COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR" BREAZA

Concursul Județean " Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020

CLASA a IX-a

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **Fiecare problemă valorează 25 puncte.**

Subiectul 1 - MATEMATICĂ

Calculaţi suma $S = 1 + 13 + 113 + ... + \underbrace{11...1}_{n-1 ori}3, \forall n \geq 2.$

Subiectul 2 - MATEMATICĂ

Fie M mijlocul laturii [BC] a triunghiului ABC. Paralela la BC dusă printr-un punct G al segmentului (AM) taie AB în X și AC în Y; CX și GB se taie în Q, iar CG și BY se taie în P. Notăm $k=\frac{AG}{AM}$.

a) Arătați că $\frac{GP}{PC}=\frac{k}{2}$.

b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{CP}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ și scalarul k.

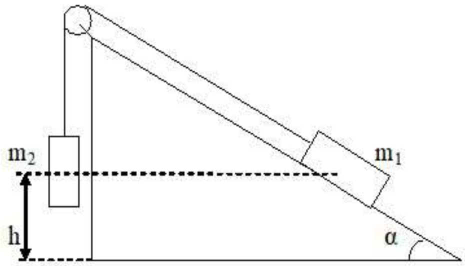
c) Demonstrați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci triunghiul MPQ este asemenea cu triunghiul ABC.

Subiectul 1 - FIZICĂ

Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ trebuie aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului F_1=5N, iar pentru a-l trage uniform în sus de-a lungul planului trebuie aplicată o forță în sus de-a lungul planului F_2=15N. Să se afle:
a) masa corpului;
b) coeficientul de frecare;
c) tangenta unghiului de frecare.

Subiectul 2 - FIZICĂ

Sistemul celor două corpuri porneşte de la acelaşi nivel h=20 m față de sol, din repaus. Se cunosc m_1=1 kg, m_2=3 kg, $\alpha=30^0$, μ=0.1. Se cer:
a) viteza sistemului după Δt=2 s de mişcare;
b) după cele Δt secunde se rupe firul de legătură. Calculează timpul de cădere şi viteza cu care corpul 2 atinge solul;
c) calculează timpul şi distanţa parcursă până la oprire de corpul 1, considerând planul suficient de lung şi calculează viteza cu care corpul ajunge la sol.



COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR" BREAZA

Concursul Județean " Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020

CLASA a X-a

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **Fiecare problemă valorează 25 puncte.**

Subiectul 1 - MATEMATICĂ

Fie $x, y, z, t \in (1, +\infty)$. Demonstrați că:

$$\frac{\log_x y}{z} + \frac{\log_y z}{t} + \frac{\log_z t}{x} + \frac{\log_t x}{y} \geq \frac{16}{x+y+z+t}.$$

Subiectul 2 - MATEMATICĂ

Fie $z_1 \in \mathbb{C} - \{-1\}$ şi $z_2 = \dfrac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}}$ două numere complexe.

Determinați z_1 astfel încât $z_1 - z_2$ şi z_2^2 să fie numere reale.

Subiectul 1 – FIZICĂ

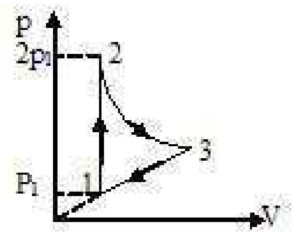
Două incinte de volum $V_1=5\ell$ şi $V_2=10\ \ell$ aflate la aceeaşi temperatură T=300 K comunică între ele printr-un tub subţire prevăzut cu un robinet. În incinta (1) presiunea aerului este $p_1= 2\cdot10^5$ Pa, iar în incinta (2) $p_2=3\cdot10^5$ Pa. Se deschide robinetul. Temperatura se menţine constantă. Se închide robinetul, iar incinta (2) este răcită la T_2 =273 K. Cunoscând masa molară a aerului 29 kg/kmol, R = 8,31 J/K·mol, să se afle :

a) Masa aerului din dispozitiv;
b) Masa aerului din fiecare incintă după închiderea robinetului;
c) Presiunea finală din cele două vase.

Subiectul 2 - FIZICĂ

Un mol de gaz ideal monoatomic evoluează după transformarea ciclică descrisă în figura alăturată, astfel că transformarea 2-3 este o politropă descrisă de ecuaţia $pV^3=ct.$ Se cer:

a) Reprezentarea grafică, la scară, a ciclului în sistem de coordonate (V,T);
b) Lucrul mecanic efectuat de gaz pe ciclu în funcţie de parametrii stării 1;
c) Randamentul ciclului şi căldurile molare pentru transformările 2-3 şi 3-1.



Concursul Județean " Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020

CLASA a XI-a

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **Fiecare problemă valorează 25 puncte.**

Subiectul 1 - MATEMATICĂ

Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det(I_3 + BA) = \det(I_3 + AB)$.

b) Calculați $\det(I_3 + BA)$.

Subiectul 2 - MATEMATICĂ

Calculați limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(\cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx\right)^{\frac{1}{n^3 \cdot \sin^2 x}}\right),\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Subiectul 1 - FIZICĂ

Pe suprafaţa Pământului un pendul gravitaţional cu lungimea L=1 m şi densitatea corpului suspendat de pendul $\rho = 2700$ kg/m^3 execută mici oscilaţii. Se consideră g=10 m/s^2. Să se afle :

a) Perioada pendulului gravitaţional;

b) Perioada pendulului gravitaţional, dacă acesta se introduce în apă cu densitatea ρ_0=1000 kg/m^3 şi se neglijează frecarea cu apa;

c) Perioada pendulului dacă acesta se prinde de un cărucior care se roteşte în plan orizontal pe un cerc cu raza R = 0,2 hm cu viteza v =72 km/h.

Subiectul 2 - FIZICĂ

Două surse de unde plane emit unde de aceeași amplitudine A=1cm, aceeași frecvență ν = 100Hz și lungime de undă λ=1,2m. Distanța dintre surse este d=30cm. Presupunând că fazele inițiale ale oscilațiilor sunt nule, să se calculeze:

a) ecuația de oscilație a unui punct M situat între cele două surse aflat la distanța d_1=5cm de prima sursă și d_2=25cm de a doua sursă;

b) ecuația de oscilație a unui punct N aflat la distanța D =1,2m de cea de-a doua sursă în exterior;

c) viteza de propagare a undelor.

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR " BREAZA

Concursul Județean " Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020

CLASA a XII-a

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **Fiecare problemă valorează 25 puncte.**

Subiectul 1 - MATEMATICĂ

Pe mulțimea $(0,\infty)$ definim legea de compoziție „$*$", cu proprietățile:

i) $(x+2)*x=1$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$;

ii) $(x\cdot y)*z=x\cdot(y*z)$, oricare ar fi $x,y,z\in(0,\infty)$.

În aceste condiții:

a) Calculați $(n+1)*(2n)$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Arătați că legea de compoziție „$*$" nu este asociativă și nu admite element neutru.

Subiectul 2 - MATEMATICĂ

a) Calculați $I_1=\int\frac{\cos x}{e^{-x}+\sin x+\cos x}dx$ și $I_2=\int\frac{e^{-x}+\sin x}{e^{-x}+\sin x+\cos x}dx$;

b) Fie funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ și $F:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa.

Determinați funcția f dacă

$$\left(1+e^x\sin x+e^x\cos x\right)F(x)=e^x\cos x-x\left(1+e^x\sin x+e^x\cos x\right)f(x),\text{ pentru orice } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Subiectul 1 - FIZICĂ

Pornind de la relaţia $\vec{F}=\frac{\overrightarrow{dp}}{dt}$, stabiliți expresia energiei cinetice în cazul clasic și relativist.

Subiectul 2 - FIZICĂ

Pentru ce valoare a energiei cinetice a unui proton ,eroarea relativă în determinarea lungimii de undă de Broglie atașată acestuia va fi ε=1%, atunci când problema este tratată nerelativist față de cazul relativist. Se dau : $m_o=1{,}67\cdot10^{-27}$kg, $c=3\cdot10^8$ m/s, 1MeV=$1{,}6\cdot10^{-13}$J.

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR " BREAZA

Concursul Județean "Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
FIZICĂ

CLASA a IX-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1. a)	Pentru:		**15p**
	Reprezentarea corectă a forțelor în cele două cazuri	**4p**	
	$G_t - F_f = F_1$	**1p**	
	$G_t + F_f = F_2$	**1p**	
	$N = G_n = mg\cos\alpha$	**2p**	
	$G_t = mg\sin\alpha$	**1p**	
	$F_f = \mu N$	**1p**	
	$m = \dfrac{F_1 + F_2}{2g\sin\alpha} = \sqrt{2}\text{kg} \cong 1,41\text{kg}$	**5p**	
b)	$F_1 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$	**1p**	**5p**
	$F_2 = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$	**1p**	
	$\Rightarrow \mu = \dfrac{F_2 - F_1}{F_1 + F_2} tg\alpha$	**2p**	
	$\mu = 0,5$	**1p**	
c)	$G_t - F_f = ma$	**2p**	**5p**
	$a = 0$	**1p**	
	$mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$	**1p**	
	$\mu = tg\alpha$	**1p**	
			Total subiect 1: 25 puncte
2. a)	$m_2 g - T = m_2 a$	**1p**	**7p**
	$T - G_t - F_f = m_1 a$	**1p**	
	$a = g\dfrac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}$	**3p**	
	$v = v_0 + a\Delta t$	**1p**	
	$v = 12\text{m/s}$	**1p**	
b)	$h_2 = \dfrac{a\Delta t^2}{2}$	**2p**	**8p**
	$t_{c_2} = \dfrac{v_{s_2} - v}{g}$	**2p**	
	$v_{s_2}^2 = v^2 + 2g(h - h_2)$	**2p**	
	$v_{s_2} = \sqrt{304} \cong 17,43\text{m/s}$	**1p**	
	$t_{c_2} = 0,54\text{s}$	**1p**	

c)	$a_u = -g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)$ $t_{op_1} = \dfrac{v}{g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}$ $t_{op_1} = 2,04s$ $d_{op_1} = \dfrac{v^2}{2g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}$ $d_{op_1} = 12,27\text{m}$ $a_c = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$ $\dfrac{h}{\sin\alpha} + h_2 + d_{op_1} = \dfrac{a_c t_c^2}{2}$ $\Rightarrow t_c = 5,57s$ $\Rightarrow v_{s_1} = a_c t_c$ $\Rightarrow v_{s_1} = 23\text{m/s}$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p**	**10p**
			Total subiect 2: 25 puncte

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR " BREAZA

Concursul Județean "Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
FIZICĂ

CLASA a X-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1. a)	$p_1V_1 = \frac{m_1RT}{\mu}$	**2p**	**7p**
	$p_2V_2 = \frac{m_2RT}{\mu}$	**2p**	
	$m = m_1 + m_2 = \frac{\mu}{RT}\left(p_1V_1 + p_2V_2\right)$	**2p**	
	$m = 46,5\text{g}$	**1p**	
b)	$p\left(V_1 + V_2\right) = \frac{m}{\mu}RT$	**2p**	**10p**
	$pV_1 = \frac{m_1^{'}}{\mu}RT$	**2p**	
	$pV_2 = \frac{m_2^{'}}{\mu}RT$	**2p**	
	$m_1^{'} = 15,5\text{g}; m_2^{'} = 31\text{g}$	**4p**	
c)	$p_1^{'} = p$	**2p**	**8p**
	$p_1^{'} = 2,66 \cdot 10^5\,Pa$	**2p**	
	$p_2^{'} = \frac{m_2^{'}RT_2}{\mu V_2}$	**2p**	
	$p_2^{'} = 0,24 \cdot 10^5\,Pa$	**2p**	
Total subiect 1: 25 puncte			
2. a)	Pentru: $1\left(p_1, V_1, T_1\right)$ $2\left(2p_1, V_1, 2T_1\right)$	**4p**	**8p**
	$3\left(\sqrt[4]{2}p_1, \sqrt[4]{2}V_1, \sqrt{2}T_1\right)$ Pentru reprezentare corectă în sistem de coordonate (V,T)	**4p**	
b)	$L_t = L_{12} + L_{23} + L_{31}$	**1p**	**8p**
	$L_{12} = 0$	**1p**	
	$L_{23} = -\frac{\nu R\left(T_3 - T_2\right)}{n-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\nu RT_1$	**2p**	
	$L_{31} = A_{subgrafic_{p(V)}} = \frac{\left(p_1 + p_3\right)\left(V_1 - V_3\right)}{2} = -\frac{1}{2}p_1V_1\left(\sqrt{2} - 1\right)$	**2p**	
	$L_t = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}p_1V_1$	**2p**	
c)	$\eta = \frac{L_t}{Q_p}$	**1p**	**9p**

	$Q_p = Q_{12} = \nu C_V\left(T_2 - T_1\right) = \frac{3}{2} p_1 V_1$ $\eta = \frac{3-2\sqrt{2}}{3} \cong 6\%$	**1p** **1p**	
	$Q_{23} = \Delta U_{23} + L_{23} = -\left(2-\sqrt{2}\right) p_1 V_1$ $Q_{23} = \nu C_{23}\left(T_3 - T_2\right) = -\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{C_{23}}{R} p_1 V_1$ $C_{23} = R$	**1p** **1p** **1p**	
	$Q_{31} = \Delta U_{31} + L_{31} = -2\left(\sqrt{2}-1\right) p_1 V_1$ $Q_{31} = \nu C_{31}\left(T_1 - T_3\right) = -\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{C_{31}}{R} p_1 V_1$ $C_{31} = 2R$	**1p** **1p** **1p**	
Total subiect 2: 25 puncte			

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR “DIMITRIE CANTEMIR ” BREAZA

Concursul Județean “Octav Onicescu”
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
FIZICĂ

CLASA a XI-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1. a)	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cong 2s$	**2p**	**2p**
b)	$F = G\sin\alpha - F_A\sin\alpha$ $F_A = \rho_0 \frac{mg}{\rho}$ $F = mg\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\sin\alpha$ Pentru mici oscilații: $x = \ell\sin\alpha$ $F = kx$ $k = \frac{mg}{\ell}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)$ $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $T_1 = T_0\sqrt{\frac{\rho}{\rho-\rho_0}} \cong 2,52s$	**2p** **2p** **1p** **2p** **1p** **2p** **3p**	**13p**
c)	$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a_r}}$ $a_r = \sqrt{a_{cp}^2 + g^2}$ $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$ $a_r = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + g^2}$ $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{\frac{v^4}{R^2}+g^2}}} \cong 1,32s$	**2p** **2p** **2p** **1p** **3p**	**10p**
Total subiect 1: 25 puncte			
2. a)	$y_1 = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda})$ $y_2 = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda})$ $y = y_1 + y_2$ $y_M = 2A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{d_1+d_2}{2\lambda})$ $y_M = 2.10^{-2}\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\pi(100t - 1/8)$ (m)	**2p** **2p** **2p** **2p** **2p**	**10p**
b)	$y_1 = A\sin 2\pi(\nu t - \frac{d+D}{2\lambda})$	**3p** **3p**	**10p**

	$y_2 = A\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{D}{2\lambda}\right)$ $y_N = y_1 + y_2 = 2A\cos\pi\frac{d}{\lambda}\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{d+2D}{2\lambda}\right)$ $y_N = 10^{-2}\sqrt{2}\sin 2\pi(100t - 9/8)$ (m)	**3p** **1p**	
c)	$v = \frac{\lambda}{T}$ $\nu = 1/T$ $v = 120$m/s	**3p** **1p** **1p**	**5p**
Total subiect 2: 25 puncte			

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR " BREAZA

Concursul Județean "Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
FIZICĂ

CLASA a XII-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1.	$F=\frac{d(mv)}{dt}$	**2p**	**25 p**
	$F=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$	**3p**	
	I: $dE=Fdx$		
	$F=m\frac{dv}{dt}$	**3p**	
	$dx=vdt$		
	$\Rightarrow dE=m\frac{dv}{dt}\cdot vdt$	**3p**	
	$\Rightarrow dE=mvdv$		
	$\int dE=E=\frac{mv^2}{2}$	**3p**	
	II: $dE=Fdx$		
	$F=v\frac{dm}{dt}$	**2p**	
	$\Rightarrow dE=(v\frac{dm}{dt})(vdt)=v^2dm=c^2dm$	**5p**	
	$\int_{E_0}^{E}dE=\int_{m_0}^{m}c^2dm$	**2p**	
	$E_c=mc^2-m_0c^2$	**2p**	
Total subiect 1: 25 puncte			
2. a)	Pentru:		**25p**
	Ipoteza de Brooglie în cazul nerelativist $\lambda_0=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_0\cdot E_c}}$	**3p**	
	Relația energiilor în mecanica relativistă $E_c=m\cdot c^2-m_0\cdot c^2$	**2p**	

	Variația masei cu viteza $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$	**2p**	
	Stabilirea vitezei în cazul relativist $v=\dfrac{c\cdot\sqrt{E_c(2m_0\cdot c^2+E_c)}}{2m_0\cdot c^2+E_c}$	**6p**	
	și a impulsului $p=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\cdot\dfrac{c\cdot\sqrt{E_c(2m_0\cdot c^2+E_c)}}{2m_0\cdot c^2+E_c}=\sqrt{2m_0\cdot E_c}\cdot\sqrt{1+\dfrac{E_c}{2m_0\cdot c^2}}$	**4p**	
	Lungimea de undă de Brooglie în cazul relativist $\lambda=\dfrac{\lambda_0}{\sqrt{1+\dfrac{E_c}{2m_0\cdot c^2}}}$	**3p**	
	Eroarea relativă $\varepsilon=\dfrac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}=\sqrt{1+\dfrac{E_c}{2m_0\cdot c^2}}-1$	**2p**	
	Neglijând termenul în ε^2 se obține $E_c=4m_0\cdot c^2\cdot\varepsilon$	**2p**	
	$E_c=60{,}12\cdot10^{-13}J=37{,}57MeV$	**1p**	
Total subiect 2: 25 puncte			

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR " BREAZA

Concursul Județean "Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
MATEMATICĂ

CLASA a IX-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1. a)	$S=1+(11+2)+(111+2)+\ldots+(\underbrace{11\ldots1}_{nori}+2) \Leftrightarrow$ $S=(1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{nori})+2(n-1)$ $S=\dfrac{10^{n+1}-10}{81}-\dfrac{n}{9}+2n-2 \Leftrightarrow$. $S=\dfrac{10^{n+1}+153n-172}{81}$		**5p** **10p** **5p** **5p**
Total subiect 1: 25 puncte			
2. a)	Din asemănări obținem $\frac{GP}{PC}=\frac{GY}{BC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{GY}{MC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AG}{AM}=\frac{k}{2}$.		**5p**
b)	Avem $\overrightarrow{CP}=\frac{2}{k+2}\overrightarrow{CG}=\frac{2}{k+2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}\right)=-\frac{2}{k+2}\overrightarrow{AC}+\frac{2k}{k+2}\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{k+2}\overrightarrow{AC}+\frac{2k}{k+2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{k}{k+2}\overrightarrow{AB}+\frac{k-2}{k+2}\overrightarrow{AC}$.		**5p**
c)	Avem $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{k}{k+2}\overrightarrow{AB}+\frac{k-2}{k+2}\overrightarrow{AC}=\frac{k-2}{2(k+2)}\overrightarrow{AB}+\frac{3k-2}{2(k+2)}\overrightarrow{AC}$. Cum G este centrul de greutate al triunghiului ABC, avem $k=\frac{2}{3}$ și deci $\overrightarrow{MP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Analog $\overrightarrow{MQ}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\frac{GQ}{QB}=\frac{k}{2}=\frac{GP}{PC}$, de unde rezultă concluzia.		**15p**
Total subiect 2: 25 puncte			

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR " BREAZA

Concursul Județean "Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Ediția I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
MATEMATICĂ

CLASA a X-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1. a)	$\log_x y, \log_y z, \log_z t, \log_t x > 0$ Din inegalitatea mediilor avem $$\frac{\log_x y}{z}+\frac{\log_y z}{t}+\frac{\log_z t}{x}+\frac{\log_t x}{y} \geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{\log_x y}{z}\cdot\frac{\log_y z}{t}\cdot\frac{\log_z t}{x}\cdot\frac{\log_t x}{y}}$$ $$4\cdot\sqrt[4]{\frac{\log_x y}{z}\cdot\frac{\log_y z}{t}\cdot\frac{\log_z t}{x}\cdot\frac{\log_t x}{y}}=\frac{4}{\sqrt[4]{x\cdot y\cdot z\cdot t}} \geq$$ $$\geq \frac{4}{\frac{x+y+z+t}{4}}=\frac{16}{x+y+z+t}.$$		**5p** **10p** **10p**
Total subiect 1: 25 puncte			
2.	$\begin{cases} z_1 - z_2 \in \mathbb{R} \\ z_2^2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = \overline{z_1 - z_2} \\ z_2^2 = \overline{z_2^2} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} z_1 - z_2 = \overline{z_1} - \overline{z_2} \\ z_2^2 = \left(\overline{z_2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - \frac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}} = \overline{z_1} - \frac{1-z_1}{1+z_1} \\ z_2 = \overline{z_2} \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} z_1 - \frac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}} = \overline{z_1} - \frac{1-z_1}{1+z_1} \\ z_2 = -\overline{z_2} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \left(z_1-\overline{z_1}\right)\left(1-\frac{2}{1+z_1+\overline{z_1}+\|z_1\|^2}\right)=0 \\ 1+z_1-\overline{z_1}-\|z_1\|^2 = 1-z_1+\overline{z_1}-\|z_1\|^2 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} \left(z_1-\overline{z_1}\right)\left(1-\frac{2}{1+z_1+\overline{z_1}+\|z_1\|^2}\right)=0 \\ 1+z_1-\overline{z_1}-\|z_1\|^2 = -1+z_1-\overline{z_1}+\|z_1\|^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow z_1=\overline{z_1}$ *sau* $\begin{cases} \left(z_1-\overline{z_1}\right)\left(1-\frac{2}{1+z_1+\overline{z_1}+\|z_1\|^2}\right)=0 \\ \|z_1\|^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}-\{-1\}$ *sau* $\begin{cases} z_1+\overline{z_1}+\|z_1\|^2=1 \\ \|z_1\|=1 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}-\{-1\}$ *sau* $\begin{cases} z_1+\overline{z_1}=0 \\ \|z_1\|=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}-\{-1\}$ *sau* $z_1 \in \{i,-i\} \Leftrightarrow z_1 \in \{i,-i\} \cup \left(\mathbb{R}-\{-1\}\right)$		**2p** **5p** **5p** **5p** **5p** **3p**
Total subiect 2: 25 puncte			

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR "DIMITRIE CANTEMIR " BREAZA

Concursul Județean "Octav Onicescu"
Secțiunea matematică - fizică
Edița I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
MATEMATICĂ

CLASA a XI-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1. a)	$det\, AB = 1 \Rightarrow det(A)\cdot det(B) = 1 \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow A - inversabilă$ $det(I_3 + BA) = det((A^{-1}+B)A) = det(A^{-1}+B)\cdot det(A) =$ $= det(A)\cdot det(A^{-1}+B) = det(A(A^{-1}+B))$ $= det(I_3 + AB)$		**5p** **5p** **5p** **5p**
b)	$I_3 + AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(I_3 + BA) = det(I_3 + AB) = 8$		**5p**
Total subiect 1: 25 puncte			
2.	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos kx)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = ... = e^{-\frac{k^2}{2}}$ $l = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x \cos 2x ... \cos nx)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1^2}{2}-\frac{2^2}{2}-...-\frac{n^2}{2}}$ $L = \lim\limits_{n\to +\infty} l^{\frac{1}{n^3}} = e^{-\frac{1}{6}}$		**5 p** **10 p** **10 p**
Total subiect 2: 25 puncte			

COMANDAMENTUL LOGISTIC ÎNTRUNIT
COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR “DIMITRIE CANTEMIR ” BREAZA

Concursul Județean “Octav Onicescu”
Secțiunea matematică – fizică
Ediția I
21 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE MATEMATICĂ

CLASA a XII-a

Subiect	Rezolvare	Parțial	Punctaj
1. a)	Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Din i) rezultă: $(2n+2)*(2n)=1 \Rightarrow \left(2(n+1)\right)*(2n)=1 \quad \overset{ii)}{\Rightarrow}$ $\overset{ii)}{\Rightarrow}\ 2\cdot\left((n+1)*(2n)\right)=1 \quad \Rightarrow \quad (n+1)*(2n)=\frac{1}{2} \quad (\forall)n\in\mathbb{N}^*$		**2p** **3p**
b)	$i) \Rightarrow 4*2=1\ ;\ 3*1=1 \qquad \Rightarrow \quad 3*(4*2)=1$ Pe de altă parte, $(3*4)*2 \overset{a)}{=} \frac{1}{2}*2 \ = \left(\frac{1}{8}\cdot 4\right)*2 \overset{ii)}{=} \frac{1}{8}\cdot(4*2) = \frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{8} \qquad (2)$ Din relațiile (1) și (2) rezultă $3*(4*2)\neq(3*4)*2 \Rightarrow$ „*” nu este asociativă. Pp. prin RA. că „$*$” admite element neutru $\Rightarrow\ (\exists)e\in\mathbb{R}_+^*\ a.î.\ x*e=e*x=x\ ,\ (\forall)x\in\mathbb{R}_+^*$ $\left.\begin{array}{r} 1*2=\left(\frac{1}{e}\cdot e\right)*2\overset{ii)}{=}\frac{1}{e}\cdot(e*2)=\frac{1}{e}\cdot 2=\frac{2}{e} \\ 4*2=1\Rightarrow(2\cdot 2)*2=1 \Rightarrow 2\cdot(2*2)=1 \Rightarrow 2*2=\frac{1}{2}\quad (2\cdot 1)*2=\frac{1}{2}\Rightarrow 1*2=\frac{1}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \frac{2}{e}=\frac{1}{4} \Rightarrow e=8 \Rightarrow 8*6=6 \\ i) \Rightarrow 8*6=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6=1\ (fals) \Rightarrow$ „*” nu admite element neutru.		**4p** **6p** **1p** **3p** **3p** **3p**
			Total subiect 1: 25 puncte
2. a)	$I_1+I_2=x$ $I_1-I_2=\ln\left(e^{-x}+\sin x+\cos x\right)$ $I_1=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left(e^{-x}+\sin x+\cos x\right)+c\right), c\in\mathbb{R}$ $I_2=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(e^{-x}+\sin x+\cos x\right)+c\right), c\in\mathbb{R}$		**3p** **3p** **4p**
b)	Relația din enunț se scrie $F(x)+xF'(x)=\frac{\cos x}{e^{-x}+\sin x+\cos x}$ obținem $xF(x)=\int\frac{\cos x}{e^{-x}+\sin x+\cos x}dx.$ Rezultă $F(x)=\frac{1}{2x}\left(x+\ln\left(e^{-x}+\sin x+\cos x\right)+c\right), c\in\mathbb{R}$ de unde $f(x)=-\frac{c}{2x^2}-\frac{e^{-x}+\sin x-\cos x}{2x(e^{-x}+\sin x+\cos x)}-\frac{1}{2x^2}\ln(e^{-x}+\sin x+\cos x), c\in\mathbb{R}$		**10p** **5p**
			Total subiect 2: 25 puncte