLE

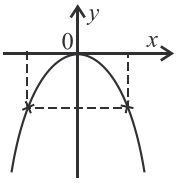
1) Funcția $f(x) = |x|$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este pozitivă, adică $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; graficul ei este situat deasupra axei Ox.

Deoarece $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcția f este pară și reprezentarea grafică este simetrică față de axa Oy.

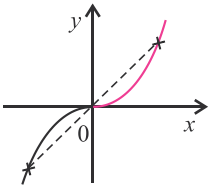


2) Funcția $f(x) = -x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este negativă, adică $f(x) \leqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; graficul ei este situat sub axa Ox.

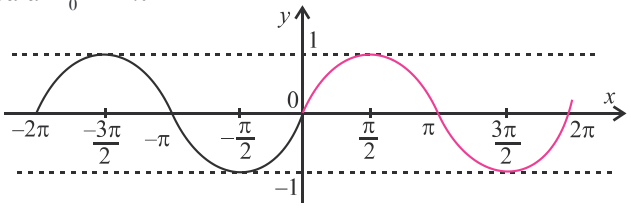
Deoarece $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcția f este pară și reprezentarea grafică este simetrică față de axa Oy.



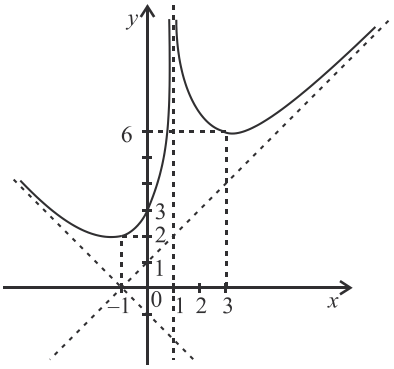
3) Funcția $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este impară: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; graficul ei este simetric față de origine.



4) Funcția $f(x) = \sin x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică, cu perioada principală $T_0 = 2\pi$

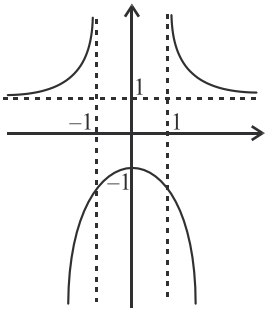


Deoarece $f(x + 2k\pi) = \sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, atunci $T = 2k\pi$.

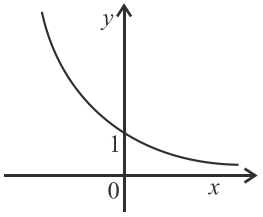


5) Stabilește domeniile de definiție, reprezintă grafic funcțiile și verifică dacă obții graficul alăturat fiecăreia:

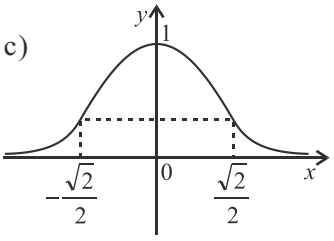
a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$



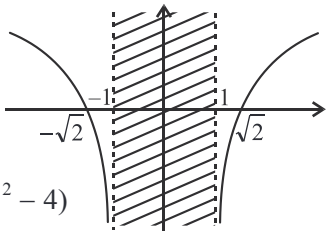
b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$



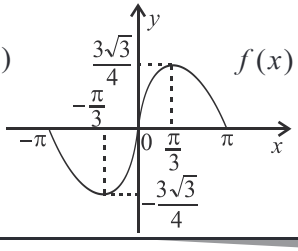
c) $f(x) = e^{-x^2}$



d) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$



e) $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$



Exerciții rezolvate. Reprezintă grafic funcțiile următoare:

1) $f(x) = x^{2n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

$\cap\, Ox$ $(y = 0)$: avem $x^{2n} = 0$ cu soluția $x = 0$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O(0, 0)$, care este și punctul de intersecție cu axa Oy.

Asimptote:

- funcția nu admite asimptote verticale;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{2n} = \infty$, deci funcția nu admite asimptote orizontale;
- $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{2n-1} = \pm\infty$, deci funcția nu admite asimptote oblice.

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe $\mathbb{R}$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x) = 2nx^{2n-1}$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x'_1 = 0$ și semnul derivatei întâi este dat în următorul tabel:

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

III. *Studiul derivatei a doua*

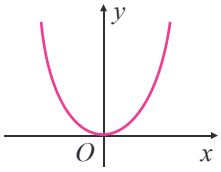
$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x''_1 = 0$ și semnul derivatei a doua este dat în următorul tabel:

x		0	
$f''(x)$	$+$	0	$+$

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



Observație. Reprezentarea grafică de mai sus se numește *parabolă*.

2) $f(x) = x^{2n+1}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele

$\cap Ox$ $(y = 0)$: avem $x^{2n+1} = 0$ cu soluția $x = 0$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O(0, 0)$, care este și punctul de intersecție cu axa Oy.

Asimptote:

- funcția nu admite asimptote verticale;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{2n+1} = \pm\infty$, deci funcția nu admite asimptote orizontale;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{2n} = +\infty$, deci funcția nu admite asimptote oblice.

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe $\mathbb{R}$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x) = (2n + 1)x^{2n}$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x'_1 = 0$ și semnul derivatei întâi este dat în următorul tabel:

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$

III. *Studiul derivatei a doua*

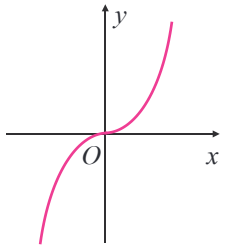
$f''(x) = (2n+1)2nx^{2n-1}$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x''_1 = 0$ și semnul derivatei a doua este dat în următorul tabel:

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



Observație. Reprezentarea grafică de mai sus se numește *parabolă cubică*.

3) $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox$ ($y = 0$): avem $-x^3 + 3x^2 = 0$, adică $x_1 = 0$ și $x_2 = 3$, deci graficul intersectează axa Ox în punctele (0, 0) și (3, 0);

• $\cap Oy$ ($x = 0$) este punctul (0, 0) deja obținut

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(-x^3 + 3x^2) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3 + 3x^2) = \infty$, deci funcția nu admite asimptote orizontale;

• $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^2 + 3x) = -\infty$, deci funcția nu admite asimptote oblice;

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe $\mathbb{R}$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x) = -3x^2 + 6x$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1' = 0$ și $x_2' = 2$ și semnul derivatei este dat în tabelul următor:

x		0		2	
$f'(x)$	–	0	+	0	–

III. *Studiul derivatei a doua*

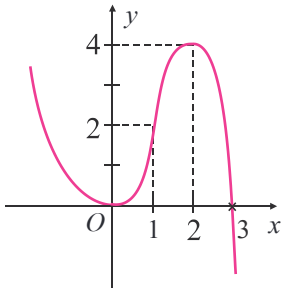
$f''(x) = -6x + 6$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1'' = 1$ și semnul derivatei a doua este dat în tabelul următor:

x		1	
$f''(x)$	+	0	–

IV. *Tabelul de variație:*

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	+		0	–	–		
$f(x)$	∞	↘	0	↗	2	↗	4	↘	0	↘	$-\infty$
$f''(x)$		+	+		0		–	–	–		

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



4) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$.

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox$ ($y = 0$): $\dfrac{1}{3}x^3 - x = 0$, adică $x(x^2 - 3) = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ și $x_3 = -\sqrt{3}$, deci graficul intersectează axa Ox în trei puncte (0, 0), $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$;

• $\cap Oy$ ($x = 0$) este punctul (0, 0) obținut deja.

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, deci funcția nu admite asimptote orizontale;

• $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, deci funcția nu admite asimptote oblice;

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe $\mathbb{R}$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x) = x^2 - 1$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1' = 1$ și $x_2' = -1$; semnul derivatei întâi este dat în tabelul următor:

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	–	0	+

III. *Studiul derivatei a doua*

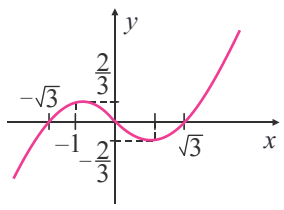
$f''(x) = 2x$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1'' = 0$; semnul derivatei a doua este dat în tabelul următor:

x		0	
$f''(x)$	–	0	+

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	–		–	0	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}$	↘	0	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$		–		–		–	0	+		+		+	

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



Observație. Reprezentările grafice ale funcțiilor polinomiale nu au asimptote.

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^{2n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intersecțiile cu axele:

Graficul lui f nu intersectează axa Ox (deoarece $f(x) \neq 0$, $\forall x \in D$) și f nu intersectează axa Oy (deoarece $x \neq 0$).

Asimptote:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, deci f admite dreapta $x = 0$ ca asimptotă verticală;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, deci f admite dreapta $y = 0$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$ și la $-\infty$;
- funcția nu admite asimptotă oblică (deoarece admite asimptotă orizontală și la $+\infty$ și la $-\infty$).

Funcția f nu este definită în 0, deci funcția f este *continuă* și *derivabilă* pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x)=-\dfrac{2n}{x^{2n+1}}$, având semnul dat de tabelul:

x		0	
$f'(x)$	+	|	–

III. *Studiul derivatei a doua*

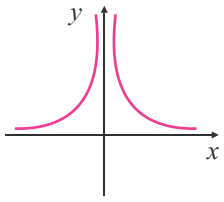
$f''(x)=\dfrac{2n(2n+1)}{x^{2n+2}}$, având semnul dat de tabelul:

x		0	
$f''(x)$	+	|	+

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	–	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	0
$f''(x)$		+	|	+	

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



6) $f(x)=\dfrac{1}{x^{2n+1}}$, cu $n \in \mathbb{N}$.

I. *Domeniul de definiție al funcției este* $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intersecțiile cu axele:

Graficul lui f nu intersectează axa Ox (deoarece $f(x) \neq 0$, $\forall x \in D$) și f nu intersectează axa Oy (deoarece $x \neq 0$).

Asimptote:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, deci f admite dreapta $x = 0$ ca asimptotă verticală;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, deci f admite dreapta $y = 0$ ca asimptotă orizontală.
- funcția nu admite asimptotă oblică (deoarece admite asimptotă orizontală și la $+\infty$ și la $-\infty$).

Funcția f nu este definită în 0, deci funcția f este *continuă* și *derivabilă* pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x)=-\dfrac{2n+1}{x^{2n+2}}$, având semnul dat de tabelul:

x		0	
$f'(x)$	–	|	–

III. *Studiul derivatei a doua*

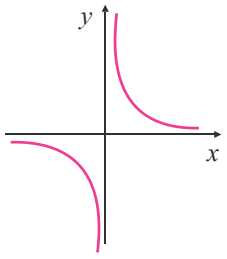
$f''(x)=\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{x^{2n+3}}$, cu semnul dat de tabelul:

x		0	
$f''(x)$	–	|	+

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		–	|	–	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0
$f''(x)$		–	|	+	

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



7) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$.

I. *Domeniul de definiție*

Punem condiția ca numitorul să fie diferit de 0, deci $x^2+2x-3\neq 0$, adică $x_1\neq -3$ sau $x_2\neq 1$; deci $D=\mathbb{R}\setminus\{-3, 1\}$.

• $\cap Ox$ $(y=0)$: $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}=0$, de unde $x^2-2x+3=0$ cu $\Delta=-8$, adică nu există x real astfel încât $y=0$; deci graficul funcției f nu intersectează axa Ox;

• $\cap Oy$ $(x=0)$: $f(0)=-1$, deci $(0, -1)$ este punctul de intersecție cu axa Oy.

Asimptote:

• $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} f(x)=-\infty$, deci dreapta $x=-3$ este asimptotă verticală a funcției f;

• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$, deci dreapta $x=1$ este asimptotă verticală a funcției f;

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}=1$, deci dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală a funcției f către $+\infty$ și $-\infty$.

• funcția nu admite asimptotă oblică (deoarece admite asimptotă orizontală la $\pm\infty$).

Funcția f este continuă și derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ și $(1, \infty)$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x)=\dfrac{4x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$, cu semnul dat de tabelul:

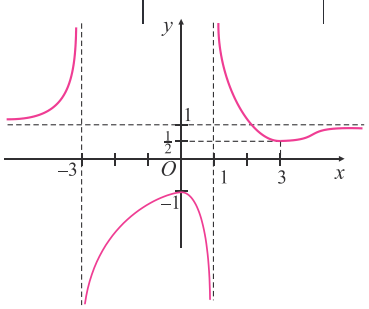
x		-3		0		1		3	
$4x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$				$-$				0	$+$
$(x^2+2x-3)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$

III. *Studiul derivatei a doua* este mai complicat, fiind calcule mai multe; vom deduce convexitatea și concavitatea funcției prin corelarea celorlalte date obținute.

IV.

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow +\infty$	$\vert$	$-\infty\nearrow -1$		$\searrow -\infty$	$\vert$	$+\infty\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow 1$	

V.



8) $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

I. *Domeniul de definiție* este $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox$ $(y=0)$: avem $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0$ cu soluția $x=\dfrac{1}{2}$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

• $\cap Oy$ $(x=0)$: este punctul $(0, -1)$.

Asimptote:

• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$, deci f admite dreapta $x=1$ ca asimptotă verticală;

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, deci f admite dreapta $y=0$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$ și $-\infty$;

• funcția nu admite asimptotă oblică.

Funcția nu este definită în 1, deci funcția f este *continuă* și *derivabilă* pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, \infty)$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x-1)^3}$, având semnul dat de tabelul:

x		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$

III. *Studiul derivatei a a doua*

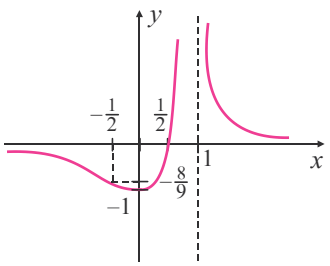
$f''(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$, având semnul dat de tabelul:

x		$-\frac{1}{2}$		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f'		$-$	$-$		0	$+$		$+$	$\vert$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{8}{9}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$	$\vert$	$+\infty\searrow$	0
f''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		$\vert$	$+$	

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



9) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$.

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\cap Ox$ ($y = 0$): avem $\dfrac{(x-1)^2}{x+1}=0$ cu soluția $x = 1$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O(1, 0)$.

$\cap Oy$ ($x = 0$): este punctul $(0, 1)$.

Asimptote:

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} =+\infty$, deci dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, funcția nu admite asimptotă orizontală.
- $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$; $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x+1}{x}=-3$, deci $y = x - 3$ este asimptotă oblică.

Funcția nu este definită în -1, deci funcția este continuă și derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$ și $(-1, \infty)$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ are semnul dat de tabelul:

x		-3		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$

III. *Studiul derivatei a a doua*

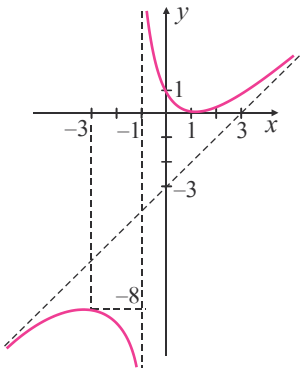
$f''(x)=\dfrac{8}{(x+1)^3}$ are semnul dat de tabelul:

x	$-\infty$		-1	
$f''(x)$		$-$	|	$+$

IV.

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$	|	$+\infty$	↘	1	↘	0 ↗ $+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$		|	$+$			$+$	

V.



10) $f(x)=\sqrt[2n]{x}$, $n\in\mathbb{N}^*$

I. *Domeniul de definiție* este $D = [0, \infty)$

Intersecțiile cu axele:

- $\cap Ox$ ($y = 0$) și $\cap Oy$ ($x = 0$) în punctul $(0, 0)$.

Asimptote:

f nu admite asimptote verticale, orizontale sau oblice.

Funcția f este *continuă* pe $[0, \infty)$ și *derivabilă* pe $(0, \infty)$.

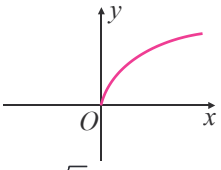
II. *Studiul derivatei întâi* $f'(x)=\dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}$

III. *Studiul derivatei a doua* $f''(x)=-\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[2n]{x^{4n-1}}}$

IV. *Tabelul de variație*

x	0		$+\infty$
f'	|	$+$	
f	0	↗	∞
f''	|	$-$	

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



11) $f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R}$

Intersecțiile cu axele:

- $\cap Ox$ ($y = 0$) și $\cap Oy$ ($x = 0$) în punctul $(0, 0)$.

Asimptote:

f nu admite asimptote verticale, orizontale sau oblice.

Funcția f este *continuă* pe $\mathbb{R}$ și *derivabilă* pe $\mathbb{R}^*$.

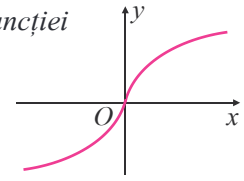
II. *Studiul derivatei întâi* $f'(x)=\dfrac{1}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$

III. *Studiul derivatei a doua* $f''(x)=-\dfrac{2n}{(2n+1)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{x^{4n+1}}}$

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	|	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
f''		$+$	|	$-$	

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



12) $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$

I. *Domeniul de definiție*

Din $x^2-1\geqslant 0$, obținem $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

• $\cap\, Ox$ $(y=0)$: $\sqrt{x^2-1}=0$, adică $x_1=-1$ și $x_2=1$, deci graficul intersectează axa Ox în punctele $(-1, 0)$ și $(1, 0)$;

• $\cap\, Oy$: graficul nu intersectează axa Oy deoarece $x\neq 0$.

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}=+\infty$, funcția nu are asimptote orizontale;

• $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$,

deci dreapta $y=\frac{1}{2}x$ este asimptotă oblică la $+\infty$;

• $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{2}$ și $n'=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$ de

unde dreapta $y=-\frac{1}{2}x$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Funcția este *continuă* pe fiecare interval $(-\infty,-1]$ și $[1,\infty)$ și *derivabilă* pe fiecare interval $(-\infty,-1)$ și $(1,\infty)$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$, $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; ecuația $f'(x)=0$ nu are soluții reale ($x_1'=0\notin D$).

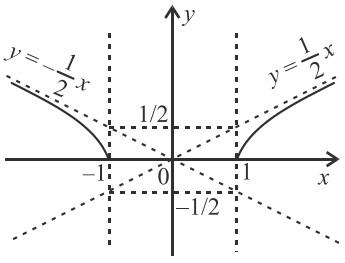
III. *Studiul derivatei a doua*

$f''(x)=-\frac{1}{2\sqrt{(x^2-1)^3}}$; ecuația $f''(x)=0$ nu are soluții.

IV.

x	$-\infty$		-1	$///$	1		$+\infty$
f'		$-$	$-\infty$	$///$	∞	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$///$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f''		$-$	$-\infty$	$///$	$-\infty$	$-$	

V.



13) $f(x)=\ln(x^2-1)$

I. *Domeniul de definiție*

Din condiția $x^2-1>0$, obținem $D=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

$\cap\, Ox$: $(y=0)$: $\ln(x^2-1)=0$ cu soluțiile $x_1=-\sqrt{2}$ și $x_2=\sqrt{2}$;

$\cap\, Oy$: graficul nu intersectează axa Oy deoarece $x=0\notin D$.

• $\lim\limits_{x\nearrow-1}\ln(x^2-1)=-\infty$, deci dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la stânga; $\lim\limits_{x\searrow1}\ln(x^2-1)=-\infty$, deci dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la dreapta.

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln(x^2-1)=\infty$, funcția nu admite asimptote orizontale

• nu admite asimptotă oblică (deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0=m$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$).

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe fiecare din intervalele $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$; ecuația $f'(x)=0$ nu are soluții în D.

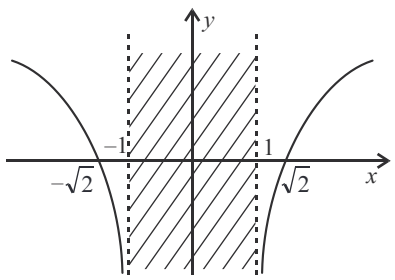
III. *Studiul derivatei a doua*

$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$; ecuația $f''(x)=0$ nu are soluții.

IV.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1	$///$	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$///$		$+$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$///$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f''		$-$		$-$		$///$		$-$		$-$	

V.



Observație. Funcțiile din exercițiile 12 și 13 fiind funcții pare, în fiecare caz se poate studia și trasa graficul numai pe intervalul $(1,+\infty)$, iar apoi pe $(-\infty,-1)$ se trasează prin simetrie față de Oy.

14) $f(x) = xe^{-x}$.

I. *Domeniul de definiție* este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox$ $(y = 0)$, obținem $xe^{-x} = 0$, deci $x = 0$; punctul $O(0, 0)$ este punctul de intersecție cu axele de coordonate.

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, deci funcția admite dreapta $y = 0$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$;

• $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$, deci funcția nu admite asimptotă oblică la $-\infty$.

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe $\mathbb{R}$.

II. *Studiul derivatei întâi*

$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1' = 1$; semnul derivatei întâi este dat în tabelul:

x		1	
$f'(x)$	+	0	–

III. *Studiul derivatei a doua*

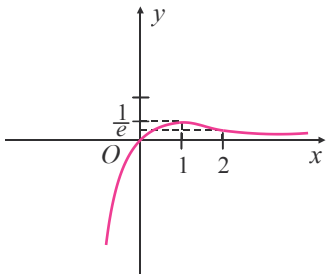
$f''(x) = e^{-x}(x-2)$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1'' = 2$; semnul derivatei a doua este dat în tabelul:

x		2	
$f''(x)$	–	0	+

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	–		–	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘	0
$f''(x)$		–		–		–	0	+	+

V. *Reprezentarea grafică a funcției*



15) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

I. *Domeniul de definiție*

$D = \mathbb{R}$; deoarece funcția f este periodică, de perioadă principală 2π, este suficient să studiem comportarea funcției pe intervalul $I = [-\pi, \pi]$ de lungime 2π.

$\cap Ox$ $(y = 0)$: $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$, $\sin x + \sin x\cos x = 0$, $\sin x(1 + \cos x) = 0$, de unde $\sin x = 0$ sau $\cos x = -1$, cu soluțiile $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$; deci punctele de intersecție cu axa Ox sunt $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$.

Deoarece graficul trece prin punctul $(0, 0)$, acesta este și punctul de intersecție cu axa Oy.

Asimptote:

Funcția nu admite asimptote verticale deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Funcția fiind periodică, nu admite asimptote orizontale sau oblice.

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe $\mathbb{R}$.

II. *Studiul derivatei întâi*

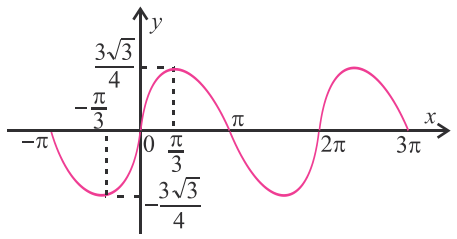
$f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$; ecuația $f'(x) = 0$ are în $[-\pi, \pi]$ soluțiile $x_1' = -\pi$, $x_2' = -\frac{\pi}{3}$, $x_3' = \frac{\pi}{3}$, $x_4' = \pi$.

III. Renunțăm la *studiul derivatei a doua*.

IV. *Tabelul de variație*

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
f'	0	–	0	+	0	–	0
f	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

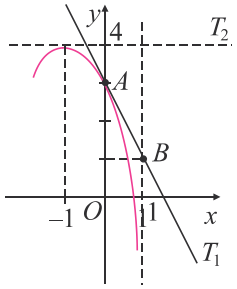
V. *Reprezentarea grafică a funcției*



Observație. Funcția f fiind periodică, am trasat graficul pe un interval de lungime: $T_0 = 2\pi$, $I = [-\pi, \pi]$ și translatăm graficul obținut pe axa Ox pe intervalele de forma $[-3\pi, -\pi]$, $[\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 5\pi]$ etc.

Exercițiu rezolvat.

Într-un reper cartezian xOy, $\mathcal{G}_f$ este graficul unei funcții $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ având reprezentarea grafică alăturată. Dreapta T_1 este tangenta la grafic în punctul de abscisă 0 și dreapta T_2 este singura tangentă paralelă cu axa absciselor.



a) Rezolvă grafic ecuația $f'(x) = 0$, unde f' este funcția derivată a funcției $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$.

b) Rezolvă grafic inecuația $f'(x) < 0$, unde f' este funcția derivată a funcției $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$.

c) Știind că tangenta T_1 la grafic în punctul A de abscisă 0 trece prin punctul $B(1, 1)$, găsește coeficientul unghiular al dreptei T_1.

d) Dedu $f'(0)$.

e) Presupunem că funcția $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ este definită astfel: $f(x) = 3 - 2xe^x$.

i) Calculează $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, știind că $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; interpretează grafic acest rezultat.

ii) Rezolvă grafic inecuația $f(x) > 3$.

iii) Calculează derivata funcției f și studiază semnul funcției f' pe $(-\infty, 1]$.

iv) Dedu variația funcției f.

Soluție.

a) Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt abscisele punctelor în care reprezentarea grafică are tangentă orizontală. Avem o singură soluție $x = -1$.

b) $f'(x) < 0$ pe intervalul pe care funcția f este descrescătoare, adică $x \in (-1, 1]$.

c) $m_{T_1} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{1-0} = -2$.

d) Din a) deducem $f'(0) = -2$.

e) i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, deci dreapta de ecuație $y = 3$ este asimptotă orizontală a funcției la $-\infty$.

ii) Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) > 3$ este $(-\infty, 0)$, conform reprezentării grafice a funcției f.

iii) Pentru $\forall x \in (-\infty, 1]$, $f'(x) = -2(x + 1)e^x$; cum $e^x > 0$, $\forall x \in (-\infty, 1]$, atunci $f'(x) \geqslant 0$ este echivalentă cu $-2(x + 1) \geqslant 0$, adică $x \leqslant -1$. Deci $x < -1$, $f'(x) > 0$ și $x > -1$, $f'(x) < 0$ și $f'(-1) = 0$.

iv) $f(-1) = 3 + 2e^{-1} \simeq 3{,}74$.

x	$-\infty$		-1		1
f'		$+$	0	$-$	
f	3	$\nearrow$	$3+2e^{-1}$	$\searrow$	$3-2e$

Reprezintă grafic funcțiile următoare:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x$.

3. $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

4. $f : \mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

5. $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

6. $f : \mathbb{R}\setminus\{-2, +2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

8. $f : [0,\infty)\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$.

9. $f : (-\infty,-2]\cup[0,\infty)$; $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x}$.

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$.

11. $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

12. $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

13. $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-\ln(\sin x)}$.

14. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

15. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\cdot\arcsin\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

16. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x, x^2, 1\}$.

17. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{x\cdot\operatorname{arctg}x, \ln(x^2+1)\}$.

Fie D domeniul maxim de definiție pentru fiecare dintre funcțiile următoare ($f : D \to \mathbb{R}$). Determină D și trasează graficul funcției în fiecare caz.

18. $f(x) = \dfrac{|x|}{|x^2-1|}$.

19. $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{|1-x^4|}}{x}$.

21. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.

22. $f(x) = \dfrac{\ln x + x^2}{\ln x - x^2}$.

23. $f(x) = |x-1|\dfrac{1}{e^x}$.

24. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$.

25. $f(x) = \arcsin\dfrac{1+x}{1+x^2}$.

2. Aplicații ale unor proprietăți locale sau globale ale funcțiilor

Probleme de maxim sau de minim

Există probleme practice de geometrie, fizică, mecanică etc. în care se cere cea mai mare sau cea mai mică valoare pe care o ia o anumită mărime variabilă (lungime, arie, volum, timp, forță, preț, consum de material etc.).

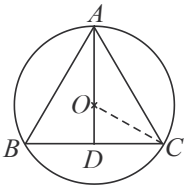
Cum rezolvăm o problemă de maxim sau de minim?

Procedăm astfel:

• se alege o *variabilă independentă*;

• se exprimă mărimea al cărei maxim sau minim se cere, în *funcție* de variabila independentă aleasă;

• se calculează *derivata* funcției, se egalează cu zero și se determină valorile variabilei pentru care *funcția* este *maximă* sau *minimă*.



1) Determină triunghiul isoscel, de arie maximă, înscris într-un cerc de rază egală cu 2.

Rezolvare.

Alegem ca *variabilă independentă* înălțimea $AD = x$, $x \in [0, 4]$.

Exprimăm aria triunghiului $A_{\Delta ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$ (1), unde $BC = 2 \cdot DC = 2\sqrt{OC^2 - OD^2}$;

ținând cont că $OC = 2$ și $OD = x - 2$, obținem: $BC = 2\sqrt{4-(x-2)^2} = 2\sqrt{4x - x^2}$.

Înlocuind în (1) obținem *funcția* $A(x) = x\sqrt{4x - x^2}$.

Calculăm *derivata* acestei funcții și obținem: $A'(x) = \sqrt{4x - x^2} + x \cdot \dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{4x - x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \dfrac{6x - 2x^2}{\sqrt{4x - x^2}}$.

$A'(x) = 0$ implică $6x - 2x^2 = 0$, adică $2x(3 - x) = 0$, cu soluțiile $x'_1 = 0$ (soluție care nu convine problemei deoarece nu există un triunghi cu o înălțime egală cu zero) sau $x'_2 = 3$.

Semnul derivatei întâi este dat în tabelul alăturat, deci pentru $x = 3$ funcția $A(x)$ admite un maxim egal cu $3\sqrt{3}$.

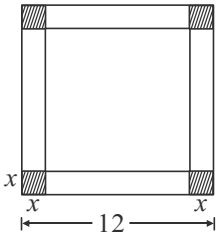
x	0		3		4		$+\infty$
$A'(x)$	|	+	0	–	|	–	
$A(x)$	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0	↘	

Deci, dacă $x = 3$, atunci înălțimea triunghiului de arie maximă are lungimea egală cu $\dfrac{3}{4}$ din diametru.

În acest caz ($x = 3$), triunghiul ABC este echilateral.

Observație.

Dintre toate triunghiurile isoscele înscrise într-un cerc dat, triunghiul echilateral are aria cea mai mare.



2) Dintr-un pătrat se taie din colțuri 4 pătrate egale, apoi se îndoaie marginile astfel încât să obținem o cutie (fără capac). Latura pătratului inițial având lungimea egală cu 12, care trebuie să fie lungimea laturii pătratului mic astfel încât volumul cutiei să fie maxim?

Rezolvare.

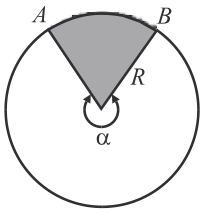
Alegem ca *variabilă independentă* lungimea laturii pătratului mic și o notăm cu x. Înălțimea cutiei care se formează este x, iar lungimea laturii bazei este $12 - 2x$. Volumul cutiei este descris de *funcția* $V(x) = x(12 - 2x)^2$. Calculăm *derivata* funcției V și obținem $V'(x) = 12(6 - x)(2 - x)$.

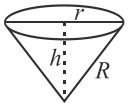
Ecuația $V'(x) = 0$ are soluțiile $x'_1 = 6$ sau $x'_2 = 2$. Soluția $x'_1 = 6$ nu convine problemei (nu mai există cutia!). Tabelul de variație pentru funcția V este următorul:

x	0		2		6		$+\infty$
$V'(x)$		+	0	–	0	+	
$V(x)$		↗	128	↘	m	↗	

Volumul este maxim pentru $x = 2$ și este egal cu 128 unități de volum.

3) Dintr-o bucată de tablă de formă circulară cu raza R se decupează un sector de cerc din care se confecționează o pâlnie. Pentru ce unghi la centru, α, pâlnia are capacitatea maximă?



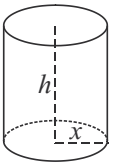


Soluție.

Alegem ca *variabilă independentă* înălțimea h a conului care reprezintă pâlnia. Volumul pâlniei este $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$; cum $r^2 = R^2 - h^2$, obținem funcția $V = f(h) = \frac{\pi}{3}(R^2h-h^3)$. Valoarea extremă (maximă) se calculează din $f'(h)=0$ și obținem $h=\frac{R}{3}\sqrt{3} > 0$. Cum $f''(h)=-\frac{2\pi}{3}R\sqrt{3}<0$, rezultă că valoarea găsită este un maxim. Când se îndoaie tabla, arcul de cerc $\overset{\frown}{AB}=R\alpha$ devine circumferința bazei, deci $\overset{\frown}{AB}=2\pi r$; obținem $\alpha=\frac{2\pi r}{R}$ și, cum $r=\frac{R}{3}\sqrt{6}$, rezultă $\alpha=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}\approx 294°$.

4) O fabrică de conserve își confecționează din tablă cutii cilindrice având capacitatea de 1 l (1 dm^3). Ce dimensiuni trebuie să aibă cutiile pentru a se folosi cât mai puțin material?

Rezolvare.



Alegem ca *variabilă independentă* raza bazei cilindrului pe care o notăm cu x.

Notăm cu A aria totală a cilindrului. Volumul cutiei fiind egal cu 1 dm^3, deducem înălțimea h în funcție de x, astfel: $1 = \pi x^2 \cdot h$, de unde $h=\frac{1}{\pi x^2}$.

Exprimăm aria totală a cilindrului: $A(x)=2\pi xh+2\pi x^2=\frac{2}{x}+2\pi x^2$.

Studiem punctele de extrem ale funcției $A(x)$: $A'(x)=-\frac{2}{x^2}+4\pi x$;

din $A'(x) = 0$ obținem $x'=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, pentru care $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$ are o valoare minimă.

x	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	
$A'(x)$	|	$-$	0	$+$
$A(x)$		$\searrow$	$A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$	$\nearrow$

Calculăm, în acest caz, dimensiunile cutiei și, pentru $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ (raza bazei), obținem $h=\frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$, adică înălțimea cutiei trebuie să fie egală cu dublul razei bazei cilindrului.

PROBLEME PROPUSE

1. Într-o întreprindere, un studiu al costurilor unei producții arată că, dacă q reprezintă numărul de unități produse, costul total $C(q)$ este dat prin:

$$C(q)=\frac{1}{3}q^3-2q^2+50q+1.$$

a) Studiază monotonia funcției C definită pe $[0, +\infty)$. Construiește, într-un reper cartezian, porțiunea din graficul lui C pentru $0 \leqslant q \leqslant 5$.

b) Fie funcția $C_m(q)=\frac{C(q)}{q}$, definită pentru $q > 0$ (C_m reprezintă costul mediu unitar).

i) Calculează derivata $C'_m(q)$ (C'_m reprezintă costul marginal, adică costul suplimentar necesar pentru a produce o unitate în plus).

ii) Determină limitele lui C'_m în 0 și $+\infty$. Studiază monotonia funcției C'_m și dedu că există un număr real unic, r, astfel încât $C'_m(r)=0$. Determină, cu o aproximație de 10^{-3}, valoarea lui r.

iii) Studiază funcția C_m și completează tabelul de variație. Trasează, într-un reper cartezian, porțiunea din reprezentarea geometrică a graficului, corespunzătoare lui $0 < q \leqslant 5$.

2. Determină conul de volum maxim, înscris într-o sferă de rază dată R.

3. Dintre toate dreptunghiurile cu perimetrul de 24 m, care are aria maximă?

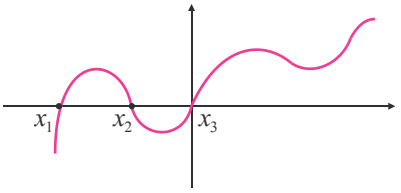
4. Dintre toate dreptunghiurile cu aria de 36 cm^2, care este dreptunghiul cu perimetrul cel mai mic?

3. Rezolvarea grafică a unor ecuații. Șirul lui Rolle

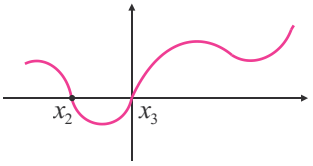
Rezolvarea grafică a unor ecuații; utilizarea reprezentării grafice a funcțiilor în determinarea numărului de soluții ale unei ecuații

Oricărei ecuații îi putem asocia o funcție și oricărei funcții îi putem asocia o ecuație (punând $f(x) = 0$).

Dacă se cunoaște reprezentarea grafică a unei funcții f, atunci putem observa numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = 0$ și, eventual, valorile lor sau intervalele în care se află acestea.



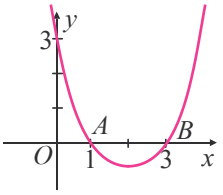
De exemplu, pentru o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, având reprezentarea grafică din figura alăturată, ecuația $f(x) = 0$ are, conform imaginii grafice, trei soluții reale x_1, x_2, x_3 pe care, fie le putem determina din calcul, fie putem spune în ce interval se află fiecare din ele. Pentru reprezentarea grafică de mai sus observăm că $x_3 = 0$ și $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$.



Dacă în exemplul precedent avem doar o porțiune din reprezentarea grafică a funcției f, atunci și discuția referitoare la numărul soluțiilor ecuației asociate, $f(x) = 0$, poate fi incompletă (de exemplu, în reprezentarea grafică lipsește soluția x_1!).

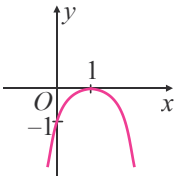
De aceea, avem nevoie de reprezentarea grafică a funcției f (pe domeniul ei de definiție) și de o metodă prin care să stabilim cu certitudine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 0$ (pe domeniul ei de definiție) și intervalele în care se află acestea.

EXEMPLE



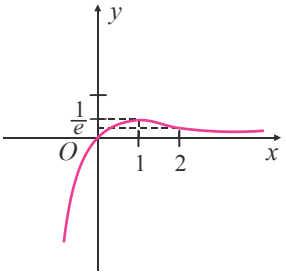
1) Să rezolvăm grafic ecuația $x^2 - 4x + 3 = 0$. Asociem funcția $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ având reprezentarea grafică alăturată:

Intersecția reprezentării grafice cu axa Ox se face în două puncte, $A(1, 0)$ și $B(3, 0)$. Abscisele acestor puncte reprezintă soluțiile ecuației date $f(x) = 0$, adică $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$.



2) Să rezolvăm grafic ecuația $-x^2 + 2x - 1 = 0$. Asociem funcția $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox într-un singur punct, $V(1, 0)$. Abscisa acestui punct este soluția reală (dublă) a ecuației $f(x) = 0$, adică $x_1 = x_2 = 1$.



3) Să determinăm numărul soluțiilor reale ale ecuației $me^x - x = 0$, m parametru real.

Separând parametrul m obținem ecuația echivalentă $\frac{x}{e^x} = m$. Asociem funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$, având reprezentarea grafică alăturată.

Numărul soluțiilor reale ale ecuației se va determina intersectând dreapta $y = m$, $m \in \mathbb{R}$, cu graficul funcției. Avem cazurile:

- dacă $m > \frac{1}{e}$, ecuația nu are soluții reale;
- dacă $m = \frac{1}{e}$, ecuația are soluția $x = 1$;
- dacă $m \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, ecuația are două soluții reale: $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, \infty)$;
- dacă $m = 0$, ecuația are soluția $x = 0$;
- dacă $m < 0$, ecuția are o soluție reală $x_1 \in (-\infty, 0)$.

Șirul lui Rolle

Pentru determinarea numărului de soluții reale ale unor ecuații și a intervalelor în care ele sunt situate, se utilizează *șirul lui Rolle*. Șirul lui Rolle ne permite să separăm soluțiile ecuației $f(x) = 0$, atunci când cunoaștem soluțiile ecuației $f'(x) = 0$. Această metodă se bazează, atât pe teorema lui Rolle, cât și pe proprietatea lui Darboux.

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $x_1', x_2', \ldots x_n'$ soluțiile reale consecutive ale ecuației $f'(x) = 0$.

Șirul lui Rolle reprezintă șirul semnelor dat de valorile: $f(a + 0)$, $f(x_1')$, $f(x_2')$, ...$f(x_n')$, $f(b - 0)$.

Distingem următoarele cazuri:

I. Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, adică pentru $x_k' < x_{k+1}'$ avem $f(x_k') \cdot f(x_{k+1}') < 0$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (am notat $x_0' = a$ și $x_{n+1}' = b$), atunci în intervalul (x_k', x_{k+1}') există o *unică soluție* a ecuației $f(x) = 0$ (existența este dată de proprietatea lui Darboux a lui f, iar unicitatea este asigurată de teorema lui Rolle).

II. Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, adică pentru $x_k' < x_{k+1}'$ avem $f(x_k') \cdot f(x_{k+1}') > 0$, atunci $f(x) = 0$ nu are *nici o soluție* în intervalul (x_k', x_{k+1}').

Demonstrație.

Se aplică metoda reducerii la absurd.

Dacă $\exists\ c_1, c_2 \in (x_k', x_{k+1}')$, $c_1 \neq c_2$ cu $f(c_1) = f(c_2) = 0$, atunci, conform teoremei lui Rolle, există c între c_1 și c_2, adică $c \in (x_k', x_{k+1}')$ astfel încât $f'(c) = 0$, contradicție cu faptul că x_k' și x_{k+1}' sunt soluții consecutive ale lui f'.

Dacă $c \in (x_k', x_{k+1}')$ este unica soluție a ecuației $f(x) = 0$, atunci c este un punct extrem al lui f, deci $f'(c) = 0$ (conform teoremei lui Fermat). Am ajuns din nou la o contradicție.

III. Dacă în șirul lui Rolle apare valoarea 0, adică $f(x_k') = 0$, atunci x_k' este *soluție multiplă* a lui f și în intervalele (x_{k-1}', x_k') și (x_k', x_{k+1}') ecuația nu mai are alte soluții.

Etapele formării șirului lui Rolle sunt următoarele:

1) se fixează intervalul de studiu, $I = (a, b)$ cu $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, pentru ecuația $f(x) = 0$, unde $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă;

2) se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și considerăm soluțiile reale ale acestei ecuații (situate în I) în ordine crescătoare:

$x_1' < x_2' < \ldots < x_n'$;

3) se calculează valorile funcției f în aceste puncte la care se adaugă valorile (sau limitele) lui f la capetele intervalului I, notate cu $f(a + 0)$, respectiv $f(b - 0)$;

1) Găsește soluțiile multiple pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = x \sin x$;

b) $f(x) = x \cos x$;

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x$;

f) $f(x) = x^2(e^x - 1)$;

g) $f(x) = (x^2 - 1)\ln x^2$.

2) Determină numărul de soluții ale unei ecuații $f(x) = 0$, urmărind condițiile prezentate în tabel.

a)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$+\infty$		$+$		$+$		$+\infty$

b)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$	$-$		$-$		$-$	$+\infty$

c)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$		$+$		$+$		$+\infty$

d)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$+\infty$		$+$		$+$		$+\infty$

e)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$		$+$		$-$		$+\infty$

f)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$+\infty$		$-$		$+$		$-\infty$

g)

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$+\infty$		$+$		$-$		$+$		$-\infty$

4) se organizează datele obținute anterior într-un tabel de forma:

x	a	x'_1	$x'_2 \ldots$	x'_n	b
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$f(a+0)$	$f(x'_1)$	$f(x'_2)$	$\ldots f(x'_n)$	$f(b-0)$

Șirul lui Rolle este șirul semnelor valorilor ultimei linii a tabelului.

Observație.

Putem folosi șirul lui Rolle numai dacă se poate rezolva ecuația $f'(x) = 0$.

h)

x	$-\infty$	-1	1	10	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$+\infty$	+	0	+	$-\infty$

i)

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	+	–	0	+	$-\infty$

3) Găsește câte un exemplu de funcție care verifică fiecare tabel în parte și scrie ecuația asociată.

Indicație.

a) $f'(x) = (x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$, de unde obținem $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x$, deci ecuația asociată este $2x^3 - 9x^2 - 24x = 0$.

Probleme rezolvate

1) Determină numărul de soluții reale ale ecuațiilor următoare și intervalele în care se află acestea:

a) $4x^3 - 18x^2 + 24x - 9 = 0$.

Soluție.

Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$, f este derivabilă și $f'(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x'_1 = 1$, $x'_2 = 2$. Calculăm $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
sgn f	–	+	–	+

Prin urmare, având trei schimbări de semne, ecuația $f(x) = 0$ are trei soluții reale: $x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (1, 2)$, $x_3 \in (2, +\infty)$.

b) $x^5 - 4x^3 + 3 = 0$

Soluție.

Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 4x^2 + 3$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 5x^4 - 8x$. Ecuația $f'(x) = 0$, adică $x(5x^3 - 8) = 0$, are soluțiile reale $x'_1 = 0$ și $x'_2 = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$.

Limitele funcției f în $-\infty$ și $+\infty$ sunt egale cu $-\infty$, respectiv $+\infty$. Șirul lui Rolle este dat în tabelul următor:

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$	$+\infty$
sgn f	–	+	–	+

Deci ecuația dată are trei soluții reale (având trei schimbări de semne în șirul lui Rolle): $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in \left(0, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)$, $x_3 \in \left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}}, +\infty\right)$.

2) Separă soluțiile ecuației $x^2 + 2\ln x - 4x = m$, în funcție de valorile reale ale parametrului m.

Soluție.

Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2\ln x - 4x - m$. f este derivabilă și $f'(x) = 2x + \frac{2}{x} - 4$; din $f'(x) = 0$ obținem $x'_1 = 1$; $f(1) = -m - 3$; $f(0+0) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

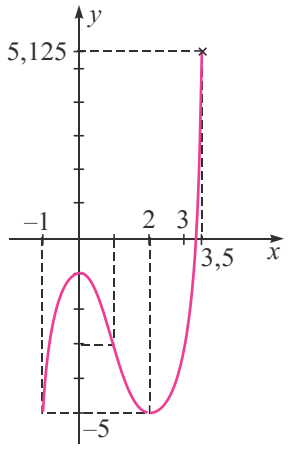
x	0	1	$+\infty$
sgn f	–	sgn$(-m - 3)$	+

Dacă $m \in (-\infty, -3)$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are o unică soluție ce se află în intervalul $(0, 1)$.

Dacă $m = -3$, atunci $x_1 = 1$ este soluție multiplă.

Dacă $m \in (-3, +\infty)$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are o unică soluție ce se află în intervalul $(1, +\infty)$.

3) Considerăm funcția $f : [-1; 3,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, având reprezentarea grafică alăturată:



a) Completează tabelul de variație al funcției f.

b) Demonstrează că ecuația $f(x) = 0$ are o singură soluție, $x_1 \in [3; 3,5]$.

c) Pune pe figură punctul A de abscisă x_1. Determină grafic o încadrare a lui x_1 într-un interval de lungime 0,5 unități.

d) Completează tabelul următor (aproximând la 10^{-2}):

x	3	3,5	3,25	3,10	3,20	3,11
$f(x)$						

e) Dedu o încadrare a lui x_1 (aproximare prin lipsă și prin adaos) la o sutime.

Soluție.

a)

x	-1		0		2		$3,5$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$5,125$

b) Funcția f este derivabilă pe $[3; 3,5]$ și pentru $\forall x \in [3; 3,5]$, $f'(x) > 0$, adică f este strict crescătoare pe $[3; 3,5]$; $f(3) = -1$ și $f(3,5) = 5,125$, deci $0 \in [f(3); f(3,5)] = [-1; 5,125]$. Deci ecuația $f(x) = 0$ admite o singură soluție în intervalul $[3; 3,5]$.

c) Punctul A este punctul în care reprezentarea grafică a lui f intersectează axa absciselor. Citim pe grafic că abscisa punctului A verifică $3 < x_1 < 3,5$.

d)

x	3	3,5	3,25	3,10	3,11
$f(x)$	-1	5,13	1,64	1,05	0,06

e) $f(3,10) \simeq -0,04 < 0$ și $f(3,11) \simeq 0,06 > 0$, deci $f(3,10) < 0 < f(3,11)$, de unde $3,10 < x_1 < 3,11$

1. Determină numărul soluțiilor reale ale ecuației:
a) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1 = 0$;
b) $\ln x - x + 1 = 0$; c) $e^x - x + 1 = 0$;
d) $x^3 + 3x + m = 0$, unde m este un parametru real.

2. a) Determină numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$ și separă pe intervale soluțiile obținute.
b) Propune o ecuație care să aibă același număr de soluții.

3. Se dă ecuația $2^x - x\ln 2 - m = 0$.
a) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, ecuația are două soluții reale distincte?
b) Poate avea ecuația exact trei soluții reale distincte?

4. Determină numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ și separă pe intervale soluțiile obținute, în funcție de parametrul λ.

5. Determină numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor și separă pe intervale soluțiile obținute:
a) $x^3 - 6x + 2 = 0$; b) $x^4 - 4x - 1 = 0$; c) $x + e^x = 0$;
d) $3x^4 - 4ax^3 - 6x^2 + 12ax + 7a^2 - 36 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$;
e) $3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72 \cdot \ln|x| + 1 = 0$;
f) $2x + \ln x - m(x - \ln x) = 0$, $m \in \mathbb{R}$;
g) $\sin 2x + 2\sin x = m$, $m \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 2\pi]$.

6. Determină valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + m = 0$:
a) are două soluții egale; b) are toate soluțiile reale.

7. Arată că, pentru $m \in \left[-3, \frac{44}{7}\right]$, ecuația $2x^3 + x^2 - 4x + m = 0$ are toate soluțiile reale.

8. Arată că, $\forall\, p \in \mathbb{R}$, ecuația $x^3 - 3x + p = 0$ nu poate avea în intervalul $[0, 1]$ două soluții distincte.

9. Determină valorile parametrului real m pentru care ecuația $e^x = mx^2$ are trei soluții reale.

10. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq b$. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $(x - a)^n + (x - b)^n = (a - b)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ dat.

11. Știind că ecuația $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ are toate soluțiile reale, precizează aceste soluții.

12. Determină numărul de soluții reale ale ecuației următoare și intervalele în care se află acestea:
a) $x^3 - 3x^2 - 9x + 3 = 0$; b) $x^3 + 3x^2 + 6 = 0$;
c) $x^3 - 2x + 1 = \ln x$.

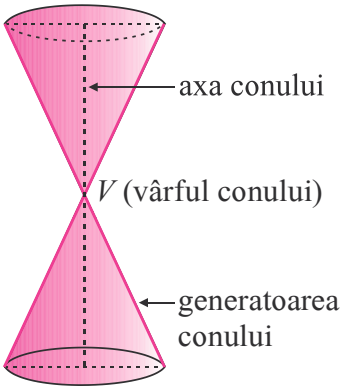
13. Discută numărul soluțiilor reale ale ecuației, după valorile parametrului real m:
a) $|1 - x^2| = m(1 + x^2)$; b) $2\ln x + x^2 + mx + 3 = 0$;
c) $\operatorname{arctg} x = x + m$; d) $e^x = m \cdot |x|$;
e) $e^{-x} = m(1 - x)$; f) $\frac{\ln x}{x - 1} = mx + 1 - m$.

4. Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă)

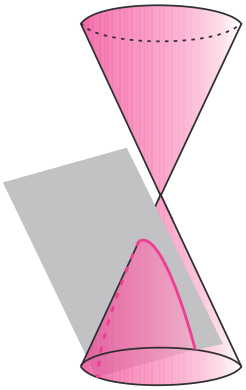
Conicele sunt curbe plane obținute prin intersecția unei suprafețe conice cu un plan. Proprietățile remarcabile ale conicelor au fost observate de către Menechmos (c 300 î.Hr.). Și Euclid (c 330-275 î.Hr.) și Arhimede (c 287-212 î.Hr.) s-au ocupat de conice. După ei, Apollonius din Perga (c 262-200 î.Hr.), geometru și astronom grec, în opera sa fundamentală *Konika* (în opt „cărți" din care s-au păstrat șapte), face un studiu sistematic al conicelor și, pentru prima dată, introduce denumirile a trei conice (elipsa, hiperbola și parabola) și prezintă numeroase proprietăți ale lor.

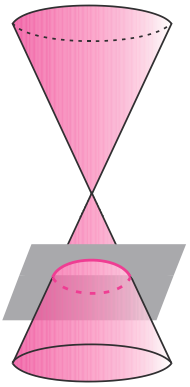
Dacă intersectăm o *suprafață conică* (fig. a) cu:
– un plan paralel cu o generatoare a conului, obținem o *parabolă* (fig. b);
– un plan perpendicular pe axa conului, obținem un *cerc* (fig. c);
– un plan paralel cu axa conului, obținem o *hiperbolă* (fig. d);
– un plan care *nu* conține vârful conului, *nu* este perpendicular pe axa conului, *nu* este paralel cu axa conului și *nu* este paralel cu nici o generatoare a conului, obținem o *elipsă* (fig. e).

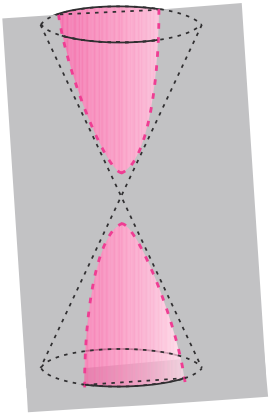
În continuare vom considera în plan un reper cartezian xOy, ales convenabil pentru fiecare din curbele pe care le vom studia (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă).

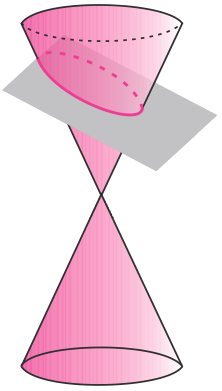


(fig. a)


parabolă (fig. b)


cerc (fig. c)


hiperbolă (fig. d)


elipsă (fig. e)

Reprezentarea grafică a cercului

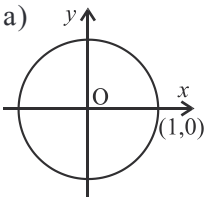
Ecuația (*implicită*) *a cercului,* cu centrul în originea axelor și cu rază r este $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$, $r > 0$.

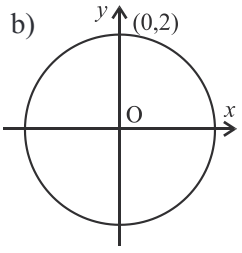
Exprimându-l pe y în funcție de x obținem $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, care se numesc *ecuațiile explicite ale cercului*.

Vom reprezenta grafic ramura $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, pentru care $y \geqslant 0$. Cealaltă ramură, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, o vom reprezenta prin simetrie față de axa Ox.

Să interpretăm grafic!

1) Scrie ecuația implicită și ecuațiile explicite pentru fiecare din cercurile următoare:

a)


b)


Reprezentăm grafic funcția $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $r>0$, $f: D\to\mathbb{R}$.

I. Din condiția $r^2 - x^2 \geqslant 0$ obținem $x \in [-r, r]$, adică $D = [-r, r]$.

$\cap Ox$ $(y = 0)$: $\sqrt{r^2-x^2}=0$ are soluțiile $x_1 = -r$ și $x_2 = r$, deci graficul intersectează axa Ox în punctele $(-r, 0)$ și $(r, 0)$;

$\cap Oy$ $(x = 0)$: $f(0) = r$, deci graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, r)$.

Funcția nu admite asimptote, deoarece $D = [-r, r]$.

Funcția f este o funcție continuă, definită pe un interval $[-r, r]$.

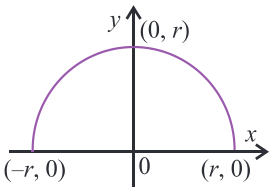
II. $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $\forall x\in(-r,r)$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1'=0$; în $-r$ și r, f are derivata $+\infty$, respectiv $-\infty$, deci graficul are tangente perpendiculare pe Ox în $-r$ și în r.

III. $f''(x)=\dfrac{-r^2}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}}$, $\forall x\in(-r,r)$; ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții și $f''(x)<0, \forall x\in(-r,r)$.

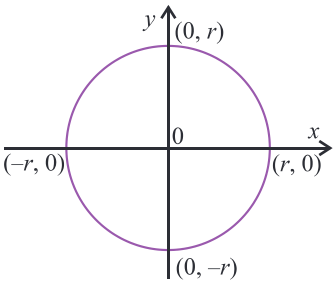
IV.

x	$-r$		0		r
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	r	$\searrow$	0
f''		$-$		$-$	
		$\frown$			

V. Reprezentarea grafică a funcției date prin $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ este un semicerc situat deasupra axei Ox.



Reprezentând în același sistem de coordonate și funcția $g(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$, prin simetrie față de axa Ox, obținem reprezentarea grafică a cercului cu centrul în originea axelor și cu raza r.



Să reprezentăm grafic

2) Reprezintă grafic funcțiile:

a) $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $D = [-1, 1]$;

b) $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$, $D = [-1, 1]$;

c) $g_1(x)=\sqrt{4-x^2}$, $D = [-2, 2]$;

d) $g_2(x)=-\sqrt{4-x^2}$, $D = [-2, 2]$;

e) $h_1(x)=\sqrt{9-x^2}$, $D = [-3, 3]$;

f) $h_2(x)=-\sqrt{9-x^2}$, $D = [-3, 3]$.

Reprezintă în același reper cartezian funcțiile f_1 și f_2. Ce observi?

Ce poți spune despre reprezentările grafice ale funcțiilor g_1 și g_2?

Reprezentând funcțiile h_1 și h_2 în același reper cartezian, obținem un cerc cu centrul O și raza 3?

Scrie ecuația implicită a fiecăruia din cercurile de mai sus.

3) Determină raza fiecăruia dintre următoarele cercuri și reprezintă grafic fiecare cerc de ecuație:

a) $x^2 + y^2 = 1$;

b) $x^2 + y^2 = 4$;

c) $x^2 + y^2 = 9$;

d) $x^2 + y^2 = 2$;

e) $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$;

f) $x^2 + y^2 = 25$.

4) Determină ecuația implicită a cercului cu centrul în punctul $M(2, -3)$ și având raza $r = 7$. Reprezintă într-un reper cartezian acest cerc.

5) Fie cercul de centru $M(-1, 2)$ ce conține punctul $A(2, 6)$. Scrie ecuația explicită a acestui cerc și reprezintă într-un reper cartezian acest cerc.

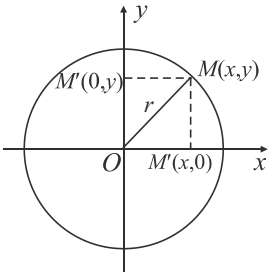
Proprietăți geometrice ale cercului

Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centru. Distanța de la centru la punctele cercului se numește rază.

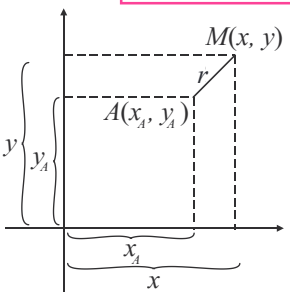
Deci, cercul de centru O și de rază r este $\mathscr{C}(O,r) \overset{def}{=} \{M \mid d(O,M) = r\}$.

Dacă M este un punct din plan cu proprietatea $OM = r$, atunci $M'O^2 + M'M^2 = OM^2$, adică $\boxed{x^2 + y^2 = r^2.}$

Aceasta este ecuația unui cerc cu centrul în originea axelor și de rază r.



Deci, $\boxed{\mathscr{C}(O, r) \overset{def}{=} \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r^2, x, y \in \mathbb{R}\}}$



Dacă cercul nu are centrul în originea axelor de coordonate, ci într-un punct $A(x_A, y_A)$, atunci ecuația cercului de rază r este:

$$\boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2}$$

Reprezentarea grafică a elipsei

Ecuația (implicită) a elipsei, raportată la axele sale de simetrie, este $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$, $a > 0$, $b > 0$.

Exprimându-l pe y în funcție de x obținem $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, care se numesc *ecuațiile explicite ale elipsei*.

Reprezentăm grafic ramura $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, pentru care $y \geqslant 0$. Cealaltă ramură, $y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, o vom reprezenta prin simetrie față de axa Ox.

Reprezentăm grafic funcția dată prin: $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, $b > 0$.

I. Din condiția $a^2 - x^2 \geqslant 0$, obținem $x \in [-a, a]$, adică $D = [-a, a]$.

$\cap\, Ox$ $(y = 0)$: $\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = 0$ are soluțiile $x_1 = -a$ și $x_2 = a$, deci graficul intersectează axa Ox în punctele $(-a, 0)$ și $(a, 0)$.

$\cap\, Oy$ $(x = 0)$: $f(0) = b$, deci graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, b)$.

Funcția nu admite asimptote, deoarece $D = [-a, a]$.

6) Care dintre următoarele ecuații reprezintă un cerc?

a) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$;

c) $2x^2 + 2y^2 + x + y = 0$;

d) $x^2 + 2y^2 + 2x + y = 0$;

e) $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$;

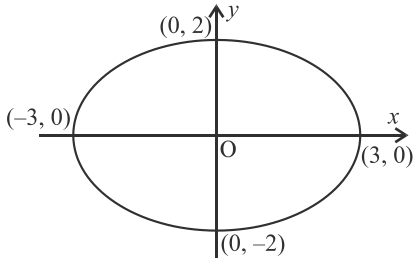
f) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y = 0$;

g) $x^2 + y - 1 = 0$;

h) $4x^2 + 4y^2 + 4y = 0$.

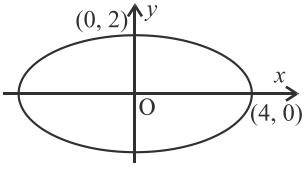
În fiecare caz în care ecuația reprezintă un cerc, determină centrul și raza acestuia.

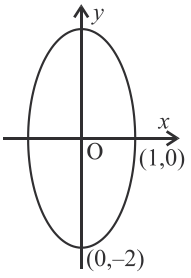
7) Fie elipsa de ecuație: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Reprezentarea grafică a acestei elipse este:



Care sunt ecuațiile explicite ale elipsei?

8) Scrie ecuația implicită și ecuațiile explicite pentru fiecare dintre elipsele următoare:





Funcția este continuă pe intervalul $[-a, a]$.

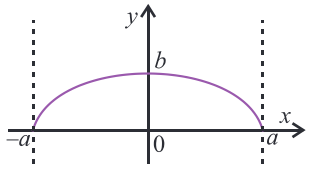
II. $f'(x) = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\forall x \in (-a, a)$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1' = 0$;

III. $f''(x) = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\forall x \in (-a, a)$; ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții și $f''(x) < 0, \forall x \in (-a, a)$.

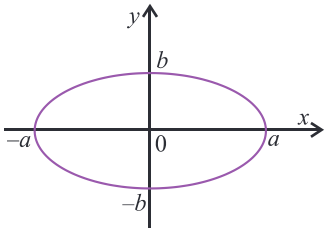
IV.

x	$-a$		0		a
f'	|	+	0	–	|
f	0	↗	b	↘	0
f''	|	–		–	|

V.



Reprezentăm în același sistem de coordonate și funcția dată prin $g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (prin simetrie față de axa Ox) și obținem reprezentarea grafică a elipsei:



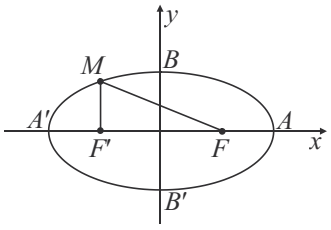
Proprietăți geometrice ale elipsei

Elipsa este locul geometric al punctelor din plan cu proprietatea că suma distanțelor la două puncte fixe distincte (*focare*) este constantă.

Să notăm punctele fixe cu F și F', $d(F, F') = 2c$ ($2c$ este *distanța focală*) și cu $2a$ constanta (precizăm că distanța dintre punctele fixe este mai mică decât constanta ($a > c$)) .

Elipsa este $\mathscr{E} = \{M \mid d(M, F) + d(M, F') = 2a\}$.

Să fixăm în plan un sistem de coordonate (convenabil ales). Alegem dreapta FF' axa Ox (axa focală) și mediatoarea segmentului FF' axa Oy. Fie $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$. Fie $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. În aceste ipoteze $M(x, y) \in \mathscr{E}$, cu proprietatea $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$.



9) Reprezintă grafic funcțiile:

a) $f_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$, $f_1 : [-4, 4] \to \mathbb{R}$;

b) $f_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$, $f_2 : [-4, 4] \to \mathbb{R}$;

c) $g_1 = 2\sqrt{1 - x^2}$, $g_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$;

d) $g_2 = -2\sqrt{1 - x^2}$, $g_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$;

e) $h_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$, $h_1 : \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$;

f) $h_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$, $h_2 : \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$.

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile f_1 și f_2.

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile g_1 și g_2.

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile h_1 și h_2. Ce obții?

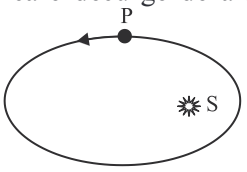
Scrie ecuațiile implicite ale fiecărei elipse astfel obținute.

10) Reprezintă grafic elipsa de ecuație:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$;

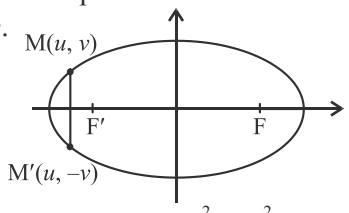
c) $\frac{4x^2}{9} + 4y^2 = 1$; d) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

11) Pământul, în mișcarea sa în jurul Soarelui, descrie o elipsă având Soarele în unul din focare. Poți să descrii o consecință care decurge de aici?



12) Arată că axa focală este axă de simetrie pentru elipsă.

Indicație.



(u, v) este soluția ecuației $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dacă și numai dacă $(u, -v)$ este soluție a ecuației $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ridicăm la pătrat: $2a^2-x^2-y^2-c^2=\sqrt{(x^2-c^2)^2+2(x^2+c^2)y^2+y^4}$; ridicăm încă o dată la pătrat: $a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Ținând cont de relația $a^2 - c^2 = b^2$, obținem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Deci $\boxed{\mathscr{E}=\left\{(x,\,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ x,\,y\in\mathbb{R}\right\}}$.

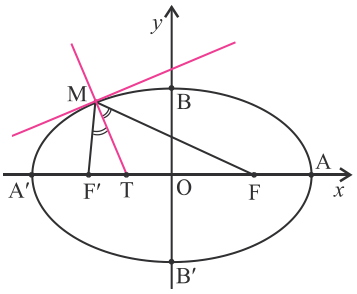
Aceasta este *ecuația carteziană implicită a elipsei.*

Punctele A', A, B', B, definite prin $\mathscr{E}\cap Ox=\{A'(-a,\,0),\,A(a,\,0)\}$, $\mathscr{E}\cap Oy=\{B'(0,\,-b),\,B(0,\,b)\}$, se numesc *vârfurile elipsei*.

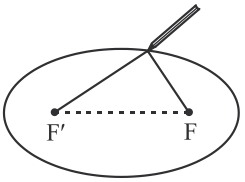
$A'A$, $B'B$ se numesc *axa mare*, respectiv *axa mică*, *a elipsei*.

Proprietatea optică a elipsei.

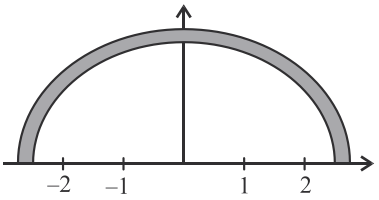
Dacă suprafața interioară a elipsei este reflectoare, orice rază de lumină din sursa plasată în F, după reflexie, va trece prin F′.



13) Un fir inextensibil de lungime $2a$ are capetele fixate. Ce descrie vârful unui creion care se mișcă întinzând acest fir?



14) Un zidar trebuie să construiască o arcadă în formă de semielipsă, cu deschiderea de 5 m și înălțimea de 2 m. Dacă vrea să folosească procedeul din problema 13), ce lungime are firul și în ce puncte trebuie fixate capetele sale?



Problemă rezolvată.

Un corp este aruncat de la sol, pe oblică, cu viteza v_0, sub unghiul $\alpha\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right)$ variabil. Determină locul geometric al punctelor, din planul de aruncare, care reprezintă vârfurile traiectoriilor (se neglijează rezistența aerului).

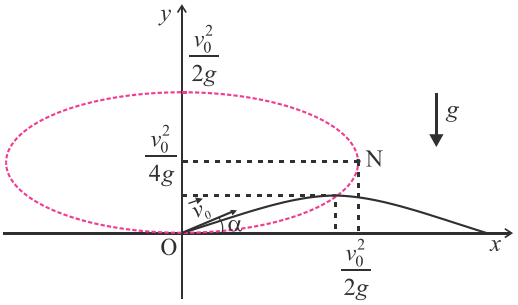
Soluție.

Din ecuațiile mișcării pe cele două axe obținem:

$x(t)=v_0\cdot\cos\alpha\cdot t$; $y(t)=v_0\cdot\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$. Prin eliminarea timpului obținem ecuația traiectoriei: $y=x\cdot\mathrm{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}$,

$\alpha\in[0,\,\pi]$. Coordonatele vârfurilor V sunt $x=\frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin 2\alpha$ și $y=\frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin^2\alpha$, de unde obținem $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2y}{x}$. Înlocuind tgα în ecuația traiectoriei obținem $x^2+4y^2-\frac{2v_0^2}{g}\cdot y=0$ sau, sub formă canonică, $\frac{x^2}{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{v_0^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2}=1$,

care reprezintă ecuația unei elipse. Deci, locul geometric al vârfurilor traiectoriilor este o elipsă, iar punctul N este vârful aruncării la 45° care asigură bătaia maximă.



Reprezentarea grafică a hiperbolei

Ecuația (implicită) a hiperbolei, care are axa Ox ca axă transversală, este $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$, $a>0$, $b>0$.

Exprimând y în funcție de x obținem $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, care sunt *ecuațiile explicite ale hiperbolei*.

Reprezentăm grafic ramura $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, pentru $y \geqslant 0$. Cealaltă ramură, $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, o vom reprezenta prin simetrie față de axa Ox.

Reprezentăm grafic funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $a>0$, $b>0$.

I. Din condiția $x^2-a^2 \geqslant 0$ obținem $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, adică $D=(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

$\cap Ox$ ($y=0$): $x^2-a^2=0$ cu soluțiile $x_1=-a$ și $x_2=a$, deci graficul intersectează axa Ox în punctele $(-a, 0)$ și $(a, 0)$;

$\cap Oy$: deoarece $x=0 \notin D$, graficul nu intersectează axa Oy.

• Funcția nu admite asimptote verticale deoarece $D=(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\infty$, deci funcția nu admite asimptote orizontale nici la $+\infty$, nici la $-\infty$.

• $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=-\frac{b}{a}$ și $n'=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-m'x\right]=0$,

deci dreapta $y=-\frac{b}{a}x$ este asimptotă oblică la $-\infty$;

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a}$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=0$,

deci dreapta $y=\frac{b}{a}x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

II. $f'(x)=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\forall x \in (-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$; ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x_1'=0$, care nu aparține lui D; f are derivată în $-a$ și a, și anume $-\infty$, respectiv ∞.

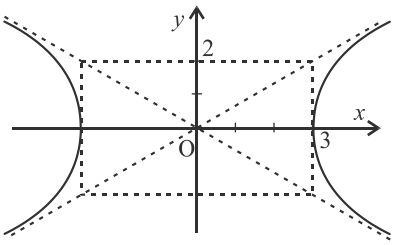
III. $f''(x)=\frac{-ab}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$, $\forall x \in (-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$; ecuația $f''(x)=0$ nu are soluții reale.

IV.

x	$-\infty$		$-a$		a		∞
f'		$-$	]	//////	[	$+$	
f	$+\infty$	↘	0]	//////	[0	↗	∞
f''		$-$	]	//////	[	$-$	

Să interpretăm grafic!

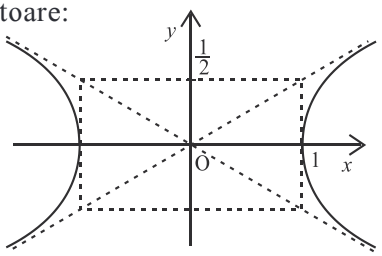
15) Fie hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Reprezentarea grafică a acestei hiperbole este:



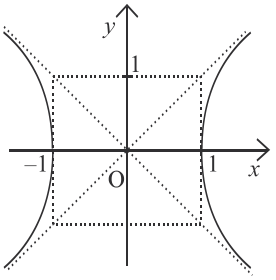
unde dreptele $y=\frac{2}{3}x$ și $y=-\frac{2}{3}x$ sunt asimptote. Care sunt ecuațiile explicite ale hiperbolei?

16) Scrie ecuația implicită și ecuațiile explicite pentru fiecare dintre hiperbolele următoare:

a)



b)



Să reprezentăm grafic!

17) Reprezintă grafic funcțiile:

a) $f_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16}$;

b) $f_2(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16}$;

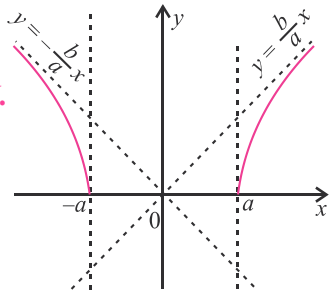
c) $g_1(x)=2\sqrt{x^2-1}$;

d) $g_2(x)=-2\sqrt{x^2-1}$;

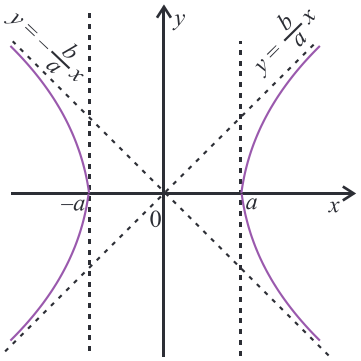
e) $h_1(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}$;

f) $h_2(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}$.

V.



Reprezentând în același sistem de coordonate și funcția dată prin $g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ (prin simetrie față de axa Ox), obținem reprezentarea grafică a hiperbolei care are axa Ox ca axă transversală.



Proprietăți geometrice ale hiperbolei

Într-un plan se consideră două puncte fixe, F și F'.

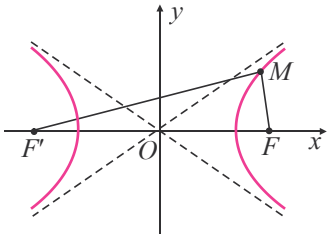
Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care modulul diferenței distanțelor la două puncte fixe F și F' este o constantă. Punctele F și F' se numesc *focare*.

Notăm $d(F, F')=2c$ ($2c$ se numește *distanța focală*) și cu $a > 0$ constanta, $a < c$; alegem axa $Ox = FF'$, iar axa Oy mediatoarea segmentului FF'. Atunci hiperbola este $\mathscr{H} = \{M \mid |d(M, F') - d(M, F)| = 2a\}$.

Cum $M \in \mathscr{H}$ și $|d(M, F')-d(M, F)|=2a$, avem $(x+c)^2+y^2=4a^2 \pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$. Ecuația devine: $\pm a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$ și, prin ridicare la pătrat, obținem:

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0$;
notăm $c^2 - a^2 = b^2$, adică
$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Împărțim cu a^2b^2 ($a \neq 0$ și $b \neq 0$) și obținem:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



$$\boxed{\text{Deci } \mathscr{H}=\left\{M(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=c^2-a^2\right\}.}$$

Aceasta este *ecuația carteziană implicită a hiperbolei.*

Punctele $A'(-a, 0)$ și $A(a, 0)$ reprezintă intersecția hiperbolei cu axa Ox și se numesc *vârfurile hiperbolei*; axa Ox se numește *axa transversă a hiperbolei*. Axa Oy nu intersectează $\mathscr{H}$ (Oy este *axa netransversă*).

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile f_1 și f_2.

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile g_1 și g_2.

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile h_1 și h_2. Ce obții? Scrie ecuația implicită a hiperbolei obținute în fiecare caz.

18) Reprezintă grafic hiperbolele:

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$;

b) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$;

c) $\frac{4x^2}{9}-4y^2=1$;

d) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$.

19) Reprezintă grafic hiperbolele:

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$;

2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$.

20) Reprezintă grafic hiperbolele:

1) $x^2 - y^2 = 4$;

2) $x^2 - y^2 = 1$.

21) Reprezintă grafic hiperbola $xy = 4$.

22) Arată că axele Ox și Oy sunt axe de simetrie pentru hiperbolă.

23) Arată că originea este centru de simetrie pentru hiperbolă.

24) Găsește ecuația hiperbolei, raportată la axele sale de simetrie, care trece prin punctele $C(5\sqrt{2}, 2\sqrt{5})$ și D(45, 40).

25) Determină focarele și vârfurile următoarelor hiperbole:

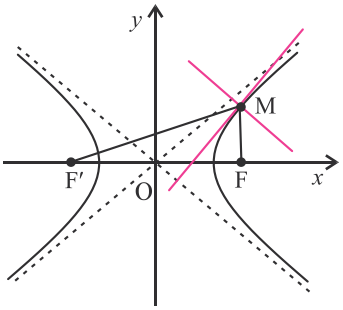
a) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}-1=0$;

b) $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}-1=0$;

c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-1=0$;

d) $9x^2 - 4y^3 - 36 = 0$.

Proprietatea optică a hiperbolei.
Orice rază ce pleacă dintr-o sursă luminoasă plasată în F va crea impresia, după reflexie, că are drept sursă F′ („*mascarea sursei*“).



Observații.

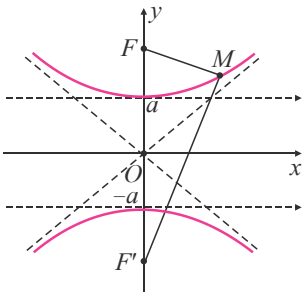
♦ Tot hiperbolă (dar cu focarele pe axa Oy) este și curba descrisă de ecuația $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,}$ $a>0$, $b>0$. Aceasta se numește *hiperbolă conjugată a hiperbolei* $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,}$ având aceleași asimptote (dreptele $y=\frac{b}{a}x$ și $y=\frac{-b}{a}x$), aceleași axe (axa Ox și axa Oy) și același centru de simetrie (originea axelor de coordonate)

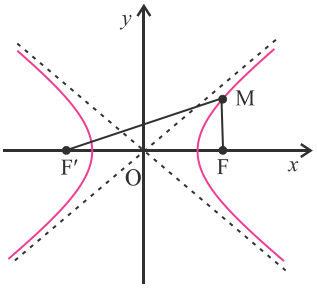
♦ Dacă $a = b$, atunci *hiperbola* se numește *echilateră* și are ecuația $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$, echivalentă cu ecuația $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$ (are ca asimptote bisectoarele axelor de coordonate, adică dreptele $y = x$ și $y = -x$, iar axele hiperbolei sunt axele de coordonate Ox și Oy).

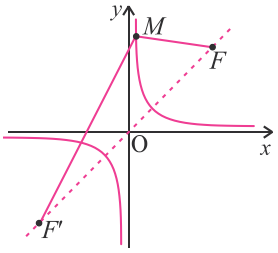
♦ Ecuația $x \cdot y = k$, $k \in \mathbb{R}^*$, adică $\boxed{y=\frac{k}{x}}$, reprezintă o *hiperbolă echilateră* având ca asimptote axele de coordonate, adică dreptele $x = 0$ și $y = 0$ și ca axe ale hiperbolei având bisectoarele cadranelor, adică dreptele $y = x$ și $y = -x$.

26) Determină hiperbola cu vârfurile $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$ și focarele $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$.

27) Găsește ecuația unei hiperbole, raportată la axe, știind că trece prin punctele $C(5\sqrt{2}; -2\sqrt{5})$ și $D(-45, 40)$.





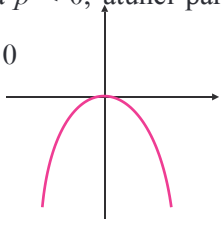


Reprezentarea grafică a parabolei

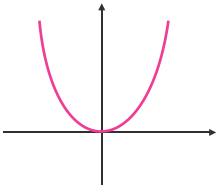
Ecuația parabolei având ca axă de simetrie axa Oy este $\boxed{x^2 = 2py}$, $p \neq 0$ și *ecuația parabolei* având ca axă de simetrie axa Ox este $\boxed{y^2 = 2px}$, $p \neq 0$.

Parabola de ecuație $x^2 = 2py$, scrisă sub forma $y=\frac{1}{2p}x^2$, a fost studiată anterior (în clasa a IX-a) și are reprezentarea grafică următoare: dacă $p > 0$, atunci parabola are „ramurile în sus”, și, dacă $p < 0$, atunci parabola are „ramurile în jos”.

$p < 0$



$p > 0$



Să reprezentăm și să interpretăm grafic

28) Reprezintă grafic parabolele de ecuații:

a) $y=\frac{1}{2}x^2$;

b) $y=-\frac{1}{2}x^2$;

c) $y = x^2$;

d) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

Axa Oy este *axă de simetrie* pentru aceste parabole, $O(0, 0)$ este *vârful parabolei* și p se numește *parametrul parabolei*.

În continuare, reprezentăm grafic parabola de ecuație $y^2 = 2px$, $p \neq 0$. Exprimând pe y în funcție de x obținem $y = \pm\sqrt{2px}$, care se numesc *ecuațiile explicite ale parabolei*.

Reprezentăm grafic ramura $y = \sqrt{2px}$, pentru $y \geqslant 0$, a parabolei $y^2 = 2px$. Cealaltă ramură, $y = -\sqrt{2px}$, o vom reprezenta prin simetrie față de axa Ox.

Reprezentăm grafic funcția $f : D \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{2px}$, $p > 0$.

I. Din condiția $2px \geqslant 0$ obținem $x \geqslant 0$, adică $D = [0, \infty)$

$\cap$ Ox ($y = 0$): obținem punctul $(0, 0)$ ca punct de intersecție a graficului cu axa Ox (evident și cu axa Oy).

- Funcția nu admite asimptote verticale, deoarece $D = [0, \infty)$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2px} = \infty$, deci funcția nu admite asimptote orizontale.
- $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2px}}{x} = 0$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2px} = \infty$, deci funcția nu admite asimptote oblice.

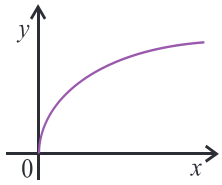
II. $f'(x) = \dfrac{p}{\sqrt{2px}}$, $\forall x > 0$; ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții.

III. $f''(x) = \dfrac{p}{\sqrt{2p}} \cdot \left(-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{p}{2x\sqrt{2px}}$, $\forall x > 0$; ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții.

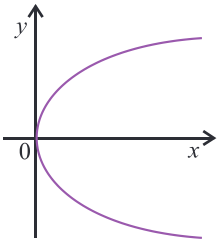
IV.

x	0		∞
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	∞
f''		$-$	

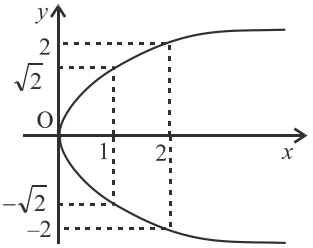
V.



Reprezentând în același sistem de coordonate și funcția $g(x) = -\sqrt{2px}$ (prin simetrie față de axa Ox) obținem reprezentarea grafică a parabolei $y^2 = 2px$, $p > 0$, având axa de simetrie Ox și vârful $O(0, 0)$.



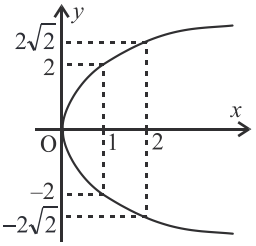
29) Fie parabola de ecuație $y^2 = 2x$. Reprezentarea grafică a ei este:



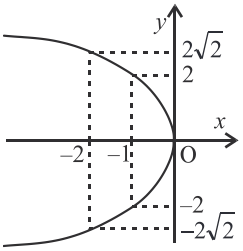
Care sunt ecuațiile explicite ale parabolei?

30) Scrie ecuația implicită și ecuațiile explicite pentru fiecare din parabolele următoare:

a)



b)



31) Reprezintă grafic funcțiile:

a) $f_1(x) = 2\sqrt{x}$;

b) $f_2(x) = -2\sqrt{x}$;

c) $g_1(x) = 2\sqrt{-x}$;

d) $g_2(x) = -2\sqrt{-x}$;

e) $h_1(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$;

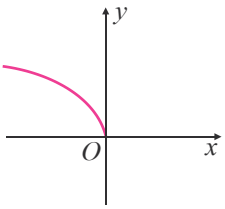
f) $h_2(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile f_1 și f_2.

Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile g_1 și g_2.

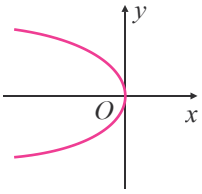
Reprezintă, în același reper cartezian, funcțiile h_1 și h_2.

Ce obții? Scrie ecuația implicită a fiecărei parabole obținute.



Reprezentând grafic funcția $f(x)=\sqrt{2px}$, $p<0$, obținem graficul alăturat:

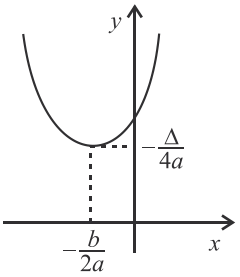
Reprezentând în același sistem de coordonate și funcția $g(x)=-\sqrt{2px}$, $p<0$ (prin simetrie față de axa Ox) obținem reprezentarea grafică a parabolei $y^2 = 2px$, $p < 0$, având axa de simetrie Ox și vârful în $O(0, 0)$.



Proprietăți geometrice ale parabolei

SĂ NE AMINTIM

Graficul $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ al funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ este deja cunoscut sub numele de parabolă. Ne propunem să studiem proprietățile geometrice ale mulțimii $\mathcal{G}_f$. Într-un reper convenabil ales, această mulțime se poate scrie sub forma $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2\}$.

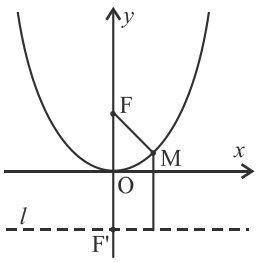


Parabola este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de o dreaptă fixă, numită *directoarea* parabolei și de un punct fix, numit *focarul* parabolei.

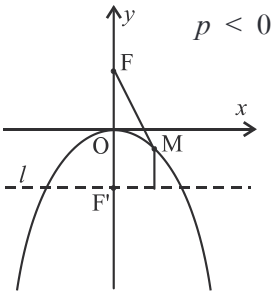
Fie F focarul și l directoarea unei parabole $\mathcal{P}$ și distanța de la F la l este $|p|$. Numărul p se numește parametrul parabolei. Pentru a obține ecuația parabolei (raportată la axe) fixăm în mod convenabil în plan un sistem de coordonate. Fie F' proiecția lui F pe dreapta l și O mijlocul segmentului FF', origine a sistemului de coordonate.

I. Dacă dreapta OF este axa Oy și paralela prin O la dreapta l axa Ox, obținem $\mathcal{P} \overset{def}{=} \{M \mid d(M,l) = MF\}$.

$p > 0$



$p < 0$



Dacă M este un punct din plan având $d(M, l) = MF$, cu notațiile precedente obținem $\left|y+\frac{p}{2}\right| = \sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}$, $x^2 = 2py$.

32) Reprezintă grafic parabolele:

a) $y^2 = 4x$; b) $x^2 = 4y$;

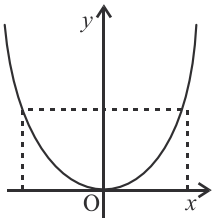
c) $y^2 = -4x$; d) $x^2 = -4y$;

e) $y^2 = \frac{1}{4}x$; f) $x^2 = \frac{1}{4}y$;

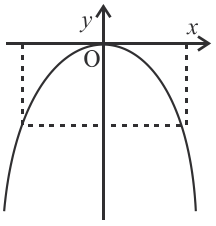
g) $y^2 = -\frac{1}{4}x$; h) $x^2 = -\frac{1}{4}y$.

33) Determină coordonatele focarului și ecuația directoarei parabolei:

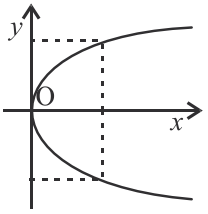
a) $x^2 = 2y$



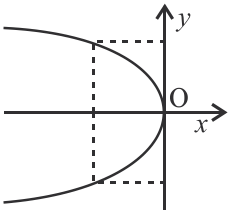
b) $x^2 = -2y$



c) $y^2 = 2x$



d) $y^2 = -2x$



34) Scrie ecuațiile carteziene explicite ale parabolei:

a) $\mathcal{P}: y^2 = 8x$; b) $\mathcal{P}: y^2 = -16x$.

35) Scrie ecuațiile carteziene explicite ale parabolei:

a) $\mathcal{P}: x^2 = 16y$; b) $\mathcal{P}: x^2 = -4y$.

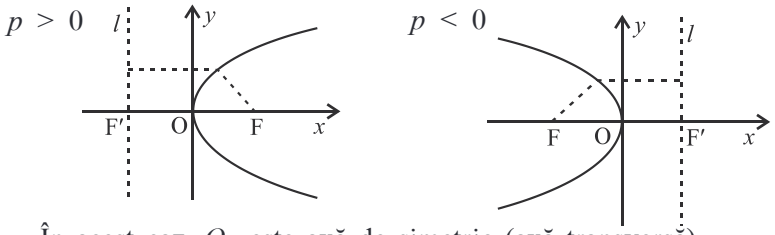
Deci $\boxed{\mathscr{P}=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=2py\right\}}$.

Aceasta este *ecuația carteziană implicită a parabolei* cu axa de simetrie *Oy*.

Observație. $F\left(0,\,\frac{p}{2}\right)$, $F'\left(0,\,-\frac{p}{2}\right)$ și dreapta l: $y=-\frac{p}{2}$.

Dacă notăm $\frac{1}{2p}=a$, obținem *ecuația explicită a parabolei* $\boxed{y = ax^2.}$

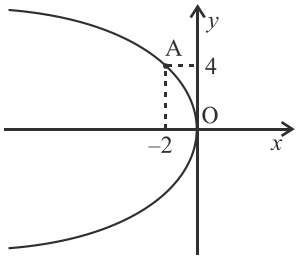
II. Dacă considerăm dreapta *OF* ca axă *Ox* și dreapta *l* de ecuație $x=-\frac{p}{2}$, obținem $\boxed{\mathscr{P}=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=2px\right\}}$.



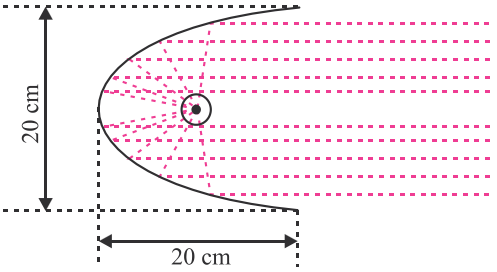
În acest caz, *Ox* este axă de simetrie (axă transversă).

Observație.
Parabola are o singură axă de simetrie și un singur vârf.

36) Scrie ecuația unei parabole cu vârful în origine, axa de simetrie *Ox* și care trece prin punctul *A*(–2, 4).

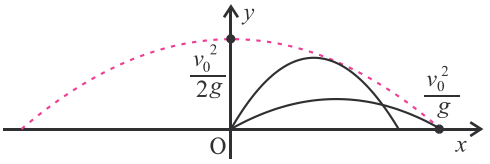


37) La ce distanță de vârf trebuie plasată o sursă de lumină pe axa unui reflector parabolic de înălțime 20 cm și diametrul bazei 20 cm, pentru a produce prin reflexie un fascicul de raze paralele?



Exercițiu rezolvat.

Un depozit este apărat de un tun. Proiectilul poate fi lansat sub orice unghi $\alpha \in [0,\,\pi]$, având viteza inițială constantă. Arată că înfășurătoarea traiectoriilor pe care poate fi lansat proiectilul este o parabolă, numită parabolă de siguranță (în afara acestei parabole orice vehicul aerian este în siguranță).



Indicație.

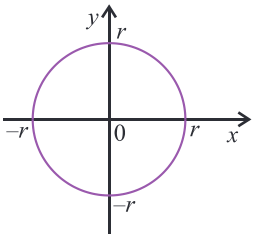
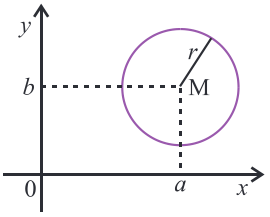
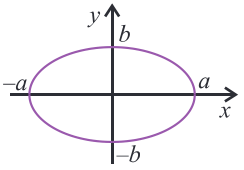
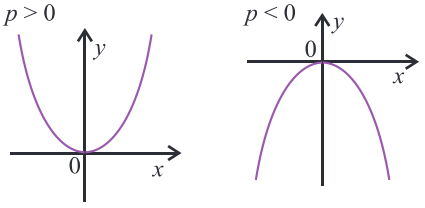
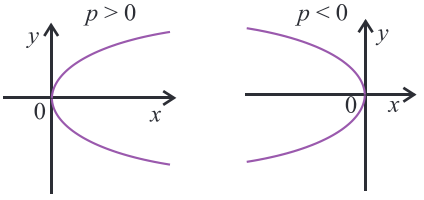
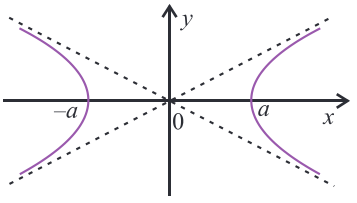
Din ecuațiile mișcării pe cele două axe, $x(t) = v_0\cdot\cos\alpha\cdot t$ și $y(t)=v_0\cdot\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$, eliminând timpul, rezultă ecuația traiectoriei $y=x\,\mathrm{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}$, $\alpha\in[0,\,\pi]$.

Din ecuația echivalentă în tgα, $y=x\,\mathrm{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^{\,2}}(\mathrm{tg}^2\alpha+1)$, punând condiția $\Delta = 0$ (o singură parabolă atinge punctul P(*x*, *y*)) se obține locul geometric.

Observație.

O oglindă „parabolică“ se obține rotind în jurul axei de simetrie arcul $\overset{\frown}{OM}$ al unei parabole. Din punct de vedere optic, razele de lumină paralele cu axa unei oglinzi parabolice sunt reflectate în focar sau, invers, dacă o sursă de lumină este așezată în focar, atunci razele reflectate sunt paralele cu axa oglinzii. Această proprietate stă la baza conceperii telescoapelor cu oglinzi parabolice, a antenelor pentru sateliți etc și este cunoscută sub numele de „proprietatea optică a parabolei“, oglinda parabolică fiind singura ce asigură focalizarea punctuală a unui fascicul paralel de lumină, indiferent de dimensiunile acestuia.

Proprietăți geometrice ale conicelor

conica	ecuația (implicită)	ecuațiile explicite	reprezentarea grafică a conicei
• cerc cu centrul în originea axelor și cu raza r, $r > 0$	$x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$	$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $r > 0$	
• cerc cu centrul în punctul M(a, b) și cu raza r, $r > 0$	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, $r > 0$	$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$	
• elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$	$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $a, b > 0$	
• parabola cu axa de simetrie Oy	$x^2 = 2py$, $p \neq 0$	$y = \frac{x^2}{2p}$, $p \neq 0$	
• parabola cu axa de simetrie Ox	$y^2 = 2px$, $p \neq 0$	$y = \pm\sqrt{2px}$, $p \neq 0$	
• hiperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$	$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $a, b > 0$	

PROBLEME PROPUSE

● Determină domeniul maxim de definiție și reprezintă grafic următoarele funcții, specificând tipul curbei obținute:

1. a) $y=\sqrt{6-x^2}$; b) $y=-\sqrt{6-x^2}$.

2. a) $y=\sqrt{25-x^2}$; b) $y=-\sqrt{25-x^2}$.

3. a) $y=\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$; b) $y=-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$.

4. a) $y=\frac{\sqrt{1-9x^2}}{3}$; b) $y=-\frac{\sqrt{1-9x^2}}{3}$.

5. a) $y=\frac{1}{5}\sqrt{1-25x^2}$; b) $y=-\frac{1}{5}\sqrt{1-25x^2}$.

6. a) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; b) $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

7. a) $y=2\sqrt{16-x^2}$; b) $y=-2\sqrt{16-x^2}$.

8. a) $y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$; b) $y=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.;

9. a) $y=\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}$; b) $y=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}$.

10. a) $y=\frac{1}{4}\sqrt{9-x^2}$; b) $y=-\frac{1}{4}\sqrt{9-x^2}$.

11. a) $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$; b) $y=-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$.

12. a) $y=2\sqrt{x^2-16}$; b) $y=-2\sqrt{x^2-16}$.

13. a) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$; b) $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$.

14. a) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}$; b) $y=-\frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}$.

15. a) $y=\frac{1}{4}\sqrt{x^2-9}$; b) $y=-\frac{1}{4}\sqrt{x^2-9}$.

16. a) $y=\sqrt{x^2-1}$; b) $y=-\sqrt{x^2-1}$.

17. a) $y=\frac{1}{x}$; b) $y=\frac{2}{x}$.

18. a) $y=\sqrt{x}$; b) $y=-\sqrt{x}$.

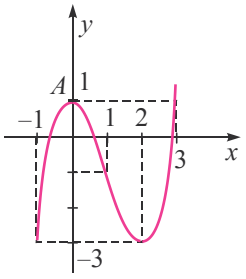
19. a) $y=\sqrt{-x}$; b) $y=-\sqrt{-x}$.

Teste de evaluare

Testul 1

Într-un reper cartezian xOy, $\mathcal{G}_f$ este graficul unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, având reprezentarea grafică următoare.

Tangentele la curbă în punctele A și B, de abscise 0 și 2, sunt paralele cu Ox.



1. Determină grafic $f(0)$, $f(1)$, $f'(2)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+bx^2+c$. Determină constantele a, b, c folosind rezultatele obținute la punctul **1**.

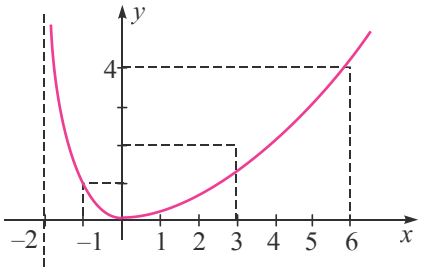
3. Presupunând că $f(x)=x^3-3x^2+1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, determină $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

4. Completează următorul tabel de variație, folosind datele obținute mai sus.

x	$-\infty$		...		...		$+\infty$
f'		...	0	...	0	...	
f	...	↗	...	↘	...	↗	...

Testul 2

Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)$, $f(x)=x-2+\frac{4}{x+2}$ și reprezentarea ei grafică într-un reper cartezian.



1. Arată că funcția f admite o asimptotă oblică și determină ecuația acesteia.

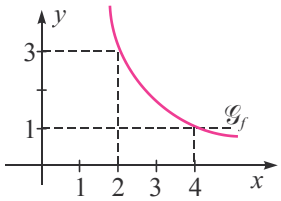
2. Graficul funcției f este situat deasupra sau sub asimptota sa oblică?

3. Presupunând că $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$, ce putem spune despre funcția f?

4. Reprezintă, în același reper cartezian, funcția f și asimptotele ei.

Testul 3

Fie funcția $f:\left(\frac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$ și $\mathcal{G}_f$ reprezentarea ei grafică într-un reper cartezian.



1. Determină $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$.

2. Verifică, din limita de mai sus existența unei asimptote d_1 pentru funcția f și determină ecuația dreptei d_1.

3. Determină $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Verifică, din limita de mai sus existența unei asimptote d_2 pentru funcția f și determină ecuația dreptei d_2.

5. Trasează dreptele d_1, d_2 și funcția f în același reper cartezian.

Testul 4

Considerăm funcția $f:\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 2 - 3\ln(2x + 1)$.

1. Presupunem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. Determină $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)$. Ce deducem de aici, pentru reprezentarea grafică a lui f?

2. a) Determină intervalele de monotonie ale funcției f.

b) Determină tabelul de variație al funcției.

3. Reprezintă grafic funcția f.

4. Demonstrează că ecuația $f(x) = 0$ admite soluție unică pe intervalul $[1, 2]$.

INDICAȚII și RĂSPUNSURI

Pag. 7. 5. Dacă $\sigma\in S_n$, atunci $\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\ldots\in S_n$ și, cum S_n este mulțime finită, rezultă că $\exists a, b\in\mathbb{N}$, $a > b$ astfel încât $\sigma^a=\sigma^b\Rightarrow\sigma^{a-b}=e$. **7.** Dacă $\sigma\in S_n$, fie $\tau = \sigma(i\ j)$. Avem $S_\sigma - S_\tau = a_i a_{\sigma(i)} + a_j a_{\sigma(j)} - a_i a_{\sigma(j)} - a_{j\sigma(i)} = (a_i - a_j)(a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)})$. Dacă S_σ este maximă (minimă), atunci $S_\sigma \geqslant S_\tau$ (respectiv $S_\sigma \leqslant S_\tau$), adică $\forall i > j$ avem $\sigma(i)>\sigma(j)$ (respectiv $\sigma(i)<\sigma(j)$), deci $\sigma(k)=k$ (respectiv $\sigma(k)=n+1-k$), $\forall k=\overline{1,n}$. **13.** a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&4&7&6&2&5&3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&7&6&4&5&3\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&6&4&5&7\end{pmatrix}$; d) $(5\ 6)$; e) $\sigma = (1\ 2)(2\ 4)(3\ 7)(4\ 6)(5\ 6)$.

17. a) $\tau(1) - \tau(2) = \tau(2) - \tau(3) = \ldots = \tau(n - 1) - \tau(n) = 1$, rezultă că $\tau(n), \tau(n - 1), \ldots, \tau(1)$ este progresie aritmetică cu rația 1; $\tau(1), \ldots, \tau(n) \in \{1, 2, \ldots, n\}$, rezultă că $\tau=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\n&n-1&\ldots&1\end{pmatrix}$; b) analog cu a); $\tau = e$;

c) $\frac{\tau(1)}{1}=\frac{\tau(2)}{2}=\ldots=\frac{\tau(n)}{n}=\frac{\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)}{1+2+\ldots+n}=1$, deci $\tau=e$.

Pag. 12. 8. $\begin{pmatrix}n&\frac{n(n+1)}{2}&\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}&\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\-n&2n&3n&\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix}0&0&3p\\3p&0&0\end{pmatrix}$ pentru $n = 3p$; $\begin{pmatrix}\varepsilon&\varepsilon^2&3p+1\\3p+1&\varepsilon&\varepsilon^2\end{pmatrix}$ pentru $n = 3p+1$; $\begin{pmatrix}-1&-1&3p+2\\3p+2&-1&-1\end{pmatrix}$ pentru $n = 3p + 2$.

Pag. 18-19. **3.** $X=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}$. **5.** $A_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. **6.** $C(x)=\begin{pmatrix}2-x & 2-2x\\ x-1 & 2x-1\end{pmatrix}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

7. $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; rezultă $c = 0$, $d = a$. Considerăm $Y=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ și se ajunge la un sistem incompatibil. **12.** Scriem matricea $\begin{pmatrix}7&2&7\\1&14&1\\7&2&7\end{pmatrix}$ sub forma $7A + B$, unde $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$ și apoi calculăm $(7A + B)^n$.

15. b) $A=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -3 & -2\end{pmatrix}=B+I$, $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -3 & -3\end{pmatrix}$; $B^n=2^{n-1}B$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $A^n=(I_2+B)^n=$

$$=I_2+C_n^1B+C_n^2B^2+\ldots+C_n^nB^n=I_2+B\left(C_n^1+C_n^2 2+C_n^3 2^2+\ldots+C_n^n 2^{n-1}\right)=I_2+\frac{3^n-1}{2}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\cdot 3^n-3 & 5\cdot 3^n-5\\ 3-3^{n+1} & 5-3^{n+1}\end{pmatrix}.$$

c) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=aI_2+bB$, unde $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $B^2=I_2$; $A^n=(aI_2+bB)^n=$

$$=I_2\left(C_n^0a^n+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots\right)+B\left(C_n^1a^{n-1}b+C_n^3a^{n-3}b^3+\ldots\right)=I_2\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}+B\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n\\ (a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n\end{pmatrix}.$$ **16.** Prin inducție matematică: $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$; $f(A)=(n+1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{n}{2} & 1\end{pmatrix}$.

17. $A=I_3+B$, $B=\begin{pmatrix}0&-2&3\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B^3=O_3$; $A^n=I_3+C_n^1B+C_n^2B^2=\begin{pmatrix}1&-2n&3n^2\\0&1&-3n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

18. a) $A = I_3 + B$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; $A^k=I_3+C_k^1B+C_k^2B^2$; $\sum_{k=1}^{n}A^k=nI_3+\frac{n(n+1)}{2}B+\frac{n^3-n}{6}B^2=\begin{pmatrix}n & \frac{n^2+n}{2} & \frac{n^3+3n^2+2n}{6}\\ 0 & n & \frac{n^2+n}{2}\\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$.

b) $A = I_3 + B$, $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$; $\sum_{k=1}^{n}A^k=\begin{pmatrix}n & \frac{n^2+n}{2} & \frac{n^3+2n^2+n}{6}\\ 0 & n & \frac{n^2+n}{2}\\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$. **19.** $A = aB + bI_3$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$; $B^n = 2^{n-1}B$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $A^n=\frac{(2a+b)^n-b^n}{2}B+b^nI_3$. **20.** $2(z - y) = t + y - x - z$. **21.** a) $A^2=1\cdot A+2\cdot I_3$; $A^3=3\cdot A+2\cdot I_3$; $A^4=5\cdot A+6\cdot I_3$; $A^5=11\cdot A+10\cdot I_3$; ... b) $a_n=\frac{(-1)^n}{3}+\frac{2^{n+1}}{3}$, $\forall x\in\mathbb{N}^*$; $b_n=\frac{2}{3}(-1)^{n-1}+\frac{2^{n+1}}{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

23. $A^{n+1} = A \cdot A^n = A^n \cdot A$, obținem $bc_n = cb_n$, $ab_n + bd_n = ba_n + db_n$ și $ca_n + dc_n = ac_n + cd_n$.

24. a) $XA = AX \Rightarrow XAY = AXY$; $YA = AY \Rightarrow XYA = XAY$. Obținem $A(XY) = (XY)A$; b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, din $AX = XA$ deducem $b = c = d = f = g = h = 0$; c) $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$, de unde $a = b = c = 0$, deci $X = O_3$

d) $X^{2007} = O_3 \Rightarrow X^{2008} = O_3 \Rightarrow X^{1004} = O_3 \Rightarrow X^{502} = O_3 \Rightarrow X^{251} = O_3 \Rightarrow X^{252} = O_3 \Rightarrow X^{126} = O_3 \Rightarrow X^{63} = O_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow X^{64} = O_3 \Rightarrow \ldots X^2 = O_3 \Rightarrow X = O_3$.

Pag. 26. 1. a) Dacă $a = \frac{1}{2}$, sistem compatibil nedeterminat; dacă $a \neq \frac{1}{2}$, sistem compatibil determinat, $(x, y) = (2, 0)$; c) Dacă $m = -1$, sistem incompatibil; dacă $m \neq -1$, sistem compatibil determinat, $(x, y) = \left(\frac{7}{m+1}, \frac{6m-1}{m+1}\right)$; d) $(x, y) = \left(\frac{8+6n}{n^2+4}, \frac{4n-12}{n^2+4}\right)$. **2.** Punem condiția ca determinantul matricei sistemului să fie 0; $a = -4$. **3.** Dacă $n = -\frac{1}{2}, m \neq 4$, sistem incompatibil; dacă $n = -\frac{1}{2}, m = 4$, sistem compatibil nedeterminat; dacă $n \neq -\frac{1}{2}$, sistem compatibil determinat, $(x, y) = \left(\frac{2+mn}{2n+1}, \frac{4-m}{2n+1}\right)$. **4.** a) $m \neq 5$ $(\Delta \neq 0)$, $S = \left\{\left(\frac{10-mp}{5-m}, \frac{5p-10}{5-m}\right) \mid m, p \in \mathbb{R}, m \neq 5\right\}$; b) $m = 5$ și $p = 2$ $(\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0)$, $S = \{(x, 2-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; c) $m = 5$ și $p \neq 2$ $(\Delta = 0, \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0)$, $S = \varnothing$.

5. a) Dacă $a = 0$, sistem compatibil nedeterminat; dacă $a \neq 0$, sistem compatibil determinat; b) Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, sistem compatibil determinat, $(x, y) = (0, 1)$; dacă $\lambda = -1$, sistem compatibil nedeterminat; dacă $\lambda = 1$, sistem compatibil nedeterminat.

Pag. 29. 1. a) (3, 2, 1); b) (1, –1, 0); c) (–1, 4, 5); d) (3, 1, 1); e) (0, 1, 1); f) (1, 2, 3).

Pag. 34. 2. a) $(a - d)(b - d)(c - d)(a - c)(b - c)(b - a)$; b) $4(a - b)(b - c)(a - c)$; c) $2(x - y)(y - z)(x - z)$;

d) $(c - a)(c - b)(b - a)(a + b + c)$. **3.** $3\omega(\omega - 1)$. **5.** a) $\begin{pmatrix} S_4 & S_3 & S_2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \\ S_2 & S_1 & S_0 \end{pmatrix}$, unde $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$; b) $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -20$; $S_n + aS_{n-2} + bS_{n-3} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; pentru $n = 3$, $n = 4$ obținem $S_3 = -3b$, $S_4 = 2a^2$; $\det(A^tA) = -4a^3 - 27b^2$; c) dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ atunci $\det(A^tA) = \det A \cdot \det({}^tA) = (\det A)^2 \geqslant 0$; dacă, prin absurd, presupunem $x_1 = c + di \notin \mathbb{R}$ atunci $x_2 = c - di$, $x_3 = e$ $(c, d, e \in \mathbb{R})$; $\det(A \cdot {}^tA) = (\det A)^2 =$
$= (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_3)^2 = (2di)^2(c - e + di)^2(c - e - di)^2 = -4d^2[(c - e)^2 + d^2] < 0$ (deoarece $d \neq 0$), contradicție. **6.** Obținem ecuația $x^2(a^2 + b^2 + c^2 - x) = 0$; $a_1 = 0$, $x_2 = a^2 + b^2 + c^2$.
7. a) 4; b) $\det AE = (x + y + z + t)(x + y - z - t)(x - y - z + t)(x - y + z - t)\det E$; c) din a) și b) deducem $\det A =$
$= (x + y + z + t)(x + y - z - t)(x - y - z + t)(x - y + z - t)$. **8.** a) $(n^2 - n + 2) : n = (n - 1)$ rest 2, deci există 2 linii cu toate elementele egale; b) $(n^2 - n + 1) : n = (n - 1)$ rest 1, deci există o linie cu toate elementele nule.

pag 39-40. 1. a) rang $A = 2$ pentru $a = \frac{15}{2}$; rang $A = 3$ pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{15}{2}\right\}$; b) rang A = 1 pentru $a = 1$; rang A = 2 pentru $a = -2$; rang A = 3 pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$; **2.** a) $a = \frac{19}{5}$; b) $a = 3$; **3.** a) $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$; b) $a = 1$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ sau $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ și $b \in \mathbb{R}$. **5.** $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $A^{-1} = \frac{1}{a+2}\begin{pmatrix} 2 & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B^{-1} = \frac{1}{1+2a}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3-2a & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 2+a \end{pmatrix}$;

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. **6.** a) $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; b) $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & -9 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} -23 & 34 \\ 39 & -57 \end{pmatrix}$. **7.** rang $A = 3$ implică rang $B = 3$, deci $\det B \neq 0$; $a \in \mathbb{R}^*$. **8.** a) $\det A = 0$, rang $A = 1$; b) $A^2 = O_3$; $(I_3 - A)(I_3 + A) = (I_3 - A)I_3 + (I_3 - A)A = I_3 - A + A - A^2 = I_3$; c) $(I_3 - A)^{-1} = I_3 + A$. **9.** a) $AB - A - B = O_n$, $AB - A - B + I_n = I_n$, $A(B - I_n) - (B - I_n) = I_n$, $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$; $\det(A - I_n)\det(B - I_n) = 1$; rezultă că $\det(A - I_n) \neq 0$, deci $A - I_n$ inversabilă și, din unicitatea inversei, obținem $(A - I_n)^{-1} = B - I_n$. b) aplicând a) obținem $(A - I_n)^{-1} = B - I_n = C - I_n$, deci $B = C$ și, analog, $A = B = C$. Înlocuind: $A^2 = 2A$ și prin inducție matematică obținem $A^n = 2^{n-1}A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **10.** Considerând un minor d de ordin k T min $\{m, p\}$ al matricei AB și aplicând proprietatea VII (determinanți) pentru prima coloană obținem o descompunere a lui d în sumă de k determinați $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$. Aplicând același procedeu pentru a doua coloană, din fiecare determinant $d_1, d_2, \ldots, d_k$ obținem o descompunere a lui d în sumă de k^2 determinanți. Continuând procedeul, obținem în final o descompunere a lui d în sumă de k^k determinanți de forma: $\begin{vmatrix} a_{1i_1} & b_{i_1j_1} & \ldots & a_{1i_k} b_{i_kj_k} \\ a_{2i_1} & b_{i_1j_1} & \ldots & a_{2i_k} b_{i_kj_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ki_1} & b_{i_1j_1} & \ldots & a_{ki_k} b_{i_kj_k} \end{vmatrix} = b_{i_1j_1} \ldots b_{i_kj_k} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \ldots & a_{1i_k} \\ a_{2i_1} & \ldots & a_{2i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ki_1} & \ldots & a_{ki_k} \end{vmatrix} = 0$ pentru $k >$ rang A, deci $d = 0$ pentru $k >$ rang A și, analog, $d = 0$ pentru $k >$ rang B; se deduce rang AB T min {rang A, rang B}.

11. Din rang $AB \leqslant$ min {rang$A$, rang B} rezultă rang AB T rang A. Analog, $A = (AB)B^{-1}$ deci rang $A \leqslant$ rang AB; se obține rang A = rang AB. **12.** Avem $(A - bI_n)(B - aI_n) = abI_n$, $ab \neq 0$ de unde rang $(A - bI_n) = \text{rang}(B - aI_n) = n$; cum $A(B - aI_n) = bB$ și rang $(B - aI_n) = n$, deducem rang A = rang bB = rang B. **13.** Aplicând succesiv rezultatul demonstrat la 12., deoarece $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(B + A)B^{-1}$ și $\det A^{-1} \neq 0$, $\det B^{-1} \neq 0$ obținem concluzia.

Pag. 48. 1. a) (3, 0, –1); b) (3, 0, –1); c) $\{(-3\alpha - 7, -2\alpha - 2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; d) (–1, 3, –2). **2.** a) (1, 2, 3); b) (1, 2, 1). **3.** a) (2, –5, 4); b) (–3, 5, 2); c) (4, –6, 8); d) (3, 2, 0, 0). **5.** {(1, 2, 3, 4)}; {(2, 1, 1, 1)}. **6.** a) $\Delta = 2(m + 1)$; dacă $m \neq -1$, atunci $x = 1$, $y = \frac{1}{2}(m+1)$ (sistem compatibil determinat); dacă $m = -1$, atunci $x = 1 - 2y$, $y \in \mathbb{R}$ (sistem compatibil nedeterminat); b) $\Delta = m^2 - 36$; dacă $m \neq \pm 6$, atunci $x = \frac{9m-4}{m^2-36}$; $y = \frac{m-81}{m^2-36}$; dacă $m = 6$ sau $m = -6$, atunci sistemul este incompatibil. **7.** a) $S = \left\{\left(-\frac{23+13\alpha}{7}, -\frac{12+\alpha}{7}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, sistem compatibil nedeterminat; b) $S = \varnothing$, sistem incompatibil; c) sistem incompatibil; d) sistem incompatibil. **8.** $\alpha = 1$, $\alpha = 0$.

9. a) $m = \frac{23}{11}$; b) $m = 0$ și $S = \{(1, -2)\}$; c) $m = 2$ și $S = \{(4, -1)\}$ sau $m = -9$ și $S = \left\{\left(-7, \frac{8}{3}\right)\right\}$. **10.** a) $\begin{cases} x = m \\ y = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. **11.** a) $\Delta_p = -5 \neq 0$; punem condiția ca cei doi minori caracteristici să fie nuli; $a = 3$, $b = 2$ și $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$; b) $a = 3$, $b = -6$, $\begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$; c) $a = 1$, b = 2, $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ sau $a = \frac{2}{3}$, $b = 1$. **12.** a) Dacă $\lambda = -4$, $S = \{(1, -\frac{3}{2})\}$; dacă $\lambda = -1$, $S = \left\{\left(\frac{16}{5}, -\frac{6}{5}\right)\right\}$; dacă $\lambda = 3$, $S = \{(1, 2)\}$; altfel sistem incompatibil; b) $\Delta = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$; dacă $\lambda \neq 1$ și $\lambda \neq -2$, atunci $x = \frac{\lambda^2+1}{1-\lambda^2}$; $y = \frac{1}{\lambda+2}$; $z = -\frac{1}{\lambda+2}$; sistemul este compatibil determinat; dacă $\lambda = 1$, atunci

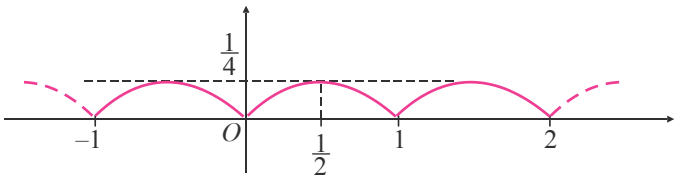
sistemul este compatibil nedeterminat, S = $\{(a,\ b,\ 1-a-b),\ a,b\in\mathbb{R}\}$; dacă $\lambda = -2$, atunci sistemul este incompatibil. **13.** a) Dacă $m \neq -1$, atunci $x = (m+1)k$, $y = (1-m^2)k$, $z = -(m+1)k$, k arbitrar; dacă $m = -1$, atunci $x = y + z$, cu y, z arbitrare; b) $x = 13k$, $y = 2k$, $z = 7k$, $k \in \mathbb{R}$. **14.** a) $m = 1$, $m = -2$; b) $m = -\frac{1}{2}$, $m = 1$.
15. $1 - ab + ac + bc + 2abc = 0$.

Pag. 58. 2. $A = [-2;\ 2]$; $B = [0;\ 2]$; $C = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$; $D = (-\infty;\ -2] \cup [2;\ \infty)$; $E = (-\infty;\ 0] \cup [2;\ \infty)$; $F = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; \infty\right)$. **3.** a) $0 < |a-b| < \frac{1}{2}$; b) $|a-b| > \frac{1}{2}$. **4.** $A = [2;\ 4]$; $B = (-\infty;\ -1) \cup (3;\ \infty)$, $C = [0,\ 2] \cup [4;\ 6]$;
5. a) $n \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; b) $n \geqslant 6$; c) $n \geqslant 10$; d) $n \geqslant 5$. **6.** Deoarece membrii egalităților sunt expresii simetrice în a, b (respectiv a, b, c pentru a treia egalitate), este suficientă tratarea cazului $a \leqslant b$ (respectiv $a \leqslant b \leqslant c$).
7. Pentru $n = 1$, $n = 2$ s-a demonstrat. Presupunem propoziția adevărată pentru n numere. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ atunci $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}| = |(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + x_{n+1}| \leqslant |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + x_{n+1}$.
8. Inegalitatea este echivalentă cu $|nx - m| < 1$. Se poate alege $m = [nx] \in \mathbb{Z}$. **9.** Infimumul este: a) -2; b) -1; c) -3; d) 0; e) $\frac{1}{2}$. Supremumul este: a) 1; b) 3; c) 100; d) 1; e) 1. Pentru minimum: a) nu există; b) -1; c) -3; d) 0; e) $\frac{1}{2}$. Pentru maximum: a) 1; b) 3; c) nu există; d) nu există; e) nu există. **10.** a), b), d). **11.** Infimumul calculat în $\mathbb{R}$: a) nu există; b) $\sqrt{2}$; c), d), e) f) nu există; g) 0; h) nu există. Supremumul calculat în $\mathbb{R}$: a), b) nu există, c) 0; d) 0; e) -1, f) -1; g, h) nu există. Minimul: a) nu există; b) $\sqrt{2}$; c), d), e), f), g), h) nu există. Maximul: a), b), d), g), h) nu există; c) 0; e) -1; f) -1. **12.** a) $A' = \{0\}$, $A \setminus A' = A$; b) $A' = \overline{\mathbb{R}}$, $A \setminus A' = \varnothing$; c) $A' = [-\infty, -3] \cup [5; \infty]$, $A \setminus A' = \varnothing$; d) $A' = \{-\infty; +\infty\}$, $A \setminus A' = \mathbb{Z}$; e) $A = \{+\infty\}$, $A \setminus A' = \mathbb{N}$; f) $A' = \overline{\mathbb{R}}$, $A \setminus A' = \varnothing$; g) $A' = \overline{\mathbb{R}}$, $A \setminus A' = \varnothing$; h) $A' = [-\infty, -3]$, $A \setminus A' = \{1\}$.

Pag. 69. 1. f nu este surjectivă deoarece nu ia valoarea 3; f este injectivă. **2.** a) $[-1;\ 3]$; b) f este strict descrescătoare; $\min f = f(3) = -2$; $\max f = f(-1) = 2$. **3.** a) $[-1;\ 4]$; b) $\left[-1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 4\right]$; c) $A(-1;\ 0)$, $B(4;\ 0)$, $C(0,\ 4)$.
4. a) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup [\sqrt{2}; \infty)$; b) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$; c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}; 4\right\}$; d) $(-\infty;\ -1] \cup (2;\ \infty)$. **5.** a) $x_1 = 7$; b) $x_1 = x_2 = -1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. **6.** a) $(x-1)(x+2)(x+3) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-3; -2\} \cup [1; \infty)$; b) $(x+1)(2x+1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **7.** $2^x \geqslant 10^x \Leftrightarrow x \leqslant 0$; b) $|x-1| \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-1; 3]$; c) $f(x) = -2$, $\forall x \in \left(-\infty; -\frac{\pi}{4}\right)$, $f(x) = -1$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right)$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right)$, $f(x) = 1$, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \infty\right)$; d) $f(x) = |(x-1)^2(x+2)| = (x-1)^2|x+2|$ etc.
8. a) $f(x) = 0$, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right)$; $f(x) = 1$, $\forall x \in [5; 50)$; $f(x) = 2$, $\forall x \in [50; 500)$; $f(x) = 3$, $\forall x \in [500, 2006)$;
b) $f(x) = \sin x$, $\forall x \in [0;\ \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; $f(x) = \sin x + 1$, $\forall x \in (\pi, 2\pi) \setminus \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$; c) $f(x) = \sin x$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x) = 1$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; d) $f(x) = x^2$, $\forall x \in [-1;\ 0]$, $f(x) = 0$, $\forall x \in (0;\ 1]$.
9. a) $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x - \pi$; b) $f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x$; c) $f^{-1}(x) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}$.
10. b) $f(x) = y$, $y \in [0;\ \pi) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}$, $y \in [0, \pi)$; c) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $(-1;\ 1)$.

11. a) $f(x+1) = \{x+1\}(1-\{x+1\}) = \{x\}(1-\{x\}) = f(x)$ deci $T = 1$ perioadă. Dacă ar exista $A \in (0, 1)$ perioadă pentru f, am avea $f(x+A) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(A) = f(0)$ sau $A(1-A) = 0$, de unde $A \in \{0, 1\}$ contradicție. Deci $T = 1$ e perioadă principală;

b)



c) f crescătoare pe intervalele de forma $\left[k, k+\frac{1}{2}\right]$ și descrescătoare pe intervalele de forma $\left[k-\frac{1}{2}, k\right]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; d) $f(x) = \frac{1}{8}$ are soluțiile $\{x\} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ și $\{x\} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, deci $x \in \left\{k + \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

12. a) Vom arăta că, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists!\, x \in (-1, 1)$ a.î. $f(x) = y$. Într-adevăr, dacă $y \in \mathbb{R}$ atunci

$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2y \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \Rightarrow \exists! x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \in (-1, 1)$; b) $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$;

c) S este inclusă în pătratul de latură 1 având coordonatele vârfurilor $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$;

d) Deoarece $\mathcal{G}_f$ și $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ admit prima bisectoare a sistemului xOy ca axă de simetrie, deducem că și S are aceeași axă de simetrie.

13. a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x^2 + 4x + 3$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\mathcal{G}_f$ se intersectează cu $\mathcal{G}_g$ în două puncte; ecuația are două soluții. b) Se procedează analog; 8027 soluții; c) Ecuația devine $(y^2 + 2x - 6)^2 + (y + 2x - 4)^2 = 0$, de unde $y^2 + 2x - 6 = y + 2x - 4 = 0$; 2 soluții.

Pag. 78-79. 1. a) și b) strict crescător și mărginit; c) strict crescător și nemărginit superior; d) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ strict crescător; $a_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\forall n \geqslant 1$; e) $a_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$; $a_{4k+1} = 1$, $a_{4k+3} = -1$, $\forall k \in \mathbb{N}$; șirul nu e monoton; $a_n \in [-1, 1]$, $\forall n \geqslant 1$; f) (a_n) strict descrescător; $a_n \in (0, 2]$, $\forall n \geqslant 1$; g) a_n strict crescător; $a_n > n$, $\forall n \geqslant 2$, (a_n) nemărginit.

2. a) nu este monoton; este mărginit; b) strict crescător și mărginit; c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ este strict descrescător și mărginit; d) strict descrescător și mărginit; e) strict crescător; $a_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} =$

$= 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; f) (a_n) strict crescătoare; $0 < a_n \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$,

$\forall n \geqslant 1$; g) (a_n) crescător; $0 < a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$; h) (a_n) crescător; $a_n > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n \text{ termeni}} = \frac{n}{2}$;

(a_n) nemărginit; i) $a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (a_n) crescător;

j) $2a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}$, $a_n = \frac{n}{2n+1} \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; (a_n) crescător.

3. 6; **4.** 7; **5.** 270; **6.** a_2; **7.** a_1; **8.** b) $a_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **9.** Este șir strict crescător (strict descrescător) și nemărginit. **10.** $a_n = \frac{n+1}{2} \to \infty$. **11.** a) $x_0 > x_1 < x_2$; $x_{2n} \to \infty$; $x_{2n-1} \to -\infty$; b) $x_0 < x_1 = x_2 > x_3$, $x_{3n} = 0 \to 0$, $x_{6n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $x_0 > x_1 < x_2$, $x_{2n} \to 1$, $x_{2n-1} \to 0$. **12.** a) convergent; b) 0; c) 0. **16.** Cele două subșiruri „acoperă” toți termenii șirului. **17.** Cele trei subșiruri au limite egale.

18. a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$; $\frac{1}{2}=\frac{n}{2n}<a_n<\frac{n}{n+1}<1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}<1$; aplicând inegalitatea mediilor avem: $\sqrt{1\cdot 3}<\frac{1+3}{2}=2$, $\sqrt{3\cdot 5}<\frac{3+5}{2}=4$,

$\sqrt{5\cdot 7}<\frac{5+7}{2}=6$, ..., $\sqrt{(2n-1)(2n+1)}<2n$, și prin înmulțirea lor deducem: $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$

adică $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<1$, deci $a_n\in[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. c) Pentru $n\in(2^k, 2^{k+1}]$, $k\in\mathbb{N}^*$ avem $a_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$

$+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\left(\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^k}=1+\frac{k}{2}$ și

pentru $n\to\infty$ avem $k\to\infty$, deci $a_n\to\infty$; (a_n) nemărginit.

Pag. 83. 1. a) $b_n=\frac{2n^2+6}{2n^2+1}=1+\frac{5}{2n^2+1}\in(1;6]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; b) $a_n>\frac{n}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **4.** Folosește criteriul majorării. **5.** b) $\sqrt[n]{n}=y_n+1$; $n=1+C_n^1y_n+C_n^2y_n^2+\ldots$; $n>\frac{n(n-1)}{2}y_n^2$; $y_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $\forall n\geqslant 2$. **6.** Șirurile sunt monotone și mărginite. **8.** c) $x_n\in(2;3)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (inducție); $x_{n+1}-x_n=(x_n-2)(x_n-3)<0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **9.** a) Pentru $0<u_0<6$ șir strict crescător și mărginit; pentru $u_0>0$ șir strict descrescător și mărignit; pentru $u_0=6$, șir constant.

10. Pentru $0<u_0<\frac{10}{3}$, șir strict crescător și mărginit; pentru $u_0>\frac{10}{3}$, șir strict descrescător și mărginit; pentru $u_0=\frac{10}{3}$, șir constant. **11.** a) inducție; b) 0. **12.** a) $n\leqslant\sqrt{n^2+k}\leqslant n+1$, $k=\overline{1,n}$; $\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{1}{n}$. Adunăm inegalitățile pentru $k=\overline{1,n}$ și obținem $\lim s_n=1$. b) $\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{n+k}\leqslant\frac{\pi}{n+1}$, $k=\overline{1,n}$; $\cos\frac{\pi}{n+1}\leqslant\cos\frac{\pi}{n+k}\leqslant\cos\frac{\pi}{2n}$;

$\cos\frac{\pi}{n+1}\leqslant a_n\leqslant\cos\frac{\pi}{2n}$; $\lim a_n=1$. **13.** $a=2$; $b=-1$; $\lim u_n=2$. **14.** $a=1$, $b=4$, $c=3$, $\lim v_n=\infty$.

Pag. 89. 1. a) ∞; b) 0; c) 0. **2.** a) ∞; b) nu are limită; c) $x_n=2^{-n}$, $y_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. **3.** a) 2; b) ∞; c) $m=2^n$, $y_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. **4.** $a\in(-\infty,1)\cup(2;\infty)$. **5.** $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right]$. **6.** $a\in\left(0;\frac{1}{100}\right]$.

Pag. 96-97. 1. a) $a_n=1-\frac{1}{2^n}\to 1$; b) $a_n=2^n\to\infty$; c) $a_n=1-\frac{1}{(n+1)!}\to 1$. **2.** a) $x_0>x_1<x_2$; b) $x_0<x_1>x_2$;

c) $x_0>x_1<x_2$. **3.** a) -1; b) 1; c) $\frac{1}{2}$. **4.** $x_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. **5.** a) 2; b) $-\infty$; c) 0; d) -5; e) $-\frac{7}{9}$. **6.** $a=1$, $b=-3$.

7. a) $\frac{1}{4}$; b) ∞; c) -3; d) 0; e) $\frac{5}{4}$; f) 2. **8.** a) $\lim a_n=\begin{cases}0, a\in(0,5)\\1, a=5\\\infty, a\in(5,\infty)\end{cases}$. **9.** a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\infty$; f) $-\infty$;

g) ∞. **10.** a) a = 1, $b=\frac{5}{2}$, b) $a=1$, $b=0$; c) $a=1$, $b=0$; d) $a=3$, $b=-4$, $c=-\frac{14}{3}$, $d=2$. **11.** a) $a=1$, $b=-\frac{9}{2}$;

b) $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$. **12.** a) $\lim x_n=\begin{cases}0, k=0\\-2, k=1\\-\infty, k>1\end{cases}$; b) $\lim x_n=\begin{cases}\infty, a\leqslant 0\\-\infty, a>0\end{cases}$; c) $\lim x_n=\begin{cases}\frac{1}{3}, a=1\\\infty, \operatorname{sgn}(1-a), a\neq 1\end{cases}$.

13. a) $\lim a_n=\begin{cases}\infty\operatorname{sgn}(1-a), a\neq 1\\-\frac{3}{2}, a=1\end{cases}$; b) $\lim a_n=\begin{cases}0, k=0\\\infty, k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$; c) $\lim a_n=\begin{cases}\frac{1}{3}, k=0\\\infty, k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. **14.** a) $\frac{1}{e}$; b) e^2; c) e^2; d) e.

15. a) e^4; b) e^3; c) e^2; d) e^2; e) 1; f) e; g) ∞. **16.** $\lim\left(a+\frac{bn}{n^2+1}\right)=a$, deci $a \geqslant 0$. Pentru $a = 0$ limita este 0 (nu convine). Pentru $a > 0$, $\left(a+\frac{bn}{n^2+1}\right)^{3n}=a^{3n}\left(1+\frac{(b/a)n}{n^2+1}\right)^{y_n}$, $y_n=\frac{3n^2(b/a)}{n^2+1}$, deci $b=\frac{2}{3}$ și $a = 1$.

18. $x_n=\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{a^{2n+2}-2a^{n+1}+1}{a^{2n+2}-1}$, dacă $a \neq \pm 1$; $\lim x_n=\begin{cases}\frac{1+a}{1-a}, |a|<1\\ \frac{1+a}{a-1}, |a|>1\\ \infty, a=1\\ 0, a=-1\end{cases}$. **19.** 2. **20.** Se înmulțește cu $1 - x$. **21.** $\frac{\sin x}{x}$.

22. $f(x)=\begin{cases}0, |x|<2\\ x^2, |x|>2\\ 2, |x|=2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1, |x|<2\\ -\frac{1}{2}, x=2\\ 0, |x|>2\end{cases}$. **23.** a) $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\sqrt{1+\frac{k}{n^n}}-1=\frac{\sqrt{n^2+k}-n}{n}=$

$=\frac{k}{n(\sqrt{n^2+k}+n)}\in\left[\frac{k}{n(\sqrt{n^2+n}+n)};\frac{k}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}\right]$; $l=\frac{1}{4}$. **24.** Folosește criteriul cleștelui: a) $\frac{1}{4}$; b) 1;

c) $\frac{C_n^k}{n+2^n}\leqslant\frac{C_n^k}{k+2^k}\leqslant\frac{C_n^k}{1+2^n}$, $k=\overline{1,n}$; $\frac{2^n-1}{2^n+n}\leqslant a_n\leqslant\frac{2^n-1}{2^n+1}$; $a_n\to 1$. **25.** a) $\ln(ab)$; b) $\log_3 2$. **26.** $1 + a + b = 0$. **27.** Dacă

$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$, atunci $x_{2n}=\frac{1}{4}x_n+\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\to\frac{\pi^2}{6}$; $\lim\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$.

28. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}\to 1$; $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{(k^2+3k)(k^2+3k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2+3k}-\frac{1}{k^2+3k+2}\right)$.

29. a) $a_n=1-\frac{1}{(n+1)!}\to 1$; b) $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$; c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\to\infty$;

d) $\frac{1}{(k+1)!+k!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$; e) $\forall k, \exists b_k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} b_k=k\cdot\frac{1}{k^2+k+1}=\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}=\frac{\operatorname{tg}b_{k+1}-\operatorname{tg}b_k}{1+\operatorname{tg}b_k\operatorname{tg}b_{k+1}}=$

$=\operatorname{tg}(b_{k+1}-b_k)$; $a_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}=b_1=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$. **30.** $x_n\in(0;1], \forall n$; $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1, \forall n$; $x_n\to 0$.

31. a) $x_n=n\cdot 3^n\left(\frac{(n-1)!}{3^n}-1\right)\to\infty$; b) 0; c) $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$, $x_n\to\infty$; d) 0; f) $-\infty$. **32.** a) $e^{\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$;

c) $e^{-\frac{a^2}{2}}$; d) e^2; e) e. **33.** Folosește criteriul Stolz-Cesaro. a) $\frac{1}{3}$; b) 0. **34.** c) Pentru șirul $\frac{[(n+1)a]}{2n+1}$ folosește criteriul

cleștelui. **35.** a) 1; b) $\frac{1}{e}$; c) $\ln\sqrt[n^2]{n!}=\frac{\ln n!}{n^2}$; $\frac{\ln(n+1)!-\ln n!}{(n+1)^2-n^2}=\frac{\ln(n+1)}{2n+1}\to 0$; $\sqrt[n^2]{n!}\to 1$. **36.** Folosește criteriul radicalului

a) $\frac{4}{e}$; b) ∞.

pag. 105. 3. a) ∞; b) $-\infty$; c) -1; d) ∞. **4.** i) $f(x_n)\to 0, f(y_n)\to 1$; ii) nu există. **5.** $f(\sqrt{2}-0)=-\infty$, $f(\sqrt{2}+0)=\infty$.
6. 3. **7.** 1. **8.** i) $h(1-0)=3$, $h(1+0)=1$. **9.** $f(-1-0)=-\infty$, $f(-1+0)=-1$. **10.** $f(-2+0)=-2$;
$f(-2-0)=\frac{1}{-2+a}(a\neq 2)$; $a=\frac{3}{2}$.

pag. 112-113. 1. a) $f(0-0)=f(0+0)=0$; b) $f(0-0)=f(0+0)=1$; c) $f(1-0)=1$, $f(1+0)=2$.

2. a) 0; b) ∞; d) -1; e) $-\infty$; f) ∞; g) ∞; h) $-\infty$; i) $-\infty$; j) $-\infty$. **3.** a) ∞; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) ∞; e) $-\infty$; f) ∞; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{2}{3}$; i) 0; j) 0; k) 2; l) $\frac{7}{3}$; m) $\frac{1}{4}$; n) -3; o) $\frac{3}{2}$; p) 3; r) 6; s) $\frac{n(n+1)}{2}$; ș) $2\sqrt{2}$; t) $3+2\sqrt{2}$. **4.** $f(2-0)=f(2+0)=0$, $g(2-0)=0$, $g(2+0)=4$. **5.** a) ∞; b) 0; c) 0; d) ∞; e) 0; f) -1; g) 0; h) sin1; i) cos(-1); j) sin a; k) ∞; l) cos a; m) 0; n) ∞. **6.** a) 1; b) $\sqrt{3}$; c) $-\infty$. **7.** a) $f(-3-0)=\infty$, $f(-3+0)=-\infty$, $f(3-0)=-\infty$; $f(3+0)=\infty$, b) $f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$; c) $f\left(\frac{\pi}{3}-0\right)=\infty$, $f\left(\frac{\pi}{3}+0\right)=-\infty$; d) $f(2-0)=\infty$, $f(2+0)=-\infty$. **8.** a) 0; $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{2}$; 0; d) ∞; e) ∞. **9.** a) ∞; b) ∞; c) ∞; d) $-\infty$. **10.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\sin\frac{x^3+1}{2x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^3\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x^3+1}{2x^3+1}=0$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-x\right)\operatorname{tg}\frac{x+1}{x+\pi}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x)\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}\frac{x+1}{x+\pi}=0$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}\cos\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x^2}=0$; d) Dacă $x_n\xrightarrow[n]{}\infty$, atunci $[x_n]\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, $1-[x_0]\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$, $2^{1-[x_n]}\to 0$ pentru orice șir $x^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ și din criteriul lui Heine se obține $\lim\limits_{x\to\infty}2^{1-[x]}=0$. **11.** a) $\ln\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 1; d) ∞; e) ∞; f) arctg2; g) 0; h) $\frac{\pi}{2}$; i) 1; j) $-\infty$; k) $-\infty$; l) $-\frac{3}{2}$.

12. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^3+2ax^2}{x^2-2x}=b\Leftrightarrow a=1$ și $b=2$; b) $n=1$, $b=1$. **13.** $p+q+1=0$; $p=-\frac{3}{2}$, $q=\frac{1}{2}$. **14.** $b=1$, $a\in\mathbb{R}$.

15. $a=0$. **16.** $a=0$. **17.** a) Fie șirurile (x_n), (y_n) definite prin $x_n=n\pi$, $y_n=n\pi+\frac{\pi}{4}$. Avem $x_n, y_n\to\infty$, $f(x_n)\to 0$, $f(y_n)\to 1$. b) Fie șirurile (x_n), (y_n) definite prin $x_n=nT+a$, $y_n=nT+b$ unde T e perioadă pentru f și $a, b\in\mathbb{R}$: $f(a)\neq f(b)$. Avem $x_n, y_n\to\infty$, $f(x_n)\to f(a)$, $f(y_n)\to f(b)$.

18. a) Alegem șirurile (x_n), (y_n) a.î. $x_n=\frac{1}{n\pi}$, $y_n=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{4}}$ și procedăm analog cu problema 17;

b) $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\pi}$; c) $\lim\limits_{x\nearrow 2}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 2}f(x)=2$; d) $\lim\limits_{x\nearrow 2}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 2}f(x)=0$.

20. a) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}}(x^3+2x+1)=a^3+2a+1$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}f(x)=a^3-2a$; $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)\Leftrightarrow a^3+2a+1=a^3-2a\Leftrightarrow a=\frac{-1}{4}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}}f(x)=pa^n$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}f(x)=q$; $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)\Leftrightarrow pa^n=q\Leftrightarrow a^n=\frac{q}{p}\Leftrightarrow a=\begin{cases}\sqrt[n]{\frac{q}{p}}, & n \text{ par}\\ \pm\sqrt[n]{\frac{q}{p}}, & n \text{ impar}\end{cases}$.

pag. 116. 1. a) ∞; b) $-\infty$; c) 0; d) ∞; e) ∞; f) 1; g) 0; h) 1; i) $\frac{n(n+1)}{2}$; j) 0; k) $\frac{n(n+1)}{2}$; l) b; m) $\frac{9}{10}$. **2.** g) ∞; h) $-\infty$; i) $-\infty$, j) $-\infty$. 3. a) ∞; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) ∞; e) $-\infty$; f) ∞; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{2}{3}$; i) 0; j) 0; k) 2; l) $\frac{7}{3}$; m) $\frac{1}{4}$; n) -3; o) $\frac{3}{2}$; p) 3; r) 6; s) $\frac{n(n+1)}{2}$; ș) $2\sqrt{2}$; t) $3+2\sqrt{2}$; 5) a) ∞; b) 0; c) 0; d) ∞; e) 0; f) -1; g) 0; h) sin1; i) cos(-1); j) sina; k) ∞; l) cosa; m) 0; n) ∞. **2.** Dacă $x_n=n\pi$, atunci $f(x_n)\to\infty$; dacă $y_n=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, atunci $f(y_n)=0\to 0$.

3. În 2 nu are limită. $f(x) \geqslant x-1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aplicând criteriul minorării la ∞ obținem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. **4.** $a=0$.

5. i) $|f(0)| \leqslant 0 \Rightarrow f(0)=0$; ii) $x^2-a|x| \leqslant f(x) \leqslant \leqslant x^2+a|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aplicați criteriul cleștelui.

6. $a=\sqrt{2}; b=-\sqrt{2}$; **7.** $f(0-0)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $f(-1+0)=-\infty$, $f(-1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}=-\infty$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2\cdot 3^x}{3^{2x}}=\infty$. **9.** i) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}\right)=-2$; ii) $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)+\left(\sqrt{x(x+1)}+x\right)\right]=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}-x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=0.$$

10. $f(x)=\dfrac{a-x}{a(x^2+1)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-ax}{x^2+1}\right)^x=e^{-a}$; $a=-2$. **11.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \Rightarrow a=\sqrt{b}$ și $c=2\sqrt{b}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-4x]=2 \Rightarrow a-4+\sqrt{b}=0$; $a=2$, $b=4$, $c=4$.

pag. 121-122. 1. 0. **2.** ∞. **3.** 2. **4.** 0. **5.** 0. **6.** $\dfrac{13}{7}$; **7.** 0. **8.** ∞. **9.** $-\infty$. **10.** -1. **11.** -1; **12.** $3a^2$; **13.** $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$; **14.** $\dfrac{1}{9}$; **15.** 2. **16.** -2. **17.** 0. **18.** $-\dfrac{1}{2}$; **19.** $-\dfrac{1}{4}$; **20.** 1. **21.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **23.** 0. **24.** 1. **25.** 3. **26.** 1. **27.** $\ln ab$. **28.** 1. **29.** $\dfrac{a}{b}$; **30.** 1. **31.** 1. **32.** $\dfrac{a}{b}$; **33.** -1. **34.** 1. **35.** i) a; ii) a; iii) $-\infty$; ∞. **36.** i) $a=1$, $b=-1$; ii) $a=1$, $b=-\dfrac{5}{2}$; iii) $a=8$; $b=-4$.

37. $l=\begin{cases}0, \alpha<\dfrac{1}{2}\\ 1, \alpha=\dfrac{1}{2}\\ \infty, \alpha>\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **38.** $a\in\left[\dfrac{1}{12};\infty\right)$; ∞ dacă $a\in\left[\dfrac{1}{12};1\right)$; $\dfrac{1}{2}$ dacă $a=1$; $-\infty$ dacă $a\in(1;\infty)$. **39.** $a=\dfrac{4}{3}$.

40. $e^{\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}}$. **41.** $e^{\frac{b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\ldots+b_n\ln a_n}{n}}$. **42.** $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$; $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$. **43.** $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x+\cos 2x(1-\cos 3x)}{x^2}=\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}+$

$+\cos 2x\cdot\dfrac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$; $l=\dfrac{13}{2}$. **44.** $f(x)=1-\cos x\cos 2x\ldots\cos(n-1)x+\cos x\cos 2x\ldots\cos(n-1)x\cdot\dfrac{1-\cos nx}{x^2}=$

$=f_{n-1}(x)+\cos x\ldots\cos(n-1)x\cdot\dfrac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\dfrac{x^2}{4}$. Prin trecere la limită obținem recurența $l_n=l_{n-1}+\dfrac{n^2}{2}$, $\forall n\geqslant 2$ și

$l_1=\dfrac{1}{2}$, de unde $l_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. **45.** $\sin x=y$; $\lim\limits_{y\to1}\dfrac{(1-y)(1-y^2)(1-y^3)}{(1-y^2)^3}=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{(1+y)(1+y+y^2)}{(1+y^2)^3}=\dfrac{3}{4}$. **46.** $\dfrac{n!}{2^n}$.

pag. 127. 1. a) $x=\pm1$; b) $x=-1$; c) $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; d) $x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; e) nu există; f) $x=0$; g) $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; h) $x=k$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.** $a=4$. **3.** a) $y=0$; b) $y=0$, $x=\pm2$; c) $y=0$; $x=\pm2$; d) $y=x-\pi$, $y=x+\pi$; e) $x=0$, $y=x$; f) $x=1$; $y=2x+3$; g) $x=1$; h) $x=-1$, $y=1$; i) $x=\dfrac{3}{2}$; $y=\pm\dfrac{1}{2}$; j) $x=\pm2$; k) $x=0$, $y=0$; l) $x=2$, $y=x-7$; m) $y=\dfrac{1}{2}$, $y=2x-\dfrac{1}{2}$; n) $y=0$. **4.** $a=2$; $b=3$. **5.** $p=3$. **6.** $y=\dfrac{1}{2}x+3$, $A\left(\sqrt{e};\dfrac{\sqrt{e}+6}{2}\right)$. **7.** $y=-x+2$, $A(1;1)$. **8.** $b=1$, $a=1$. **9.** Sunt două cazuri ($p=q=1$) sau ($p=1$ și $y=-1$).

Pag. 135-136. 1. f este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $a=-2$. **2.** $\alpha=-1$. **3.** $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$. **4.** a) $x_0=1$punct de discontinuitate de speța I; b) $x_0=0$ punct de discontinuitate de speța II; c) e; e^2; e^3 puncte de discontinuitate de speța I. **5.**

a) $f\circ g$ continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x_0 = 1$ punct de discontinuitate de speța I; $g\circ f$ continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_0 = 0$ punct de discontinuitate de speța I; b) $f\circ g$ continuă pe $(0,1)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $x_0=\frac{1}{2}$ punct de discontinuitate de speța I; $g\circ f$ continuă pe (0, 1); c) $f\circ g$ discontinuă în orice punct din $\mathbb{R}$ (discontinuitate de speța I); $(g\circ f)(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $g\circ f$ este continuă pe $\mathbb{R}$. **6.** a) $x_0=n+\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$, sunt puncte de discontinuitate (de speța I); b) $g(x)=|n-x|$, $\forall x\in\left[n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right],\forall n\in\mathbb{Z}$. **7.** $f(x)=n\sin\pi x$, $x\in[n,n+1), n\in\mathbb{Z}$; $\sin n\pi=\sin(n+1)\pi=0$; f este continuă pe $\mathbb{R}$.
8. Dacă $a=\frac{1}{2}$, f continuă pe $\mathbb{R}$; dacă $a\neq\frac{1}{2}$, f continuă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$(discontinuitate de speța I)
11. Dacă $x>0$ atunci $\frac{2}{x}-1<\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant\frac{2}{x}$, $\frac{x}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)<\frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{x}$ și $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{x}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)=\frac{2}{3}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{x}$; rezultă $f_d(0)=\frac{2}{3}$ analog $f_s(0)=\frac{2}{3}$. **13.** Fie $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Există $(x_n)_n\subset\mathbb{Q}$ astfel încât $x_n\to x$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)$, de unde $f(x)=g(x)$. **14.** a) $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$. Rezultă $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$; b) Fie $(-\varepsilon,\varepsilon)$ o vecinătate a originii, $\varepsilon>0$. Se arată că există $x_1<0<x_2$ astfel încât $f(x_1)<0$ și $f(x_2)<0$. **15.** Avem: $f(x)\leqslant\log_2 x<$ $<f(x)+1$, $\forall x>0$, de unde $f(x)=[\log_2 x]$, $\forall x>0$. Rezultă că f este continuă în $x_0\Leftrightarrow\log_2 x_0\notin\mathbb{Z}\Leftrightarrow x_0\neq 2^p, p\in\mathbb{Z}$.
16. $-x^2+x\leqslant f(x)\leqslant x^2+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Se trece la limită cu $x\to 0$. **17.** Prin inducție se arată că $f(nx)=nf(x)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Apoi $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, de unde deducem $f(x)=xf(1)$, $\forall x\in\mathbb{Q}$. Din continuitatea lui f rezultă $f(x)=xf(1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Pag. 142-143. 3. a) $E=\mathbb{R}$, f continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; b) $E=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, f continuă pe E; c) $E=\mathbb{R}$, f continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. **6.** a) $x\geqslant -1$; c) $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right], k\in\mathbb{Z}$. **7.** Se arată că $f\left(\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\right)$ nu este interval; Imf = [0, 1].
8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$. Funcția f este continuă și bijectivă, deci și inversa sa f^{-1} este continuă. Avem: $f(x_n)=x_n^3+x_n$, deci $x_n=f^{-1}(x_n^3+x_n)$, $\forall n\geqslant 1$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^3+x_n)=x_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=f^{-1}(x_0)$. **9.** Fie $I\subseteq\mathbb{R}$, I interval. Dacă $0\notin I$, atunci f este continuă pe I, deci $f(I)$ este interval. Presupunem $0\in$ I. Demonstrăm că $f(I)=[-1,1]\cup\{a\}$, de unde rezultă imediat concluzia problemei. Evident, $f(I)\leqslant[-1,1]\cup\{a\}$. Avem $a\in f(I)$, deoarece $a=f(0)$. Fie $y\in[-1,1]$. Ecuația $f(x)=y$, conduce la ecuația $\cos\frac{1}{x}=y$, cu soluțiile $x_n=\frac{1}{\pm 2n\pi\pm\arccos y}$, $n\in\mathbb{N}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, va exista $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_0}\in I$, $y\in f(I)$. **10.** a) $\sin\frac{1}{x}\subset[-1,1]$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f(\mathbb{R})\subset[-1,1]$ dacă și numai dacă $\lambda\in[-1,1]$; b) Considerăm șirurile $(x_n)_n, x_n=\frac{1}{2n\pi}$ și $(y_n)_n, y_n=\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$; $x_n\underset{n\to\infty}{\to}0$ și $y_n\underset{n\to\infty}{\to}1$.

11. f este continuă pe $(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$, din operați cu funcții continue. Fie $k\in\mathbb{N}$. $f(t)=\begin{cases}(k-1)\cdot\left|\cos(2t-1)\frac{\pi}{2}\right|, \text{ dacă } k-1<t<k\\ k\cdot\left|\cos(2t-1)\frac{\pi}{2}\right|, \text{ dacă } k\leqslant t<k+1\end{cases}$;

$\lim\limits_{t\nearrow k}f(t)=0$, $\lim\limits_{t\searrow k}f(t)=0$, $f(k)=0$, deci f este continuă în $t=k$. Deducem că f este continuă pe $(0,\infty)$.

12. a) Contrazice proprietatea Darboux; b) Contrazice definiția de funcție strict crescătoare. **13.** $\operatorname{Im} f = I \cap \mathbb{Q} = \{q\}$, unde I este un interval, $q \in \mathbb{Q}$. **14.** Fie $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a, b)$; h este continuă, f surjectivă, rezultă că $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_1) = a$ și $f(x_2) = b$. Avem: $h(x_1) = a - g(x_1) \leqslant 0$ și $h(x_2) = b - g(x_2) \geqslant 0$. Deducem că $\exists x_0 \in [a, b]$ astfel încât $h(x_0) = 0$. **15.** f mărginită $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(f(x)-x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \infty$.

16. $g:\left[0, \dfrac{b-a}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a+x) - f(c+x)$ ia valori de semne contrare în capete.

17. $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f(x_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f(x_k)$, deci $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ este cuprins între două valori ale lui f, de unde concluzia. **18.** $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă $\Rightarrow f \circ f$ strict crescătoare, contradicție. **20.** f injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă $\Rightarrow \lim\limits_{x\searrow a} f(x) \neq \lim\limits_{x\nearrow b} f(x)$.

Pag. 148. 1. a) $\Delta x = 1$; $\Delta f = 3$; b) $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta f = 0{,}21$. **2.** a) $\Delta y = 0{,}1$; b) -3. **3.** a) $\Delta y = a \cdot \Delta x$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a$; b) $\Delta y = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. **4.** 15. **5.** a) $-\dfrac{1}{6}$; b) $-\dfrac{5}{21}$. **6.** $f'(8) = \dfrac{1}{10}$. **7.** $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$.

8. $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 50!$. **9.** $-\dfrac{1}{x_0^2}$. **10.** $f'(0) = +\infty$. **11.** a) nu e derivabilă nici în x_0, nici în x_1; b) nu este derivabilă în $x_0 = e$; c) nu este derivabilă în $x_0 = 3$; d) este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$; d) este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 2$. **12.** a) continuă și nederivabilă în $x = 0$; b) continuă și derivabilă c) continuă și derivabilă; d) continuă și nederivabilă. **13.** $a > 1$. **14.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) + f\left(x_0 + \dfrac{2}{n}\right) - 2f(x_0)\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} + 2\frac{f\left(x_0+\frac{2}{n}\right) - f(x_0)}{\frac{2}{n}}\right] = 3f'(x_0).$$

Pag. 155. 1. a) $f'_d(-2) = +\infty$; $f'_s(-2)$ nu are sens; b) $f'_s(0) = -1$; $f'_d(0) = 1$; c) $f'_s(0) = 2$; $f'_d(0) = 3$; d) $f'_s(0) = 2$; $f'_d(0) = 0$. **2.** $m = 1$ și $n = 0$. **3.** $f'(0) = 0$. **4.** $x_0 = 0$ este singurul punct de continuitate al funcției. Fie $x_n \in \mathbb{Q}$; $x_n \neq 0$, $\forall n \geqslant 1$ și $x_n \underset{n}{\to} 0$; $\dfrac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \dfrac{x_n^2}{x_n} = x_n \underset{n}{\to} 0$. Fie $x'_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\forall n \geqslant 1$, $x'_n \overset{n}{\to} 0$; $\dfrac{f(x'_n) - f(0)}{x'_n - 0} = 0$. Deci $f'(0) = 0$. **5.** a) $f'_s(-1) = -2$; $f'_d(-1) = 2$; $f'_s(1) = -2$; $f'_d(1) = 2$ (puncte unghiulare); b) $f'_s(0) = +\infty$; $f'_d(0) = -\infty$ (punct de întoarcere); c) $f'_s(0) = 0$; $f'_d(0) = 0$; d) $f'_s(0) = -\infty$; $f'_d(0) = -1$ (punct unghiular). e) $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = \infty$; $x_0 = 0$ punct unghiular; f) $f'_s(-1) = -2$, $f'_d(-1) = 0$; $x = -1$ punct unghiular.

8. a) $f' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & 0 < x \leqslant 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$; b) $f' : \mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & x \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right) \\ 1 + x, & x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \\ \dfrac{1}{x}, & x \in \left(0, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \end{cases}$;

c) $f' : \mathbb{R} \setminus \left\{0, \pm 1, \dfrac{1}{3}\right\} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\infty, -1) \\ -1, & x \in (-1, 0) \cup \left(\dfrac{1}{3}, 1\right) \\ 2, & x \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \cup (1, \infty) \end{cases}$; d) f continuă în $x = a$ dacă și numai dacă

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x)$, adică $a^3-a^2=a-1\Leftrightarrow a\in\{\pm1\}$. Din $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$ avem că f e derivabilă în $x=1$; analog f nu e derivabilă în $x=-1$. Deci $f':\{1\}\to\mathbb{R}$, $f'(1)=1$. **6.** a) 6; b) 32; c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{12}$; e) 2ln2; f) $\frac{1}{e}$; g) 1; h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; i) 0; j) 0; k) 0. **7.** a) $y=5$; b) $y=5$; c) $y=x$; d) $y=x$; e) $y=\frac{1}{2}((x+1)\ln 2+1)$; f) $y=x\ln2+1$; g) $y=2((x-1)\ln2+1)$; h) $y=x$; i) $y=1$; j) $y=\frac{\pi}{2}-x$; k) $y=-1$. **9.** $\lim\limits_{x\nearrow x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=-f(x_0)$, $\lim\limits_{x\searrow x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$; g derivabilă în $x_0\Leftrightarrow f(x_0)=0$. **10.** Dacă $f(x_0)>0$ atunci $g_s'(x_0)=f'(x_0)=g_d'(x_0)$; dacă $f(x_0)<0$ atunci $g_s'(x_0)=-f'(x_0)=g_d'(x_0)$; dacă $f(x_0)=0$ atunci $g_s'(x_0)=\lim\limits_{x\nearrow x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\nearrow x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=-\lim\limits_{x\nearrow x_0}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|=$ $=-|f'(x_0)|$ și, analog, $g_d'(x_0)=-|f'(x_0)|$, deci pentru $f(x_0)=0$ avem g derivabilă în $x=x_0$ dacă și numai dacă $f'(x_0)=0$.

Pag. 165-166. 1. a) $4x^3-6x+2$; b) $3x^2+2x+1$; c) $\sin x+x\cdot\cos x$; d) $2x\cdot\cos x-x^2\cdot\sin x$; e) $\frac{1-x}{e^x}$; g) $\frac{-\ln a}{x^2}$; i) $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$; j) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; k) $\frac{x^2}{(\cos x+x\cdot\sin x)^2}$; l) $2^x+x\cdot 2^x\cdot\ln2$; m) $3^x\cdot\ln3+6^x+x\cdot 6^x\cdot\ln6+2^x\ln2$; n) $2x$; o) $2y$; p) 0; q) $\operatorname{ctg}x-\frac{x}{\sin^2 x}$; r) $t^2\cdot\sin t$; s) 0; t) $\frac{2\ln x}{x\cdot\ln a}-\frac{1}{x}$. **2.** a) $f'(x)=140\cdot(2x+3)^{69}$; b) $f'(x)=31\cdot(ax^2+bx+c)^{30}\cdot(2ax+b)$; c) $f'(x)=7\cdot(x^3-x)^6\cdot(3x^2-1)$; d) $f'(x)=\frac{2x-1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$; e) $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; f) $f'(x)=3\cos3x$; g) $f'(x)=3\sin^2x\cdot\cos x$; h) $f'(x)=-5\sin5x$; i) $f'(x)=-7\cdot\cos^6x\cdot\sin x$; j) $f'(x)=6\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}$; k) $f'(x)=-30\operatorname{ctg}^9 3x\cdot\frac{1}{\sin^2 3x}$; l) $f'(x)=\frac{3\cos3x}{2\sqrt{\sin3x}}$; m) $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}$; n) $f'(x)=\cos(\sin x)\cdot\cos x$; o) $f'(x)=\frac{e^x+x\cdot e^x+1}{2\sqrt{x\cdot e^x+x}}$; p) $f'(x)=2x\cdot e^{x^2}$.

3. a) $y'=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$; b) $y'=\frac{-1}{\cos x}$; c) $y'=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$; d) $y'=\frac{1}{\cos x}$; e) $y'=\frac{2x^3}{1-x^4}$; f) $y'=\frac{1}{\cos^8 x}$. **5.** a) $u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\cdot\ln u}$; b) $f'(x)=x^x\cdot(1+\ln x)$; $g'(x)=(\sin x)^{\cos x-1}\cdot\cos^2x-(\sin x)^{\cos x+1}\cdot\ln(\sin x)$. **7.** $S=\left(1+x+x^2+...+x^n\right)'=\frac{n\cdot x^{n+1}-(n+1)\cdot x^n+1}{(x-1)^2}$.

8. a) *Metoda* I. Calculăm $E_1\cdot\sin\frac{h}{2}$ și folosim formula $\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$; *Metoda* II. Notăm cu E_1 și E_2 membrii stângi ai celor două identități. Calculăm $E_2+i\cdot E_1$ apoi utilizăm formula lui Moivre; b) $S=-E_1'$. **9.** $f_s'(0)=-1=f_d'(0)=f'(0)$; $f'(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant 0\\ -e^{-x}, & x>0\end{cases}$. **10.** $f'(2)=6\pi$. **11.** a) $1-x$; b) $2+\frac{x-3}{4}$; c) -1.

12. $x_0\neq0\Rightarrow\exists V\in\mathscr{V}(x_0)$ astfel încât $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right]$, $\forall x\in V\setminus\{x_0\}$ și de aici, trecând la limită, există $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}[g'(x_0)-f(x_0)]$. **13.** $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Derivând, obținem $f'(x+T)=f'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f' are perioada T. Reciproca e falsă. Prezentăm un contraexemplu: funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x$ este derivabilă și $f'(x)=1+\cos x$; f' este periodică ($T_0=2\pi$), dar f nu este periodică. Avem $f(0)=0$.

Presupunem că $\exists T > 0$ astfel încât $f(x) = f(x + T)$. Luând $x_n = nT \underset{n}{\to} +\infty$, $f(0) = f(nT) = nT + \sin nT \underset{n}{\to} +\infty$, contradicție. **14.** a) Fie $x_0 \in I$ și $h \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x_0 + h \in I$; $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$. Deci $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \geqslant 0$;

b) Se demonstrează analog. **15.** f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ și $f'(x) = \frac{x+(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$. **16.** $f(x) = \begin{cases} x^2, x<0 \\ x, x\in[0,1]; \\ x^2, x>1 \end{cases}$

f este derivabilă, deci și continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ca restricție de funcții elementare. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0 = f(0)$, deci

f este continuă în $x = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2 = 1 = f(1)$, deci f este continuă în $x = 1$, f este continuă pe $\mathbb{R}$.

$f_s'(0) = 0$, $f_d'(0) = 1$; $f_s'(1) = 1$, $f_d'(1) = 2$, deci f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. **17.** a) $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ și derivând obținem $-f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$ deci f' impară; b) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in I$ și derivând obținem: $-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$, deci f' pară.

18. a) f este strict descrescătoare , deci injectivă, iar din f continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ și f strict descrescătoare rezultă Imf = (1, +∞); b) $f(0) = 3$ implică $f^{-1}(3) = 0$ și $(f^{-1})(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3\ln 2}$.

19. a) f este suma a trei funcții, două strict crescătoare și una crescătoare, în consecință este o funcție strict crescătoare; b) din f continuă, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ rezultă Im$f = \mathbb{R}$; c) $f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$;

d) $f(1) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 1$; e) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{-3(f^{-1})^2(y)+2}$. **20.** a) $y' = -\frac{x+1}{x}y^2$; b) $y' = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$;

c) $y' = (1 - x)e^{-x}$. **21.** a) $f'(x) = (x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) + \ +(x-x_1)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$;

notăm cu $E = R \setminus \{x_1, x_2, .., x_n\}$; $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}$, $\forall x \in E$; b) $\left(\frac{f'}{f}\right)'(x) = -\left[\frac{1}{(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-x_n)^2}\right] < 0$,

$\forall x \in E$, $\left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{f''\cdot f - (f')^2}{f^2}$; deci $f''(x)\cdot f(x) < (f')^2(x)$ $\forall x \in E$ și cum $f'(x_i) \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, rezultă că inegalitatea se verifică și pentru x_1, x_2, ..., x_n. **22.** a) $\delta = \frac{45}{16}s$. **23.** a) $x_1(t) = x_2(t) \Leftrightarrow t = 1$ sau $t = 2$;

b) $v_1(t) = x_1'(t) = 10t + 2$, $v_2(t) = x_1'(t) = 3t^2 + 4t + 4$, $a_1(t) = v_1'(t) = 10$, $a_2(t) = v_2'(t) = 6t + 4$; c) $v_1(1) = 12$, $v_1(2) = 22$,

$v_2(1) = 11$, $v_2(2) = 24$, $a_1(1) = a_1(2) = 10$, $a_2(1) = 10$, $a_2(2) = 16$; d) $v_1(t) = v_2(t) \Leftrightarrow t = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$; $a_1(t) = a_2(t) \Leftrightarrow t = 1$.

24. a) $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$; b) $f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$; c) $f''(x) = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+3)^2}$. **25.** $g''(x) = -4\sin 2x$; **26.** $h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$h''(x) = \frac{2}{\cos^3 x}\sin x$. **27.** $f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$; **28.** $f''(x) = 3^x \ln^2 3$; **29.** a) $f''(x) = 12x$; b) $f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2$.

30. a) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(n)} = 0$, $\forall n \geqslant 5$; b) $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

c) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; d) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; e) $f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$,

$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$, $f''(x) = 2 + \frac{2}{(x-1)^3}$, $f^{(n)}(g) = \frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

f) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$; $f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+2}}\right)$.

Pag. 174. 1. a) $c=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; b) Nu, deoarece f nu e derivabilă în 0; c) $c = 0$; d) $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ nu este interval; e) Nu, deoarece f nu este derivabilă în $x = 0$; f) Nu, deoarece f nu este derivabilă în $x=\frac{\pi}{4}$. **2.** Considerăm funcția $g:[1, e^2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{a_0}{1}\cdot\ln x+\frac{a_1}{2}\cdot\ln^2 x+...+\frac{a_n}{n+1}\cdot\ln^{n+1}x$ ce este derivabilă, deci continuă și $g(1) = g(e^2) = 0$. Aplicând teorema lui Rolle rezultă concluzia. **3.** Considerăm funcția $g:[a, b]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\cdot e^{\lambda x}$ care este derivabilă, deci continuă și $f(x_1) = f(x_2) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2) = 0$. Aplicăm teorema lui Rolle și obținem c între x_1 și x_2 astfel încât $g'(c)=0\Rightarrow f'(c)+\lambda f(c)=0$. **4.** $1=n\cdot(c_n)^{n-1}\Rightarrow c_n=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$.

5. $f'(x)=0, \forall x\in(-1,1)$. **6.** $\frac{1}{1+x}-1=x\cdot\frac{(-1)}{(1+x\cdot\theta_x)^2}\Rightarrow\theta_x=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\theta=\frac{1}{2}$. **8.** a) $\exists\, c_n\in(n, n+1)$ astfel încât $\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{c_n}$, $n<c_n<n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{c_n}<\frac{1}{n}$, de unde rezultă inegalitățile date; b) $0 < x_n < 1$; $(x_n)_n$ strict descrescător; c) $c = \ln 2$. **9.** a) Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f:[n, n+1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$ rezultă că există $c_n\in(n, n+1)$ astfel încât $\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))=\frac{1}{c_n\cdot\ln c_n}$; $n<c_n<n+1\Rightarrow\frac{1}{c_n\cdot\ln(c_n)}<\frac{1}{n\cdot\ln(n)}$ de unde rezultă inegalitatea; b) $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\cdot\ln k}>\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln 3)$, deci $\boldsymbol{l}=+\infty$. **10.** a) 0; b) f continuă pe $[c, d]$ și derivabilă pe (c, d) ca restricție de funcție elementară; c) $f'(x_k)=f(k+2)-f(k+1)\Rightarrow$ $\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}f'(x_k)=f(n+2)-f(1)\xrightarrow{n}-f(1)=-\frac{1}{2}$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. **11.** Vezi problema **9**. **12.** f continuă pe $\mathbb{R}^*$ ca restricție de funcții elementare $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=1$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(a\sin x+b\cos x)=b$. Pentru $b = 1$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$, deci f este continuă în $x = 0$. $f'(x)=\begin{cases}2x-1, x<0\\ a\cos x-\sin x, x>0\end{cases}$; $f'_s(0)=-1$, $f'_d(0)=a$. Pentru $a = -1$, f este derivabilă. Deci $a = -1$, $b = 1$. **14.** a) $f'(x)=-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$; b) $f'(x)<0$, $\forall\, x > 0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0\Rightarrow f(x)<0, \forall x>0$. **15.** a) Funcția $f:(-1, 1)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ este derivabilă și $f'(x)=0, \forall x\in(-1,1)$, deci $f(x) = k$, $\forall\, x\in(-1, 1)$. Din $f(0)=\frac{\pi}{2}$, rezultă $k=\frac{\pi}{2}$. $f(-1)=f(1)=\frac{\pi}{2}$, deci $f(x)=\frac{\pi}{2}, \forall x\in[-1,1]$; b) Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x$ este derivabilă și $g'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$, deci $g(x) = k, \forall\, x\in\mathbb{R}$. Cum $g(1)=\frac{\pi}{2}$, rezultă $k=\frac{\pi}{2}$. **16.** $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\geqslant0$, $\forall x, x'\in I$, $x\neq x'$; $\lim\limits_{x'\to x}\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=f'(x)\geqslant0$. **17.** $f'(x)=g'(x)=\frac{1}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$. **18.** Definim funcția $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}-2$; f este derivabilă. $\left.f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2};\ \begin{matrix}f'(x)=0\\ x>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=1$, rezultă $f(x)\geqslant0, \forall\, x>0$. **19.** a) strict crescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict descrescătoare pe $(-2, +\infty)$; b) strict descrescătoare pe $(-\infty, 2)$ și strict crescătoare pe $(2, +\infty)$; c) strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; d) strict descrescătoare pe $(-\infty, 2)$ și pe $(2, +\infty)$; e) strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ și strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$. **20.** $a = -1$. **21.** Concluzia se obține aplicând teorema lui Rolle funcției $F:[a, b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{f(a)+f(b)-f(x)}{a+b-x}$. **22.** Fie $F:[a, b]\to\mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + \ln(x-a)(b-x)$. Din $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}F(x)=-\infty$ și F continuă rezultă că există $a_1\in\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ și $b_1\in\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ astfel încât $F(a_1) = F(b_1)$. Concluzia se obține

aplicând teorema lui Rolle restricției funcției F la intervalul $[a_1, b_1]$. **23.** a) un exemplu este $f(x)=|x-1|$; b) un exemplu este $f(x)=\sqrt[3]{x}$; c) un exemplu este $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. **24.** Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x$, 0 este punct de minim absolut și, conform teoremei lui Fermat, $f'(0) = 0$. **25.** Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=b_1a_1^x+b_2a_2^x+\ldots+b_na_n^x$, 0 este punct de minim absolut și conform teoremei lui Fermat, $f'(0) = 0$. **26.** $a = e$. **27.** $a = 6$. **28.** $a = e$. **29.** $a = 0$. **30.** a) $y'=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)e^x$; $y''=\left(\frac{1}{2}x^2+2x+1\right)e^x$;

b) $y'=x+1$; $y''=1$; c) $y'=-c_1\cdot e^{-x}-2c_2e^{-2x}$; $y''=c_1e^{-x}+4c_2e^{-2x}$. **31.** $f(x)=\begin{cases}1-x;\ x\in[0,1]\\ \frac{x-1}{x^p};\ x\in(1,+\infty)\end{cases}$, b) este varianta corectă. **32.** Se aplică teorema lui Rolle funcției $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$. **33.** Se aplică teorema lui Rolle funcției $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{b_k}{k}\sin(kx)-\frac{a_k}{k}\cos(kx)\right]$. **34.** Un exemplu este $f: [0, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\pi x$. **35.** $c = 1 + \ln(e - 1)$. **36.** Concluzia revine la demonstrarea inegalităților $\frac{1}{\sqrt{ab}}>\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ (i) și $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2}{a+b}$ (ii). Cu substituția $t=\frac{b}{a}\in(1+\infty)$ obținem $(i)\Leftrightarrow\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}-\ln t>0$ iar $(ii)\Leftrightarrow\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$.

37. Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^x$. Ecuația este echivalentă cu $\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{f(5)-f(4)}{5-4}$. Conform teoremei lui Fermat există $c_1 \in (2, 3)$ și $c_2 \in (4,5)$ astfel încât ecuația este echivalentă cu $xc_1^{x-1}=xc_2^{x-1}$.

38. a) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$; b) $n<n+1\Rightarrow f(n)>f(n+1)\Rightarrow\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1}$, echivalentă cu inegalitatea dată.

Pag. 177-178. 1. a) $\frac{\alpha}{\beta}$; b) $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $-\frac{1}{3}$; e) ∞; f) 1; g) $\frac{1}{8}$; h) $\frac{1}{6}$; i) $\frac{1}{2}$; j) 1; k) $\frac{3}{2}$; e) 0, dacă $a = b$; 1, dacă $a \neq b$; m) $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; n) Notăm cu $t = \arccos x$ și obținem $L=\lim_{t\searrow 0}\frac{\sin'(nt)}{\sin t}=n$; o) $n = 1$, $L=\frac{1}{6}$; $n \geqslant 2$,

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x^{n-1}+x^{n-2}\sin x+\ldots+\sin^{n-1}x}{x^{n-1}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}+\ldots+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\right)=\frac{n}{6}.$$

p) Notăm $t=\sin x$ și obținem $L=\lim_{t\nearrow 1}\frac{\sqrt{-\ln t}}{\sqrt{1-t^2}}$ și $\lim_{t\nearrow 1}\frac{\ln t}{t^2-1}=\frac{1}{2}$, deci $L=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

q) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{2x}+\frac{\cos x\cdot 2\sin 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{2x}+\ldots+\frac{\cos x\cos 2x\cdot\ldots\cdot n\sin nx}{2x}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+$$

$$+\ldots+\frac{n^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$ r) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x.....\cos nx}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x\cos 2x...\cos nx}}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.

2. a) $L=\lim_{y\to\infty}\left(-ye^{-y}\right)=\lim_{y\to\infty}\frac{-y}{e^y}=0$; b) $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\ln\frac{1}{y}=\lim_{y\to\infty}\frac{-\ln y}{y}=0$; c) $\lim_{z\searrow 0}z\ln\frac{1}{z}=-\lim_{z\searrow 0}z\ln z=0$; d) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}$.

e) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln^2 x}{x-1}=0$; f) 0; g) Notăm $t=\operatorname{tg}x$ și obținem $L=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)e^t=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^t}{t^2+1+\sqrt{t^2+1}}=\infty$; h) 0; i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1}{\frac{-1}{x(x+1)}}\cdot\dfrac{x^2}{-x(x+1)}=-1$; j) Dacă $a=1$, atunci $L=\dfrac{1}{a}$; dacă $a\in(0,1)$, atunci $L=0$; dacă $a>1$, atunci $L=\infty$; k) Dacă $\alpha\in(-2,0)$, atunci $L=0$; dacă $\alpha=-2$, atunci $L=\dfrac{e^{e-1}}{2}$; dacă $\alpha\in(-\infty,-2)$, atunci $L=\infty$. 3. a) ∞; b) ∞; c) ∞; d) $-\infty$; e) ∞; f) $-\infty$; g) $-\infty$;

h) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}x+x}{x}\cdot\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}^2x}=\dfrac{2}{3}$. **4.** a) $e^{\frac{1}{3}}$; b) e; c) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; d) $e^{-\frac{1}{e^2}}$; e) be^a; f) $(n!)^{\frac{1}{n-1}}$. g) $(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

5. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) ∞; f) ∞; g) 1. **6.** a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) ∞. **7.** a) $\dfrac{n(n+1)}{4}$; b) $-\dfrac{n(n+1)}{2e}$;

c) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{8}$; d) $\dfrac{n(2n+1)(n+1)!}{18}$. *Indicație* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{n!x^n}{x^{n+2}}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}\cdot\ldots\cdot\dfrac{\operatorname{tg}nx}{nx}-1\right)=n!\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\operatorname{tg}x}{x}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\ldots\frac{\operatorname{tg}nx}{nx}-1}{x^2}=$

$$=\frac{n!}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)'\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\ldots\frac{\operatorname{tg}nx}{nx}+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\right)!\ldots\frac{\operatorname{tg}nx}{nx}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\ldots\left(\frac{\operatorname{tg}nx}{nx}\right)'}{x}\right)=$$

$=\dfrac{n!}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(2^2-\dfrac{2^2}{3}\right)+\ldots+\left(n^2-\dfrac{n^2}{3}\right)\right]$. **8.** a) 0; b) ∞. **9.** a) $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-1}{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}\cdot\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}=0$; b) 1;

c) $L=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-e\right]=e\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}\cdot\dfrac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}\right]=-\dfrac{e}{2}$.

Pag. 184-185. 1. a) crescătoare pe $\mathbb{R}$; b) descrescătoare pe $\mathbb{R}$; c) descrescătoare pe $(-\infty,0)$, crescătoare pe $(0,\infty)$; d) descrescătoare pe $(-\infty,0)$, crescătoare pe $(0,\infty)$; e) crescătoare pe $\mathbb{R}$; f) descrescătoare pe $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right)$; crescătoare pe $\left(\dfrac{3}{4},\infty\right)$; g) crescătoare pe $(-\infty,1)$, descrescătoare pe $(1,\infty)$; h) crescătoare pe $\mathbb{R}$; i) crescătoare pe $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, descrescătoare pe $(-1,1)$. **2.** a) descrescătoare pe $(-\infty,3)$; crescătoare pe $(3,\infty)$; $M(3,-9)$ punct de minim; b) descrescătoare pe $\left(-\dfrac{\sqrt3}{3},\dfrac{\sqrt3}{3}\right)$, crescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt3}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt3}{3};\infty\right)$; $M_1\left(-\dfrac{\sqrt3}{3},\dfrac{2\sqrt3}{9}\right)$ punct de maxim; $M_2\left(\dfrac{\sqrt3}{3},\dfrac{-2\sqrt3}{9}\right)$ punct de minim; c) crescătoare pe $(-\infty,6)$, descrescătoare pe $(6,+\infty)$; $M_1(6,432)$ punct de maxim; d) crescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; e) descrescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$. **3.** a) descrescătoare pe $\mathbb{R}-\{2\}$; b) crescătoare pe $\mathbb{R}-\{1\}$. **4.** a) descrescătoare; b) crescătoare; c) crescătoare; d) descrescătoare; e) crescătoare pe $(1,\infty)$; descrescătoare pe $(0,1)$. **5.** a) descrescătoare pe $(-\infty,1)$, crescătoare pe $(1,\infty)$; b) descrescătoare pe $[-2,2]$; c) crescătoare pe $\mathbb{R}$; d) crescătoare pe $\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; e) descrescătoare pe $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, crescătoare pe $(-1,1)$; f) descrescătoare pe $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2},\infty\right)$ și crescătoare pe $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2},+\infty\right)$; g) crescătoare pe $(0,e^2)$; descrescătoare pe (e^2,∞); h) descrescătoare pe $(-\sqrt2,0)\cup(\sqrt2,+\infty)$; crescătoare pe $(-\infty,-\sqrt2)\cup(0,\sqrt2)$; i) crescătoare pe $\left(-1,\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)$, descrescătoare pe

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$; j) descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{e}; 0\right]$, crescătoare pe $\left(-\infty; -\frac{1}{e}\right]$; k) descrescătoare pe $(0, e)$, crescătoare pe (e, ∞) ; l) crescătoare pe $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$, descrescătoare pe $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$; m) crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, descrescătoare pe $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; n) descrescătoare pe $(-\infty, -3)$; crescătoare pe $(-3, +\infty)$.

6. a) crescătoare pe $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$, descrescătoare pe $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$; b) $A = f(2)$, $B = f(3) \Rightarrow B > A$. **7.** $a = -\frac{1}{6}$, $b = 3$, $c = 8$ sau $a = \frac{-1}{6}$, $b = 8$, $c = 3$. **8.** $a = -5$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 1$. **10.** $f(x) = e^x - 1 - \ln(1 + x)$, $f : (-1, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{e^x(x+1)-1}{x+1}$. Definim funcțiile $g(x) = e^x(x + 1) - 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x(x+2) > 0$, $x \in (-1, +\infty)$, deci g este strict crescătoare pe $(-1, \infty)$ și $g(x) < 0$, $\forall\, x \in (-1, 0)$ și $g(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Deci f este strict descrescătoare pe $(-1, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ rezultă că $f(x) > 0$, $\forall\, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

12. a) Definim funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$ ce este derivabilă și $f'(x) = e^x - 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Deci $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; b) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, +\infty)$ și $A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ și $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 .. a_n}$. Luăm $x = \frac{a_i}{A} - 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$ și obținem: $e^{\frac{a_i}{A}-1} \geqslant \frac{a_i}{A} > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Înmulțind cele n inegalități obținem: $e^0 \geqslant \frac{G^n}{A^n} \Leftrightarrow G \leqslant A$. **13.** Fie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \cos x \cdot \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2} < 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci f este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$, deci $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, $\forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. **14.** a) Definim $f, g : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$ și $g(x) = \ln(1 + x) - x$. Avem f și g derivabile, $f'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$, $g'(x) = \frac{-x}{x+1}$; $f(x) < 0$, $\forall\, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) < 0$, $\forall\, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. **16.** a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; b) $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$, $f''(x) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)$; c) Pe intervalele $(-\infty, 0]$ și $[1, +\infty)$ f este strict descrescătoare, iar pe intervalul $(0, 1)$ este strict crescătoare; d) $f(3) > f(5)$ echivalent cu $x_1 > x_2$. **16.** a) $g'(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln\left(\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)^x \ln\left(\frac{4}{7}\right) + 1$, $g''(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln^2\left(\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)^x \ln^2\left(\frac{4}{7}\right)$; b) $g'' > 0$ implică g' strict crescătoare; c) g' este injectivă deci punctul C este unic; d) g este strict descrescătoare pe $[0, c]$ și strict crescătoare pe $[c, 1]$. e) Punctele de maxim local ale funcției g sunt 0 și 1. Cum $g(0) = g(1) = 0$, rezultă $g(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [0, 1]$. **17.** $a = -6$, $b = 5$. **18.** $m = 3$

Pag. 208. 13. a) Dacă $m \in (-1, 1)$ avem 2 soluții, dacă $m = 1$ avem 1 soluție, iar dacă $m \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ nu avem soluții; b) $\forall m \in \mathbb{R}$, ecuația are 1 soluție; c) Dacă $m = 0$, atunci $x = 0$ soluție; dacă $m > 0$ avem o soluție $x \in (-\infty, 0)$; dacă $m < 0$ avem o soluție $x \in (0, \infty)$. d) Pentru $x \geqslant 0$: dacă $m \in (-\infty, e)$ nu avem soluții, dacă $m = e$ atunci $x = 1$ soluție, dacă $m > e$, avem 2 soluții: $x_1 \in (0, \ln m)$, $x_2 \in (\ln m, \infty)$. Pentru $x < 0$ avem: dacă $m \in (-\infty, 0]$ nu avem soluții, dacă $m > 0$ avem 1 soluție $x \in (-\infty, 0)$; e) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ avem o soluție; f) Pentru $m \in [0, \infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ avem soluția $x = 1$; pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ avem 2 soluții.

CUPRINS

I. Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare

Matrice

1. Permutări 3
2. Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice. Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea unei matrice cu scalar 8
3. Operații cu matrice: înmulțirea 13

Sisteme de ecuații liniare și determinanți

4. Sisteme de ecuații liniare 20
5. Determinanți de ordin n 27
6. Proprietățile determinanților 30
7. Rangul unei matrice. Matrice inversabilă 35
8. Sisteme liniare de m ecuații cu n necunoscute, $n \leqslant 4$ 41
9. Interpretarea geometrică a sistemelor liniare cu două necunoscute 49

II. Elemente de analiză matematică

Mulțimea numerelor reale. Funcții reale. Șiruri de numere reale

1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală 53
2. Funcții reale de variabilă reală 59
3. Noțiunea de șir. Șiruri monotone. Șiruri mărginite 70
4. Limita unui șir 74
5. Convergență și mărginire 80
6. Operații cu șiruri care au limită. Șiruri remarcabile 84
7. Calculul limitelor în cazuri de nedeterminare 90

Limite de funcții

1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale 100
2. Operații cu limite de funcții. Limitele funcțiilor elementare 106
3. Criterii de existență a limitei unei funcții 114
4. Metode de eliminare a nedeterminărilor 117
5. Asimptotele unei funcții 123

Continuitatea funcțiilor

1. Continuitate punctuală; puncte de discontinuitate; continuitate pe un interval. Operații cu funcții continue. 129
2. Studiul existenței soluțiilor reale ale unor ecuații și semnul unei funcții continue pe un interval 137

Derivabilitatea funcțiilor

1. Funcții care admit derivată. Funcții derivabile 144
2. Derivate laterale. Derivatele unor funcții elementare 149
3. Operații cu funcții derivabile. Derivate de ordinul al doilea 156
4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile pe un interval 167
5. Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor 176
6. Rolul derivatei de ordinul întâi în studiul funcțiilor 179
7. Rolul derivatei de ordinul doi în studiul funcțiilor 186

Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Reprezentarea grafică a funcțiilor 192
2. Aplicații ale unor proprietăți locale sau globale ale funcțiilor 203
3. Rezolvarea grafică a unor ecuații. Șirul lui Rolle 205
4. Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă) 209

Indicații și răspunsuri 222

Manualul se adresează tuturor elevilor, celor mai buni, dar și acelora cărora nu le place matematica. Lucrarea este împărțită pe capitole și lecții. În fiecare lecție există exerciții simple în coloana din dreapta teoriei, pentru a se putea urmări mai bine relația teorie-probleme. La sfârșitul fiecărei lecții există un set de probleme de diferite grade de dificultate. Fiecare capitol se încheie cu teste de sinteză.

ISBN 973-649-264-8
ISBN